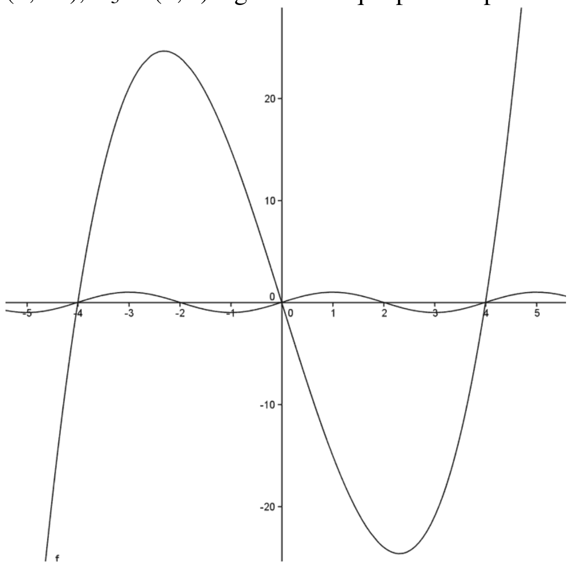
Problema 2 PNI

1. La funzione $f(x) = x^3 - 16x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, dispari, positiva per $-4 < x < 0$ e per $x > 4$; il suo grafico interseca l'asse x in $x = 0$ e $x = \pm 4$. I suoi limiti per $x \to \pm\infty$ valgono $\pm\infty$.
   Dallo studio del segno della derivata prima $f'(x) = 3x^2 - 16$, si deduce che $x = -4\sqrt{3}/3$ è punto di massimo relativo mentre il suo valore opposto è l'ascissa del valore di minimo relativo.
   Dallo studio del segno della derivata seconda $f''(x) = 6x$, si deduce che f è concava (convessa) per $x < 0$ ($x > 0$) e che $x = 0$ è punto di flesso.
   La funzione $g(x) = \sin(\pi x/2)$, periodica con periodo 4, ha un andamento sinusoidale.
   $g'(x) = \pi/2 \cos(\pi x/2)$ si annulla per $\pi x/2 = \pi/2 + k\pi$. Abbiamo così i punti $P_1 = (1; 1)$, $P_2 = (3; -1)$, $P_3 = (5; 1)$, $P_4 = (7; -1)$, $P_5 = (9; 1)$ e gli altri cinque punti rispettivamente simmetrici rispetto all'origine.



2. L'area della regione richiesta è data dal valore assoluto dell'integrale, tra $x = 0$ e $x = 4$ della funzione f. Vale 64.

3. Le intersezioni del contorno di R con la retta $y = -15$ portano all'equazione $x^3 - 16x + 15 = 0$ soddisfatta per $x = 1$ e (utilizzando il teorema di Ruffini) per $x = (-1 \pm \sqrt{61})/2$.
   Le ascisse richieste sono quindi $x = 1$ e $x = (-1 + \sqrt{61})/2$:

   Analogamente, per la retta di equazione $y = -5$, abbiamo l'equazione $x^3 - 16x + 5 = 0$, che può essere risolta con il metodo grafico, confrontando i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = 16x - 5$. Si determinano due punti di intersezione $x_1 \in [0; 1]$ e $x_2 \in [3; 4]$. Applicando uno dei metodi numerici (bisezione o Newton) si trova che $x_1 = 0,31$ e $x_2 = 3,83$.

4. Il volume richiesto è dato da $\int_0^4 (\sin(\pi x/2) - x^3 + 16x) \cdot (5 - x)\,dx$. Utilizzando anche la formula di integrazione per parti, si ottiene $V = 8/\pi + 2752/15$. I litri d'acqua necessari per riempire la vasca saranno allora $(8/\pi + 2752/15)1000$