Questionario ordinamento

1) Quello proposto è il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = 5x^4$ con punto iniziale $x = \frac{1}{2}$. Essendo $f'(x) = 20x^3$ e $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, quest'ultimo è il valore del limite proposto.

2) La retta di equazione $y = m$ è asintoto orizzontale per il grafico di $y = f(x)$ quando risulta $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$.

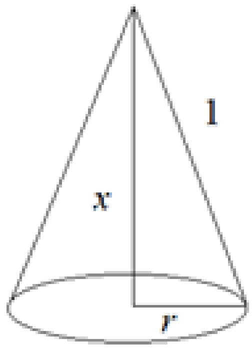
La retta di equazione $x = a$ è asintoto verticale per $y = f(x)$ quando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

La retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto obliquo per $y = f(x)$ quando risulta $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + q)] = 0$.

La funzione $y = \frac{1}{x^2-1}$, ad esempio, ammette l'asse x come asintoto orizzontale e le rette di equazioni $x = \pm 1$ come asintoti verticali.

3) Da $s'(t) = 20\left(-e^{-t/2} + 1\right)$ e $s''(t) = 10e^{-t/2}$, ponendo $t = 4$ si ha che l'accelerazione richiesta è $10e^{-2}$.

4) Sia *x* l'altezza del cono e *r* il raggio della circonferenza di base.



Allora:

$$V = \frac{\pi x r^2}{3} = \frac{\pi x(1 - x^2)}{3}$$

Il volume massimo si ha in corrispondenza di un valore *x* tale che $V'(x) = 0$ e $V''(x) < 0$. $V'(x) = \frac{\pi}{3}(1 - 3x^2) = 0$ per $x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $V''(x) = -2\pi x$. Si ha quindi $V''(x) < 0$ per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

In conclusione $V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$ in metri cubi e la capacità del cono è $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot 1000$ litri.

5) Il numero di segmenti è pari al numero delle combinazioni di n oggetti di classe 2 e quindi è dato da:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

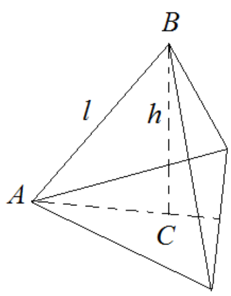
Analogamente il numero richiesto di triangoli è dato da $\binom{n}{3}$ e quello di tetraedri da $\binom{n}{4}$.

6) Applicando le formule di duplicazione del seno e del coseno si ha che $f(x) = -17$ per ogni x reale. Risulta quindi sempre $f'(x) = 0$.

7) La misura del segmento *AC* che ha per estremi un vertice *A* del triangolo di base ed il piede della perpendicolare *C* tracciata dal vertice *B* è data da:

$$AC = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

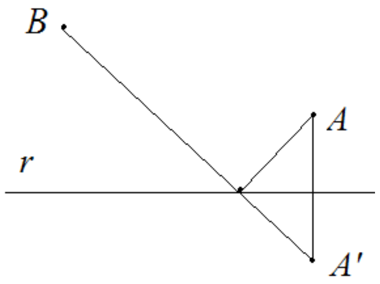
Quindi $\sin\alpha = \frac{AC}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\alpha = arcsen\frac{\sqrt{3}}{3}$



8) Applicando la definizione di valor medio, otteniamo:

$$\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}dx = \frac{1}{e-1}$$

9) La soluzione si ottiene considerando il punto A' simmetrico di *A* (o il simmetrico B' di *B*) rispetto alla retta *r*, quindi congiungendolo con *B* (o con *A*). Il punto di intersezione del segmento $A'B$ con *r* è il punto *C* tale che il percorso minimo richiesto sia $AC + CB$.
Alternativamente si può risolvere il problema per via analitica, ad esempio scegliendo come asse delle *x* la retta *r* e imponendo che il punto *A* sia il punto unitario sull'asse delle *y*. Si perviene così ad una funzione di una variabile da minimizzare.



10) La funzione $y = x^2 + 1$ assume tutti i valori da 1 a $+\infty$; la funzione $\ln(x^2+1)$ assume pertanto tutti i valori da 0 a $+\infty$ e quindi le funzioni C) e D) cambiano segno.

Le funzioni $\sin(x^2+1)$ e $\cos(x^2+1)$ oscillano tra -1 e 1 e quindi è la funzione A) ad essere sempre positiva (in quanto è positiva tra$-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$).