

3.2 *La massa elettromagnetica e la struttura dei raggi catodici*

Terminata la discussione del problema della schermatura del campo di una carica elettrica in moto, l'epistolario fa un brusco salto in avanti di quattro anni. Riprende il 4 marzo 1906 con una lettera in cui Righi, questa volta nel ruolo di teorico, propone un'espressione per la massa elettromagnetica.

La questione della massa elettromagnetica fu tra le più dibattute in Fisica alla fine dell'Ottocento. Una carica elettrica in moto equivale ad una corrente variabile; per autoinduzione si crea dunque una forza elettromotrice resistente. Questa inerzia aggiuntiva di origine elettromagnetica veniva detta *massa elettromagnetica*.⁵³ Furono fatti diversi tentativi, sia teorici che sperimentali, per determinare le proprietà della massa elet-

⁵³ Sulla massa elettromagnetica si vedano: R. Becker, *Teoria della elettricità*, traduzione dalla 6^a edizione tedesca, Firenze, Sansoni, 1950, v. 2, § 8; R. P. Feynman, *La fisica di Feynman*, *op. cit.*, v. 2, cap. 28.

tromagnetica. Le ricerche promettevano straordinari sviluppi: si sperava di arrivare a conoscere la distribuzione di carica e le dimensioni dell'elettrone, e soprattutto di collegare l'inerzia all'elettromagnetismo, creando così una teoria unitaria della Fisica. A partire dal 1901, il fisico tedesco Walter Kaufmann (1871-1947) cercò di misurare l'aumento di massa di un fascio di elettroni accelerati; di fatto i suoi esperimenti dimostrarono la variazione relativistica della massa con la velocità.⁵⁴

A noi manca una parte delle lettere che Righi e Levi-Civita si scambiarono su questo argomento, ma quelle che rimangono sono sufficienti per seguire il filo del discorso. Tutto ebbe inizio da un lavoro in cui Righi tentava di calcolare la massa elettromagnetica di un elettrone in moto rettilineo uniforme.⁵⁵ Basandosi su risultati già ottenuti per le espressioni del campo generato da una carica puntiforme in moto uniforme,⁵⁶ Righi eguaglia l'energia cinetica $\frac{1}{2}m_e v^2$ (dove m_e è la massa elettromagnetica) alla differenza $E-E_0$ tra l'energia totale del campo e l'energia a riposo (cioè per $v=0$), ottenendo l'espressione:

$$m_e = \frac{2(E - E_0)}{v^2}$$

che dovrebbe fornire la massa elettromagnetica cercata. Questa teoria ha diversi punti deboli. In particolare, Righi si trova costretto ad escludere una zona sferica attorno all'elettrone per evitare un valore infinito dell'energia del campo. Questo passaggio viene giustificato con ipotesi *ad hoc* sullo stato dell'etere in prossimità dell'elettrone.⁵⁷

Righi chiese il parere di Levi-Civita – ormai diventato l'interlocutore privilegiato per i problemi teorici – in una lettera spedita proba-

⁵⁴ Sugli esperimenti di Kaufmann si veda l'articolo di J. T. Cushing "Electromagnetic mass, relativity, and the Kaufmann experiments", *American Journal of Physics* 49 (1981), p. 1133-1149.

⁵⁵ A. Righi, "Sulla massa elettromagnetica dell'elettrone. Letta nella sessione dell'11 febbraio 1906", *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, (6)3 (1906), p. 189-202. Anche in *Nuovo Cimento*, (5)12 (1906), p. 247-266. Per inciso, è qui che per la prima volta viene citato in Italia l'articolo di Einstein del 1905 con cui nasce la teoria della relatività ristretta.

⁵⁶ A. Righi, "Sui campi elettromagnetici e in particolare su quelli creati da cariche elettriche o da poli magnetici in movimento. Letta nella sessione del 24 febbraio 1901", *op. cit.*

⁵⁷ Queste ipotesi furono criticate da F. Pockels: "Über die elektromagnetische Masse des Elektrons (Bemerkungen zu der Mitteilung des Herrn A. Righi)", *Physikalische Zeitschrift* 8 (1907), p. 393-395. Si veda anche la risposta di Righi: "Über die elektromagnetische Masse des Elektrons (Bemerkungen zu der Mitteilung des Herrn Pockels)", *Physikalische Zeitschrift* 8 (1907), p. 801-802.

bilmente nei primi giorni di marzo del 1906. La risposta di Levi-Civita, del 9 marzo 1906, è comprensibilmente misurata. Mette in evidenza l'arbitrarietà di una generalizzazione del concetto di massa ed osserva che nei calcoli di Righi si mescolano arbitrariamente le ipotesi di un elettrone puntiforme con quelle di un elettrone sferico. Rimanda infine alla teoria di Max Abraham (1875-1922), che aveva immaginato l'elettrone come una sfera rigida in moto quasi stazionario. I risultati di Abraham all'epoca sembravano confermati dagli esperimenti di Kaufmann, ed erano quindi al centro dell'attenzione degli studiosi.

