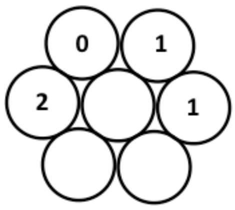
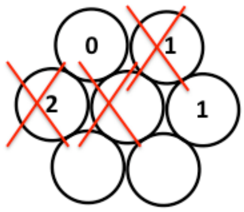
FINALE du 25e Championnat 27 août 2011

Solutions rédigées par le jury de la FFJM

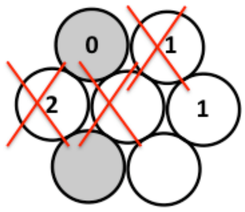
1 Pile ou Face

On utilise l'information fournie par le 0 : on écrit une croix (on ne les colorie pas) sur les trois pièces qui touchent celle sur laquelle on a écrit 0.

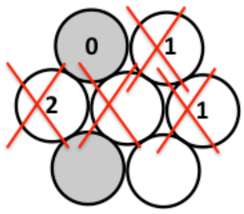




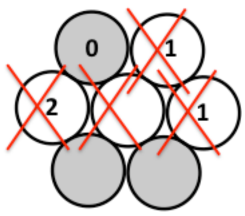
On utilise l'information fournie par le 2 : on colorie (gris) les deux pièces restantes qui touchent celle sur laquelle on a écrit 2.



On utilise l'information fournie par le 1 en haut : on écrit une croix (on ne la colorie pas) sur la pièce restante qui touche celle sur laquelle on a écrit 1.



On utilise l'information fournie par le 1 à droite : on colorie (gris) la pièce restante qui touche celle sur laquelle on a écrit 1.



2 L’addition mystérieuse

♥♣ + ♣♥ = ♣♣♦
La somme de deux nombres de deux chiffres, inférieurs à 100, est inférieure à 200.
Donc ♣ vaut 1.
♥1 + 1♥ = 11♦

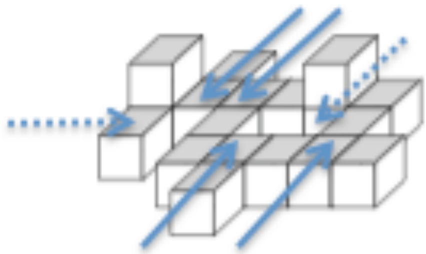
En considérant les chiffres des dizaines des deux nombres à gauche de l’égalité :
♥ + 1 plus une éventuelle retenue donne 11.
Donc ♥ vaut 9, et il y a une retenue de 1.
En considérant les chiffres des unités des deux nombres à gauche de l’égalité :
1 + ♥ donne 10.
Donc ♦ vaut 0, et il y a bien une retenue de 1.

La réponse est 91 + 19 = 110.

3 Les 18 cubes

Les 2 cubes qui sont au second étage ne touchent qu’un autre cube.
Les 4 cubes qui sont à la « périphérie » du premier étage ne touchent qu’un autre cube.

Restent 12 cubes, dont 6, ceux pointés par une flèche sur la figure (le cube à gauche est complètement caché), touchent exactement 3 autres cubes.



La réponse est 6 cubes.

4 Les cinq jetons

Dans tous les cas, on a intérêt à retourner le « 6 » pour utiliser un « 9 ».

Les produits font intervenir un nombre de un chiffre et un nombre de trois chiffres, ou deux nombres de deux chiffres.
Pour que les produits soient les plus grands possibles, les deux nombres doivent avoir leurs chiffres classés du plus grand au plus petit.

3 x 954 est inférieur à 3 x 1000 = 3000, 4 x 953 est inférieur à 4 x 1000 = 4000, 5 x 943 est inférieur à 5 x 1000 = 5000.
43 x 95 est inférieur à 43 x 100 = 4300.
53 x 94 = 53 x 93 + 53 < 53 x 93 + 93 = 93 x 54 = 5022.

La réponse est 5022.

<u>5 Somme de chiffres</u>

Le chiffre de la troisième ligne ■ est la somme des deux chiffres de la deuxième ligne, ■ et ●. Donc ● vaut 0.

Le nombre de la deuxième ligne vaut 10 x ■.
C'est aussi la somme des chiffres de la première ligne, soit ■ + 2 x ▼.
Donc 9 x ■ = 2 x ▼.
▼ est un chiffre divisible par 9.
Comme un nombre ne commence pas par 0, ▼ vaut 9.

