

## Ordinamento Questionario

1. La dimostrazione può essere condotta per induzione ma ci si può anche accontentare della seguente osservazione. Per  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  risulta  $p' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ ,  $p'' = n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + 2a_2$ .  
Si vede così che il polinomio si abbassa di grado (tante volte quante sono le operazioni di derivazione eseguite) e che il coefficiente del termine di grado massimo, a parte  $a_n$ , è dato dal prodotto di  $n(n-1) \dots$  ossia di tanti fattori quante sono le derivate eseguite. Si conclude allora che la derivata  $n$ -esima è data da  $n! a_n$ .
2. I triangoli  $PAB$  e  $PBC$  sono rettangoli perché  $PB$  è perpendicolare al piano contenente  $ABC$ . Il triangolo  $PCA$  è rettangolo per il teorema delle tre perpendicolari.
3. Dall'equazione  $f'(x) = 2$ , ovvero  $3e^{3x} = 2$ , si ricava  $x = \frac{\ln 2 - \ln 3}{3}$
4. Sappiamo che  $\sin x/x$  tende a 1 per  $x$  tendente a 0. Allora il limite proposto è uguale al limite per  $x$  tendente all'infinito di  $4x/x = 4$ .
5. L'apotema del cono misura 8 dm. Indichiamo con  $x$  il raggio della circonferenza di base e con  $h$  l'altezza. Si ha  $x = \sqrt{64 - h^2}$ . Il volume del cono risulta:  $V(h) = \frac{1}{3} \pi (64 - h^2) h$ . Derivando rispetto ad  $h$ :  $V'(h) = \frac{1}{3} (-3h^2 + 64)$  La derivata si annulla per  $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ .  $V'(h) > 0$  per  $0 < h < \sqrt{\frac{64}{3}}$  quindi  $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$  è l'altezza che rende massimo il volume del cono.  
Il volume del serbatoio risulta:  $V(\sqrt{\frac{64}{3}}) = \frac{128}{9} \pi \sqrt{\frac{64}{3}}$  che è circa  $206,37 \text{ dm}^3$ ; quindi la sua capacità è circa di  $206,37$  litri.
6. La condizione di non negatività su  $\cos x$  è soddisfatta per  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (con  $k$  arbitrario numero intero).
7. La condizione di continuità  $h(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x)$  significa  $0 = 16k - 9$  ovvero  $k = 9/16$
8. La progressione aritmetica è caratterizzata dall'avere costante la differenza tra due termini successivi; nel nostro caso quindi:  
$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}$$
  
Quindi, calcolando e semplificando, si ottiene:  
$$\frac{1}{(n-2)!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{6(n-3)!}$$
. Risulta  $n^2 - 9n + 14 = 0$  che ha come soluzioni  $n = 2$  e  $n = 7$ ; dovendo essere  $n > 3$  il valore di  $n$  è 7.
9. Un triangolo come quello richiesto avrebbe altezza relativa al lato  $BC$  (che chiamiamo  $AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ) mentre è  $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$ . Se l'angolo  $ABC$  misura  $30^\circ$ , l'altezza relativa al lato  $BC$  vale  $\frac{3}{2}$ . In questo caso si hanno i due triangoli  $ABC$  e  $ABC'$ , essendo  $C'$  un punto interno al segmento  $BH$ , che soddisfano le condizioni date.
10. Ruotando intorno all'asse delle  $y$  il tratto di curva data, si ottiene il volume  $V_1$ . Tenendo conto che  $x = y^2$ , calcoliamo  $V_1 = \pi \int_0^2 y^4 dy = \frac{32}{5} \pi$ . Il volume richiesto è la differenza tra il volume del cilindro di raggio 4 e altezza 2 e  $V_1$ :  $V = 32\pi - \frac{32}{5} \pi = \frac{128}{5} \pi$ .