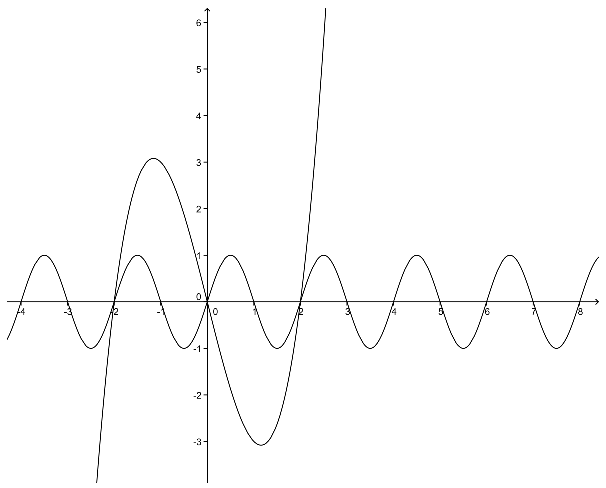
Ordinamento problema 1

1. La funzione $f(x) = x^3 - 4x$ è una funzione dispari, continua su tutto $\mathbb{R}$; il suo grafico interseca l'asse delle x nei punti $x = 0$ e $x = \pm 2$; è positivo per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$.
   La derivata $f'(x) = 3x^2 - 4$ si annulla nei punti $x = \pm 2\sqrt{3}/3$; il massimo della funzione vale $16\frac{\sqrt{3}}{9}$ (raggiunto in $x = -2\sqrt{3}/3$) e il minimo $-16\frac{\sqrt{3}}{9}$ (raggiunto in $x = 2\sqrt{3}/3$).
   Dallo studio del segno della derivata seconda $f''(x) = 6x$, si deduce che $x = 0$ è un punto di flesso (la funzione è convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$).
   La funzione $g(x) = \sin(\pi x)$ è anch'essa dispari, continua su tutto $\mathbb{R}$, periodica con periodo 2. Il suo grafico è una sinusoide.
   Un grafico qualitativo delle due funzioni in uno stesso sistema di riferimento è il seguente.



2. Le ascisse dei punti di intersezione del grafico della funzione f con la retta $y = -3$ sono $x = 1$ e $x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.
   I punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6, 6]$ sono $P_1(\frac{1}{2}; 1)$, $P_2(\frac{3}{2}; -1)$, $P_3(\frac{5}{2}; 1)$, $P_4(\frac{7}{2}; -1)$, $P_5(\frac{9}{2}; 1)$, $P_6(\frac{11}{2}; -1)$ e anche, considerando che la funzione è dispari, i loro simmetrici rispetto all'origine.

3. L'area della regione R è limitata superiormente dalla funzione g e inferiormente dalla funzione f. Si dimostra, con il confronto delle derivate prime delle due funzioni nel punto $x = 2$ e l'applicazione del teorema di Rolle, che i grafici delle funzioni in oggetto per $x \leq 0$ si intersecano solo in $x = 0$ e $x = 2$. L'area si calcola quindi con la formula:

$$A_R = \int_0^2 (\sin(\pi x) - x^3 + 4x)\, dx = [-\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + 2x^2]_0^2 = 4$$

4. Il volume richiesto è dato da:

$$V = \int_0^2 (\sin(\pi x) - x^3 + 4x) \cdot (3 - x)\, dx$$

   Anche integrando per parti si ottiene $V = 2/\pi + 116/15$. I litri contenuti nella vasca sono $(2/\pi + 116/15) \cdot 1000$