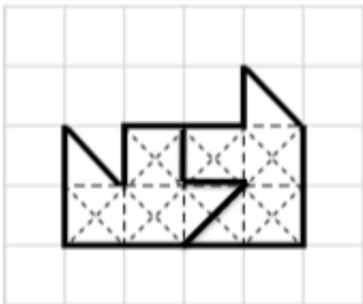
Du coup, ■ vaut 2.

La réponse est 929.

<u>6 Découpage</u>

La surface d'une partie est la moitié de la surface totale, soit l'équivalent de 4 carrés.
Les deux pointes triangulaires ne peuvent pas être dans la même partie (par connexité, la surface de cette partie serait trop grande).

En haut, on a le choix entre 4 positions de départ pour la découpe, dont une seule permet de trouver **la réponse (unique)** :



<u>7 Le club</u>

Les 11 membres qui de sont pas des garçons sont toutes les filles.

S'il y avait au moins 20 garçons, on pourrait constituer un groupe de 20 garçons, sans fille, ce que l'énoncé interdit.
Donc il y a moins de 20 garçons.

On peut constituer un groupe de 20 membres avec tous les garçons et le complément (à 20) de filles.
Comme dans ce groupe il y a au moins 7 filles, il y a au plus 13 garçons.

La réponse est 11 + 13 = **24 membres**.

8 Devine nombre

Le plus grand produit de deux nombres à un chiffre est 9 x 9 = 81.
Du coup, le produit de deux nombres à un chiffre ne peut pas commencer par 9.
Le 9 est forcément à la fin du nombre cherché.

Le seul nombre à deux chiffres, produit de deux nombres à un chiffre, se terminant par 9 est 7 x 7 = 49.

Parmi les nombres à deux chiffres, produits de deux nombres à un chiffre, 7 n'apparaît que dans 3 x 9 = 27 et 8 x 9 = 72.
Comme le 2 ne peut être présent qu'une fois dans le nombre cherché, le 7 doit être au début ou à la fin.
Comme le 9 est déjà à la fin, le 7 est au début.

A ce stade, le nombre cherché est 72…..49.

Le 8 n'apparaît que dans 2 x 9 = 18, 4 x 7 = 28, 6 x 8 = 48 et 9 x 9 = 81.
81 (le seul nombre à deux chiffres commençant par 8) doit apparaître dans le nombre cherché, ce qui exclut 18.
Comme 48 est exclus à cause du 4 (49 apparaît déjà), 28 doit aussi apparaître.

A ce stade, le nombre cherché est 7281…49.

Le seul produit de deux chiffres finissant par 3 est 7 x 9 = 63.
Comme 34 n'est pas le produit de deux chiffres, les … sont dans l'ordre 635.

On vérifie que 16, 35 et 54 sont bien les produits de 2 chiffres (2 x 8, 5 x 7 et 6 x 9).

La réponse (unique) est 728163549.

9 Ni plus ni moins

36% de 75, soit 27 participants, ont réussi au moins 13 problèmes.
Donc 75 - 27 = 48 participants ont réussi moins de 13 problèmes.

84% de 75, soit 63 participants, ont réussi au plus 13 problèmes ;
Donc 63 -48 = 15 participants ont réussi exactement 13 problèmes.

La réponse, unique, est 15 participants.

10 Le vase de Midas

Les pièces d’électrum et d’argent permettent d’obtenir au maximum (5x11) + (7x3) = 76 drachmes.

177 – 76 = 101.
Comme 5 pièces d’or valent au total 100 drachmes, il faut au moins 6 pièces d’or pour atteindre les 101 drachmes manquant.

Avec 6 pièces d’or, il manque 177 – 120 = 57 drachmes.
Essayons de les trouver parmi nos 5 pièces d’électrum (de 11 drachmes) et nos 7 pièces d’argent (de 3 drachmes), ce qui fait au total 76 drachmes.
Il resterait alors 19 drachmes, montant impossible à obtenir avec des pièces de 11 et 3 drachmes (19 et 19 – 11 = 8 ne sont pas des multiples de 3).

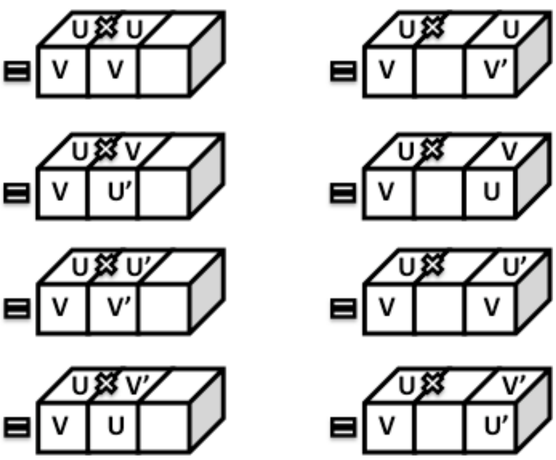
Essayons avec sept pièces d’or.
Il manque 177 – 140 = 37 drachmes.
On les obtient avec 2 pièces d’électrum (de 11 drachmes) et 5 pièces d’argent (de 3 drachmes).
Il reste 3 + 2 = 5 de ces pièces, dont 4 (7 – 3 qu’il a déjà dans sa bourse) que Midas peut bien transformer en or.

La réponse est 4 pièces.

11 Produits sur dés

Les faces en contact sont égales.
Deux faces opposées sont complémentaires à 7.
Les cases en contact, à gauche (cachée) et à droite (gris) portent deux numéros dont le total est 7.
Donc les chiffres de l’opération doivent être choisis (condition α):
- Soit parmi 2, 3, 4 et 5 ;
- Soit parmi 1, 3, 4 et 6 ;
- Soit parmi 1, 2, 5 et 6.

x et x’ représentent deux faces opposées. En utilisant le fait que les dés sont identiques (pas miroirs), on obtient que les situations suivantes sont interdites (condition β) :



On prend la notation A x BC = DEF et on dresse le tableau de F en fonction de A et C.

On élimine les 11 cas où apparaît 0, 8 ou 9, le cas (en bas et à gauche) où C et F sont complémentaires à 7 (faces opposées), les 11 cas où C et F sont identiques :

A \ C	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

On élimine aussi 2 cas (gris foncé) qui ne respectent pas la condition α :

A \ C	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

Dans chaque cas restant, la condition β permet de calculer D :

A \ C	1	2	3	4	5	6
1						
2	6	4				1
3	6			5		
4	6		5	6		1
5	6		4			
6						

On élimine les cas où D est supérieur à 3, car A x BC est inférieur à 5 x 67 = 335.

On élimine le cas 4 x B6 = 1E4, qui donne B = E/4 + 2, puis force E=4 et B=3, impossible car 4 et 3 sont complémentaires à 7 (faces opposées).

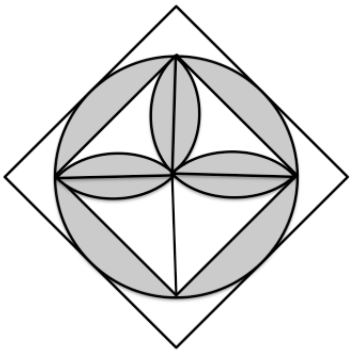
Reste le cas 2 x B6 = 1E2, qui donne B = (E+1)/2 + 4, puis force E=1 (E est à choisir parmi 1, 2, 5 et 6 selon la condition α) et B=5.

Il y a une réponse unique, 2 x 56 = 112, les faces en contact étant 3 et 4 (dans un ordre ou l'autre).

12 La fleur de lis

Considérons le quart de cercle de la figure.

Si le rayon du cercle est r, l'aire du quart de cercle est $\pi r^2/4$, celle du triangle blanc $r^2/2$, donc celle de la surface en gris $(\pi-2) r^2/4$.



Supposons que le côté du grand carré ait longueur 2.
C'est également le diamètre du grand cercle, son rayon étant ainsi R=1.
On doit ajouter quatre quarts de cercle où R = 1 et six quarts de cercle où $r = 1/\sqrt{2}$.
En effet, la corde du grand quart de cercle est $\sqrt{2}$ fois celle du petit, et les rayons sont proportionnels à ces cordes.

La surface en gris est $(\pi-2)\ ((4 \times 1^2)+(6\times(1/\sqrt{2})^2))\ /\ 4 = 7(\pi-2)/4$.
En proportion de celle du grand carré, 4, elle vaut $7(\pi-2)/16$.

En prenant $\pi=22/7$, on obtient 1/2.
La réponse est 50%.

13 La spirale de Spirou

En commençant la spirale, on voit que la position $1^2=1$ est en (1,0), la $9=3^2$ en (3,0), la $5^2=25$ en (5,0), etc. De même, la position $2^2=4$ est en (0,2), la $4^2=16$ en (0,4), etc.
Après la position $(2N)^2$ en (0,2N), on va vers la droite de 2N, vers le bas de 2N et vers la droite de 1, pour atteindre la position $(2N)^2 + 4N +1 = (2N+1)^2$ en (2N+1,0).
De même, après la position $(2N+1)^2$ en (2N+1,0), on va vers le haut de (2N+1), vers la gauche de (2N+1) et vers le haut de 1, pour atteindre la position $(2N+1)^2 + 4N +3 = (2N+2)^2$ en (0,2N+2).

