Problema 2

1. Il grafico di f, funzione derivabile in $[-3, 3]$, presenta tre estremanti interni all'intervallo considerato. La sua derivata prima si annulla allora in tre punti. Quindi, nell'ipotesi che $f(x)$ sia esprimibile con un polinomio, la sua derivata $f'(x)$ è al minimo di terzo grado.
   Ne segue che $f(x)$, al minimo, è un polinomio di 4° grado.

2. Dalla definizione di primitiva, segue l'uguaglianza: $g'(x) = f(x)$. Quindi i massimi relativi interni della funzione g vanno ricercati tra gli zeri di f $(x = -2, x = 0, x = 2)$.
   Dal grafico di quest'ultima funzione, si vede che solo il punto $x = 0$ è di massimo relativo interno in quanto in un suo intorno sinistro $g' = f$ è positiva, mentre in un suo intorno destro è negativa. Dal grafico di $f = g'$ si deduce quello di g e si vede, però, che anche il punto di frontiera $x = -3$ è di massimo relativo, in quanto in un suo intorno destro la derivata prima $g' = f$ è negativa.
   Dall'uguaglianza $g'(x) = f(x)$ segue $g''(x) = f'(x)$. La funzione g è convessa (concava verso l'alto) quando g'' è positiva, ovvero quando lo è f', ovvero quando f è crescente: ciò accade negli intervalli $[-3, -1]$ e $[1, 2]$.

3. L'informazione contenuta nel testo relativa all'area della regione C ci permette di dedurre: $\int_0^2 f(x)dx = -3$. Essendo g una primitiva di f, il calcolo dello stesso integrale definito dà:
   $$\int_0^2 f(x)dx = g(2) - g(0) = -3$$
   ovvero:
   $$g(0) = g(2) + 3.$$
   Rimane dunque da calcolare $g(2)$.
   Ripetendo il ragionamento per l'area della regione D, si ottiene:
   $$\int_2^3 f(x)dx = g(3) - g(2) = -1$$
   ovvero:
   $$g(2) = g(3) + 1 = -5 + 1 = -4.$$

In conclusione:

$$g(0) = g(2) + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Per calcolare il limite proposto, che presenta una forma di indecisione $\frac{0}{0}$, usiamo la regola di de l'Hôpital (le cui ipotesi sono soddisfatte):

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2} = \frac{g'(0)}{2} = \frac{f(0)}{2} = 0$$

4. Per calcolare l'integrale definito di h, operiamo la sostituzione $2x + 1 = t$ da cui $2dx = dt$. Con questa sostituzione, gli estremi dell'intervallo di integrazione ($x = -2$, $x = 1$) diventano $t = -3$ e $t = +3$.
   Abbiamo allora:

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \int_{-2}^{1} 3 \cdot f(2x + 1)dx = 3 \cdot \int_{-3}^{3} \frac{1}{2} f(t)dt = \frac{3}{2} \cdot \int_{-3}^{3} f(t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int_{-3}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{3} f(t)dt\right] = \frac{3}{2}[-2 + 3 - 3 - 1] = -\frac{9}{2}$$