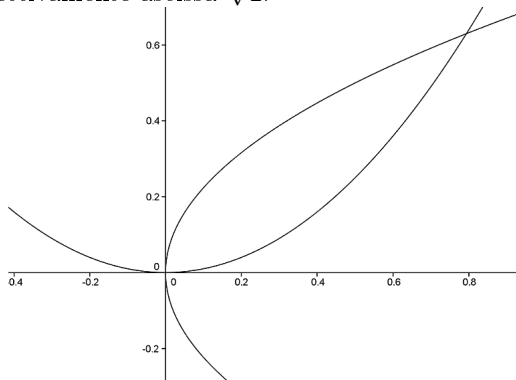


## PNI problema 2

a) Le parabole di equazione  $y = x^2$  e  $y^2 = 2x$  hanno un fuoco rispettivamente in  $F_1(0, \frac{1}{4})$  e  $F_2(\frac{1}{2}, 0)$ . Le loro direttrici hanno rispettivamente per equazione  $y = -\frac{1}{4}$  e  $x = -\frac{1}{2}$ . Il punto  $A$  di intersezione dei due grafici ha effettivamente ascissa  $\sqrt[3]{2}$ .



b) Il problema classico dell'antichità legato alla quantità  $\sqrt[3]{2}$  è la *duplicazione del cubo* (con riga e compasso). Usiamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo  $1 \leq x \leq 2$  (dato che la funzione  $f(x) = x^3 - 2$  assume valori discordi:  $f(1) = -1$  e  $f(2) = 6$ ). Si consideri il valore  $x = \frac{3}{2}$  come valore approssimato. Si ha  $f(\frac{3}{2}) > 0$ . Si considera quindi come valore approssimato il valore medio nell'intervallo  $[1, \frac{3}{2}]$ , precisamente  $x = \frac{5}{4}$ . Poiché  $f(\frac{5}{4}) < 0$  si prende in considerazione il valore medio dell'intervallo  $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ . Precisamente  $x = \frac{11}{8}$ . Ripetendo il procedimento, si ha  $f(\frac{11}{8}) > 0$ . Dunque si considera il valore medio di  $[\frac{5}{4}, \frac{11}{8}]$ , vale a dire  $\frac{21}{16}$ . Poiché è  $f(\frac{21}{16}) > 0$ , si prende infine in considerazione il valor medio  $x = \frac{41}{32}$  di  $[\frac{5}{4}, \frac{21}{16}]$ . In seguito si ha  $x = \frac{81}{64}$  valor medio  $[\frac{41}{32}, \frac{21}{16}]$ . Infine troviamo il valor medio  $\frac{161}{64}$  nell'intervallo  $[\frac{5}{4}, \frac{81}{64}]$ . Questo valore dista da  $\sqrt[3]{2}$  per meno di  $\frac{1}{128}$ . Quindi soddisfa le precisioni richieste.

c) Il segmento staccato sui due archi dalle rette parallele all'asse delle  $x$  è dato da  $d(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y^2$ . Da qui, essendo  $d' = \frac{1-2y\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = 0$ , si ricava  $y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$  e quindi  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ .

d) Le sezioni ottenute tagliando il solido di rotazione con piani ortogonali all'asse delle  $x$  sono corone circolari. Il volume di  $W$  è dato da:

$$\pi \left[ \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x dx - \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx \right] = 3\sqrt[3]{4}\pi/5$$