La position $45^2=2025$ est en (45,0).
On se déplace vers la gauche de 1 à la position 2024 en (44,0).
On se déplace vers le haut de 13 jusqu'à la position 2024 -13 = 2011 en (44,13).

La réponse est (44,13).

14 La vache, le tunnel et le train express

Appelons l la demi longueur du tunnel en mètres.

Le temps que met la vache à rejoindre l'extrémité du tunnel la plus proche du train est :
$(l-5)/v$ où v est la vitesse de la vache.
C'est aussi le temps que met le train à y arriver :
$(l-5)/v = 3000/V$ où V est la vitesse du train.

De même, pour l'autre extrémité :
$(l+5)/v = (3000+2l)/V$.

En divisant membre à membre, on obtient :
$(l-5)/(l+5) = 3000/(3000+2l)$
$3000l + 15000 = 3000l - 15000 + 2l^2 - 10l$.
$30000 = 2l^2 - 10l$.
Soit $15000 = l\ (l-5)$.

l est divisible par 5, $l=5l'$.
$l'\ (l'-1) = 600 = 100 \times 6 = 25 \times 4 \times 6 = 25 \times 24$.
$l' = 25$.

La **réponse** est $2l = 10l'$ = **250 mètres**.

15 Leonardo fait un tour à Triena

Soient a, b et c les longueurs des trois côtés du triangle, avec $a < b < c$.

On a aussi $a > c-b$ grâce à l'inégalité triangulaire.

D'après ce que dit Leonardo, le ratio le plus proche de 1 est a/b ou b/c.
Posons $M = \mathrm{Max}\ (a/b, b/c)$.
On a $M\ (M+1) \geq b/c\ (a/b+1) > b/c\ ((c-b)/b + 1) = 1$.
M étant positif, $M > (\sqrt{5}-1)/2$.

Si $1 < r < (\sqrt{5}+1)/2$, alors le triangle de côtés 1, r et r^2 existe (grâce à l'inégalité triangulaire), est non plat et non isocèle.
Les ratios de deux côtés les plus proches de 1 sont égaux à 1/r, qui peut se rapprocher autant que l'on veut de $(\sqrt{5}-1)/2$.
Donc le nombre magique ne peut pas être plus grand.

Le nombre magique est $(\sqrt{5}-1)/2$, c'est-à-dire l'inverse du nombre d'or.

La réponse est 0,618.

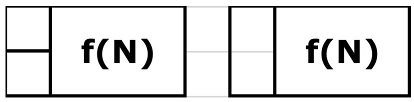
16 Le pavage des cadres

Cherchons la formule f(N).

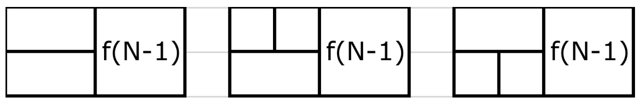
Il y a une façon de paver le rectangle 2x0 : ne rien y mettre.
f(0)=1 ;
f(1) = 2 (deux carrés 1x1 ou un pavé vertical).
f(2) = 7 (figure de l'énoncé).

On cherche par récurrence f(N+1), en raisonnant sur la première séparation verticale de 2 rencontrée à partir de la gauche, à l'endroit i (i va de 1 à N).

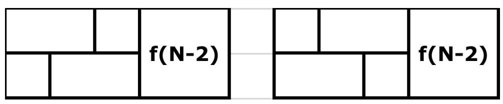
Si i = 1, on a deux (deux carrés ou un rectangle vertical) fois f(N) cas :



Si i = 2, on a trois fois (deux rectangles horizontaux, un seul avec deux carrés en haut ou en bas) f(N-1) :



Si i = 3, on a deux (deux cas seulement, en inversant bas et haut) fois f(N-2) :



Etc. jusqu'à i = N.
Il y a toujours deux cas seulement, en inversant bas et haut, donc deux fois f(N+1-i).

f(N+1) = f(N-1) + 2 $\sum$ [de i=1 à i=N+1] f(N+1-i).

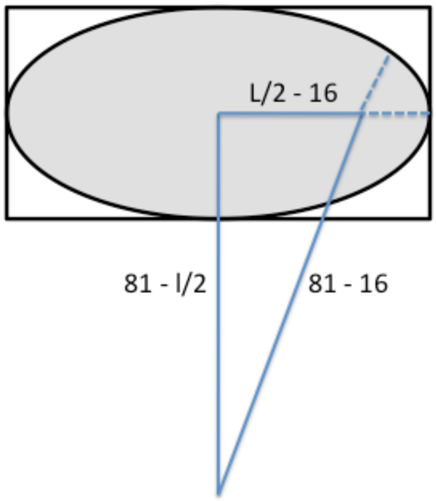
D'où, en considérant également l'expression pour f(N) :
f(N+1) – f(N) = f(N-1) – f(N-2) + 2f(N)
ou f(N+1) = 3f(N) + f(N-1) – f(N-2).

