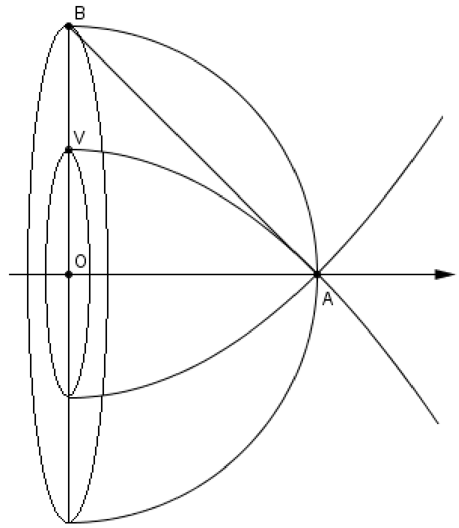
Ordinamento problema 2

1) Si osservi che la tangente alla parabola passante per A ha coefficiente angolare m = - 1; infatti $y=3/2-x^2/6$ è l'equazione della parabola e si ha $y'(3)= - 1$. Dunque passa per il punto B.



L'area della prima parte in cui questa retta suddivide la regione R si ottiene per differenza dall'area di un quarto di cerchio di raggio 3 e l'area di un triangolo:

$$S_1 = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2)$$

Per il calcolo della seconda area, si osservi che la parabola rimane da una stessa parte rispetto alla tangente. Utilizzando il teorema di Archimede

$$S_{AVO} = \frac{1}{2}S_{AVA'} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}6\frac{3}{2} = 3$$

essendo $6\frac{3}{2}$ l'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico AVA'.

L'area del triangolo mistilineo ABV è dunque

$$S_2 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

2) Il volume richiesto si calcola con l'integrale:

$$\int_0^3 e^{5-3x}dx = -\frac{1}{3}[e^{5-3x}]_0^3 = \frac{1}{3e^4}(e^9 - 1)$$

3) Il volume richiesto del solido di rotazione si può ottenere togliendo il volume V_1del solido di rotazione del triangolo mistilineo OAV dal volume di una semisfera di raggio 3. Si ha:

$$V_1 = \pi\int_0^3 (\frac{9-x^2}{6})^2 dx = \pi[\frac{9}{4} + \frac{x^4}{36} - \frac{x^2}{2}]_0^3 = \frac{18}{5}\pi$$

$$V - V_1 = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi$$

4) Si può calcolare direttamente il luogo dei centri richiesto. Si consideri il punto $P(x, mx)$ appartenente alla retta di equazione *y*=*mx* e si imponga che sia il centro di una circonferenza tangente sia all'asse delle *x* sia alla circonferenza data. *P* ha distanza $3 - \sqrt{x^2 + m^2x} = 3 - x\sqrt{1 + m^2}$ dalla circonferenza e distanza *mx* dall'asse delle *x*. Uguagliando:

$$3 - x\sqrt{1 + m^2} = mx$$

Quadrando, si ottiene l'equazione di secondo grado in *x* (dipendente da *m*) $x^2 + 6mx - 9 = 0$. Eliminando il parametro *m* fra questa e l'equazione *y*=*mx* della retta che è il luogo dei centri (vale a dire, eliminando dalle considerazioni la dipendenza da *m*) si ottiene $x^2 + 6y - 9 = 0$ che è il luogo dei centri cercato (ed è precisamente la parabola data).

Alternativamente si può osservare che tutti e soli i punti della parabola sono equidistanti dal fuoco (che è l'origine) e dalla direttrice, che è la retta di equazione *y*=3. Di conseguenza sono equidistanti dall’asse delle x e dalla circonferenza. In conclusione, si osservi che gli archi di circonferenza dati risultano simmetrici rispetto alla retta di equazione x=3/2. Su questa retta giace pertanto il centro della circonferenza richiesta, le cui coordinate sono x=3/2 e y=9/8.