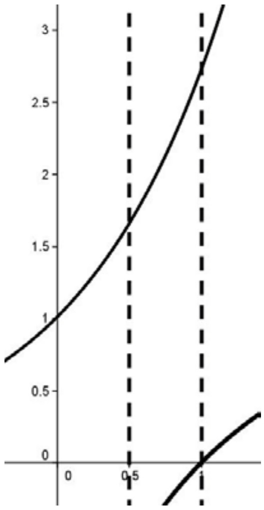
PNI problema 2

1)



$$A(R) = \int_{1/2}^{1} (e^x - \ln x)dx = [e^x - (x\ln x - x)]_{1/2}^{1} = e + 1 - e^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{2}$$

2) Il volume del solido S (ruotando attorno all'asse delle x, la limitazione data da $y = \ln x$ è inessenziale) si ottiene come:

$$\pi \int_{1/2}^{1} (e^x)^2 dx = \pi \int_{1/2}^{1} e^{2x} dx$$

Per calcolare invece il volume del solido T, occorre anzitutto invertire le funzioni date: $x = \ln y$ con $y \epsilon [\sqrt{e}, e]$ e $x = e^y$ con $y \epsilon [-\ln 2, 0]$

A questo punto, il volume del solido richiesto può essere considerato come dato dalla somma di tre volumi di solidi di rotazione:

$$V = \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (1 - \ln^2 y) + \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left(e^{2y} - \frac{1}{4}\right) dy + \pi(1 - \frac{1}{4})\sqrt{e}$$

3) Per essere parallele, le rette tangenti ai grafici delle funzioni f e g devono avere in x_o lo stesso coefficiente angolare: $e^{x_o} = 1/x_o$

Da un semplice confronto grafico tra le funzioni $y = e^x$ e $y = 1/x$, deduciamo che esiste un solo $x = \alpha$ in cui i due coefficienti angolari sono uguali. Usando il metodo di bisezione, si trova che x_o è approssimato da 0,57.

x
0,5
1
0,75
0,625
0,5625
0,59375
0,578125
0,570313

4) Risulta $h'(x) = f'(x) - g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. Dalla disequazione $h'(x) \geq 0$, tenendo conto del confronto grafico del punto precedente, si deduce che $x = \alpha$ è il punto di minimo assoluto per la funzione h.

Per quanto riguarda il massimo assoluto bisogna confrontare i valori che la funzione h assume agli estremi dell'intervallo considerato: $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + ln2 < h(1) = e$ quindi è in $x = 1$ che h ha il suo massimo assoluto.