Le critiche di Levi-Civita sono però viziate da un sottile errore. Egli cita un risultato di Abraham che sembra negare la possibilità di sostituire una carica puntiforme a una sfera uniformemente carica nel caso di moto rettilineo uniforme. I campi delle due cariche – afferma Levi-Civita – nel caso dinamico non sono uguali, a differenza di quanto avviene in Elettrostatica. In realtà, l'affermazione è sbagliata: il campo di una sfera uniformemente carica coincide con il campo di una carica puntiforme anche nel caso del moto rettilineo uniforme. La dimostrazione, se si usa la relatività ristretta, è semplicissima: una sfera uniformemente carica ed una carica puntiforme equivalente che si muovano parallelamente di moto rettilineo uniforme creano lo stesso campo nel loro riferimento inerziale; effettuando una trasformazione di Lorentz si trovano i campi nel riferimento del laboratorio, che devono essere anch'essi uguali.

A che cosa si deve l'errore di Levi-Civita? Un esame della letteratura scientifica di quel periodo fa pensare che all'origine di tutto si trovi un calcolo di Abraham,⁵⁸ ripreso in seguito da Lorentz.⁵⁹ Seguiamo l'esposizione di Lorentz. I campi sono determinati dai due potenziali elettrodinamici, che soddisfano equazioni formalmente identiche; limitiamoci dunque a considerare il solo potenziale scalare. Vale la relazione:

⁵⁸ M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*. Bd. 2: *Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, Leipzig, Teubner, 1905; p. 179. Su raccomandazione di Levi-Civita, Abraham ottenne nel 1909 la cattedra di Meccanica razionale al Politecnico di Milano. Su questa vicenda si veda l'articolo di C. Citrini, "Matematica e vita civile nel Politecnico di Milano di cento anni fa: la vicenda di Max Abraham", *Annali di Storia delle Università Italiane* 12 (2008), p. 101-117.

⁵⁹ H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat: A Course of Lectures Delivered in Columbia University, New York, in March and April 1906*, Leipzig, B. G. Teubner, London, David Nutt, 1909, § 26.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho$$

ca. Applichiamo questa formula al caso particolare di un sistema rigido di cariche elettriche in moto rettilineo uniforme di velocità v lungo l'asse x . Effettuando una trasformazione di Galileo:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

per passare al riferimento in cui il sistema è immobile, l'equazione per il potenziale diventa:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\rho.$$

In questa formula le tre derivate parziali non compaiono in modo simmetrico. (È un fatto che avevamo già osservato esaminando la soluzione di Levi-Civita del problema della schermatura di un piano conduttore.) Siamo quindi indotti a una ulteriore semplificazione per mezzo del cambiamento di variabili *puramente formale*:

$$X = x' / \sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

che conduce alla ben nota equazione di Poisson dell'Elettrostatica:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\rho.$$

La risoluzione di questa equazione corrisponde dunque a un problema di Elettrostatica *fittizio*, in cui le dimensioni del sistema nella direzione del moto sono dilatate di un fattore:

$$1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Applicandolo a una sfera e a un punto, otteniamo risultati diversi: nel caso di una sfera, porta a precisare dove si deve trovare il campo elettrico di un ellissoide di rotazione, mentre per un punto non si ha ovviamente nessuna dilatazione. Trucchi matematici a parte, il risultato

finale, basato sulla trasformazione di Galileo della Fisica classica invece che sulla trasformazione di Lorentz, è sbagliato. Si osservi che la composizione delle due trasformazioni avrebbe dato

$$X = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

ovvero una parte delle trasformazioni di Lorentz. Se Abraham e Lorentz avessero prestato più attenzione alle simmetrie, avrebbero potuto trovare qualcosa di importante. Non si tratta semplicemente di una questione di formule, ma di una differenza profonda di principi fisici: in relatività i campi stessi vengono trasformati.

Torniamo alla corrispondenza. Nella risposta alle osservazioni di Levi-Civita (lettera dell'11 marzo 1906) Righi concorda sulla diversità dei campi generati da una sfera e da una carica puntiforme:

[Nella mia nota] avverti già che non è rigoroso adottare l'espressione delle forze [ovvero dei campi] d'una carica puntiforme anche per il caso della sfera. Già lo aveva notato il Lodge in una sua conferenza. Ciò non ostante ho voluto vedere a qual formola si arrivava prendendo l'esatta espressione della energia dovuta al moto invece che quella della energia magnetica.

