Quesiti PNI

1. Dipende da che cos'è il "mondo che ci circonda. Se si intendono le nostre vicinanze immediate (o "in piccolo", come si dice), la Geometria euclidea fornisce ancora un'ottima approssimazione. Se invece si pensa a tutta la Terra o a distanze interstellari, allora la Geometria euclidea dovrà essere sostituita (per esempio, sulla Terra) da quella sferica.

2. Sia $P(x, \sqrt{x})$ un generico punto della curva in oggetto. La sua distanza da (4;0) è data da $d = \sqrt{(x-4)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$. Calcolandone la derivata prima, si vede che tale distanza è minima per $x = 7/2$.

3. Ricordiamo che il volume cercato si può ottenere con la formula $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx$. Integrando per parti si ottiene $V = 2\pi^2$. Lo stesso risultato si poteva ottenere per mezzo del primo teorema di Guldino, secondo il quale è $V = 2\pi A\overline{x}$ dove A è la superficie ruotante e $\overline{x}$ è l'ascissa del baricentro.

4. Le informazioni del testo portano all'equazione $\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$ ovvero a:
$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad \text{da cui} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ da cui } \frac{n-3}{4} = 1 \text{ che dà la soluzione } n = 7$$

5. L'insieme Q dei quadrati dei numeri naturali N è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali. Tuttavia i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca (come si dice: sono "equipotenti"). Questo avviene perché N e Q sono insiemi infiniti: questo fenomeno (corrispondenza biunivoca fra un insieme ed un suo sottoinsieme proprio) caratterizza gli insiemi infiniti.

6. Posto R=1 il raggio della sfera e detta x la distanza del centro dalla circonferenza di base del cono, si trova che questa circonferenza ha raggio $r = \sqrt{1-x^2}$ e che l'apotema del cono vale $a = \sqrt{2(1+x)}$. Dunque la superficie laterale del cono è allora $S = \pi ra = \sqrt{2}\pi(1+x)\sqrt{1-x}$. Annullando la derivata prima di S(x), si trova il valore massimo x =1/3. Quindi il cono inscritto di superficie laterale massima è quello di altezza 40/3 cm.

7. Calcoliamo la probabilità come:
P(almeno due risposte corrette)=1 – P (almeno una risposta corretta)
=1– P(nessuna risposta corretta) – P(una risposta corretta)
Poiché: P(nessuna risposta corretta)=$\frac{3^{10}}{4^{10}}$, P(una risposta corretta)= $10\frac{3^9 \cdot 1^1}{4^{10}}$, otteniamo
P(almeno due risposte corrette)=$1 - \frac{3^{10}}{4^{10}} - 10\frac{3^9}{4^{10}} = 1 - \frac{13 \cdot 3^9}{4^{10}}$.

8. Il problema della quadratura del cerchio è quello di costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un cerchio dato. Ciò implica costruire con riga e compasso un segmento di misura $\sqrt{\pi}$. L'importanza del problema consiste nel capire i limiti delle costruzioni con riga e compasso e la sua diffusione è dovuta ai suoi numerosi insuccessi (finché è stato dimostrato che è impossibile, in quanto π è un numero trascendente).

9. Il luogo dei punti equidistanti dai vertici B e C dell'ipotenusa è il piano assiale del segmento BC.
Analogamente, il luogo dei punti equidistanti dai vertici A C di un cateto è il piano assiale del segmento AC. L'intersezione di questi due piani è il luogo dei punti equidistanti dai tre vertici che, nel caso di un triangolo rettangolo, passa per il punto medio dell'ipotenusa ed è perpendicolare al piano del triangolo.

10. L'alternativa A) è impossibile in quanto la funzione f è sempre crescente mentre la curva II è anche negativa.
Per la stessa ragione è falsa anche l'alternativa B).
L'ipotesi C) è impossibile perché f è decrescente per $x < 0$ mentre per alcuni di tali valori il diagramma della funzione III si trova al di sopra dell'asse x.
L'ipotesi E) è falsa perché per $x < 0$ la funzione III è in parte crescente e in parte decrescente mentre per tali valori la funzione I non è mai positiva.
Così ragionando, si verifica che l'unica alternativa possibile è quella rappresentata da D).