De proche en proche, f(3)=22, f(4)=71, f(5)=228, f(6)=733 et f(7)=2356.

La réponse est 2356.

<u>17 Le champ du Père Ovale</u>

On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle de la figure, de largeur l et de longueur L.



$65^2 = (81\text{-}16)^2 = (81 - l/2)^2 + (L/2\text{-}16)^2$.

Ni l ni L ne peuvent êtres impairs (il resterait 0,25 ou 0,5 dans le membre de droite).

Nous avons affaire à des triplets pythagoriciens.

En utilisant leur description classique, il existe un entier λ, deux entiers premiers entre eux α et β ($\beta<\alpha$) tels que :
$65 = \lambda (\alpha^2 + \beta^2)$
$81 - l/2 = \lambda (\alpha^2 - \beta^2)$ et $L/2\text{-}16 = \lambda\, 2\alpha\beta$ ou bien l'inverse.

$\lambda=1$, $\alpha=8$ et $\beta=1$ donne $81 - l/2 = 63$ et $L/2\text{-}16 = 16$ ou bien l'inverse.

$\lambda=1$, $\alpha=7$ et $\beta=4$ donne $81 - l/2 = 33$ et $L/2\text{-}16 = 56$ ou bien l'inverse.

$\lambda=5$, $\alpha=3$ et $\beta=2$ donne $81 - l/2 = 25$ et $L/2\text{-}16 = 60$ ou bien l'inverse.

$\lambda=13$, $\alpha=2$ et $\beta=1$ donne $81 - l/2 = 39$ et $L/2\text{-}16 = 52$ ou bien l'inverse.

En mètres, dans l'ordre (largeur, longueur), cela donne **8 réponses :**
(36,64), (130,158), (96,144), (50,98), (112,152), (42,82), (84,136) et (58,110).

<u>18 Trois nombres bien choisis</u>

Il convient de passer en revue les cas en fonction des nombres X0Y, en ne retenant que ceux qui ont une décomposition permettant, en la multipliant par 10 (2x5), d'obtenir le produit de 3 nombres de 2 chiffres.

On rappelle que la moyenne arithmétique de trois nombres est supérieure à leur moyenne géométrique (racine cubique de leur produit).

10Y donne une somme supérieure à $3.1000^{1/3}$ soit 30 supérieure à 1Y.

20Y donne une somme supérieure à $3.2000^{1/3}$ soit 37,7… supérieure à 2Y.

30Y donne une somme supérieure à $3.3000^{1/3}$ soit 43,2… supérieure à 3Y.

400 donne 10/10/40 ou 10/16/25 ou 10/20/20, mais leur somme 60 ou 51 ou 50 est différente de 40.
403 donne 10/13/31, mais leur somme 54 est différente de 43.
405 donne 10/15/27 ou 15/15/18, mais leur somme 52 ou 48 est différente de 45.
406 donne 10/14/29, mais leur somme 53 est différente de 46.
407 donne 10/11/37, mais leur somme 58 est différente de 47.
408 donne 10/12/34 ou 10/17/24 ou 12/17/20, dont la somme 56 ou 51 ou 49 est différente de 48, ainsi que <u>15, 16 et 17</u> dont la somme est bien égale à 48.

500 donne 10/10/50 ou 10/20/25, mais leur somme 70 ou 55 est différente de 50.
504 donne 14, 36, 10 ou 14, 15, 24 ou 14, 20, 18 ou 14, 30, 12 ou 21, 10, 24 ou 21, 15, 16 ou 21, 20, 12 ou 28, 10, 18 ou 28, 15, 12 ou 35, 12, 12 ou 42, 10, 12, dont la somme est toujours différente de 54.
506 donne 10/11/46 et 10/22/23, mais leur somme 67 ou 55 est différente de 56.
507 donne 10/13/39 ou 13/13/30, mais leur somme 62 ou 56 est différente de 57.

600 donne 10/24/25 ou 10/15/40 ou 12/20/25 ou 15/16/25 ou 15/20/20, dont la somme est toujours différente de 60, ainsi que <u>10, 20, 30</u> dont la somme est bien égale à 60.
Etc. on ne trouve pas d'autre solution.

Il y a 2 réponses, (10, 20, 30) et (15, 16, 17).