Qui Righi si riferisce alla traduzione francese, allora recente, di un libro sulla teoria dell'elettrone del fisico sperimentale inglese Oliver Lodge (1851–1940).⁶⁰ Tuttavia, se è vero che Lodge riteneva che i campi di una sfera e di una carica puntiforme in movimento dovessero essere diversi, la sua richiesta nasceva dalla supposizione che il movimento nell'etere dovesse modificare la distribuzione di carica sulla sfera, non da considerazioni generali sulle equazioni dell'Elettrodinamica. Può darsi che Righi non avesse ben capito il significato dell'osservazione troppo concisa di Levi-Civita.

Lo scambio di idee con Righi diede probabilmente a Levi-Civita lo spunto per parlare della massa elettromagnetica in una conferenza che

⁶⁰ O. Lodge, *Sur les électrons*, traduit de l'anglais par E. Nuges et J. Peridier, préface de P. Langevin, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

tenne nel settembre del 1907 al congresso della Società Italiana di Fisica.⁶¹ (Forse vi fu invitato proprio da Righi). L'esposizione di Levi-Civita, diretta ancora una volta a un pubblico di fisici sperimentali, contiene pochissime formule. La trattazione appare un po' datata anche per la sua epoca: nel 1907 la relatività ristretta aveva ormai due anni di vita ed erano già apparsi i lavori di Planck che fondavano la dinamica relativistica, ma di tutto ciò non c'è quasi traccia nel lavoro. Il nome di Einstein compare brevemente in una nota a piè di pagina (forse in seguito alla citazione precedente da parte di Righi).

Grazie ai suoi interessi sull'Elettromagnetismo, il matematico Levi-Civita divenne comunque un ospite ricorrente dei convegni italiani di Fisica. Due anni dopo lo scambio di lettere sulla massa elettromagnetica, Righi scrisse a Levi-Civita per proporgli di presentare una comunicazione al Congresso del 1909 della Società Italiana di Fisica (lettera del 2 febbraio 1909). Levi-Civita rispose proponendo una relazione sulla propria *"teoria asintotica delle radiazioni elettriche, di cui ho comunicato il criterio direttivo alla Accademia dei Lincei pochi giorni orsono"*.⁶² Vi si ipotizzava che i raggi catodici e i raggi β emanati dalle sostanze radioattive non fossero altro che un fluido di pura elettricità priva di massa. Per quanto oggi quest'idea appaia bizzarra, all'epoca poteva sembrare ragionevole. Abraham, per esempio, aveva ipotizzato che i raggi catodici fossero formati da particelle aventi un'inerzia puramente elettromagnetica. Sulle proprietà di queste particelle si facevano poi le ipotesi più disparate. Levi-Civita propose di evitare queste costruzioni artificiali osservando che, per la piccola dimensione degli elettroni, fosse ragionevole assumere in prima approssimazione un flusso continuo di elettricità. L'ipotesi poteva essere controllata sperimentalmente, facendo passare i raggi catodici attraverso un campo magnetico: per un flusso continuo la deviazione sarebbe stata proporzionale alla corrente mentre, nel caso di particelle distinte, la deviazione sarebbe stata la

⁶¹ T. Levi-Civita, "Sulla massa elettromagnetica", *Nuovo Cimento* (5) 14 (1907), p. 387-412; anche in *Rivista di scienze*, 2 (1907), p. 387-412; in *Opere* II, p. 587-613.

⁶² T. Levi-Civita, "Teoria asintotica delle radiazioni elettriche", *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (59) 18 (1909), p. 41-50, in *Opere* III, p. 81-92. La sua conferenza al Congresso dei Fisici aveva per titolo "Sulla costituzione delle radiazioni elettriche" e fu pubblicata sul *Nuovo Cimento* (5) 18 (1909), p. 163-169, in *Opere* III, p. 129-134.

medesima per ogni particella e indipendente dal loro numero. Nel suo discorso al Congresso, Levi-Civita chiese dunque ai fisici di preparare un esperimento in cui si facesse variare l'intensità di una corrente catodica che attraversava un campo magnetico. Più in generale, propose di intensificare le ricerche sui raggi catodici in modo da chiarire i risultati di Kaufmann. Alla comunicazione di Levi-Civita rispose quasi subito il fisico Orso Mario Corbino (1876-1937), spiegando in una lettera i motivi per cui era più ragionevole supporre che i raggi catodici fossero un fascio di particelle.⁶³

⁶³ Lettera di Corbino a Levi-Civita del 12 settembre 1909; in Fondo Levi-Civita, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma.