

## I contributi in Analisi

Nei primi 10-20 anni della sua produzione scientifica, è l'Analisi l'interesse prevalente di Peano. Si era laureato nel 1880 e subito era diventato assistente di Enrico D'Ovidio e successivamente di Angelo Genocchi, che ricopriva la cattedra di Calcolo infinitesimale. I ricorrenti problemi di salute dell'ormai anziano Genocchi gli avevano comunque dato presto la responsabilità del corso di Calcolo. Nasce così, nel 1884, il volume *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte del Dr. Peano*. Arrivano anche i primi brillanti risultati originali.

La prima Nota che vogliamo ricordare precede addirittura di un anno la pubblicazione del "Genocchi-Peano". Si tratta di *Sull'integrabilità Delle funzioni*. Peano ripete la costruzione che porta alla definizione (secondo Riemann) di integrale definito di una funzione limitata su un intervallo limitato, mosso da un'esplicita esigenza di rigore e di maggiore precisione: *"l'esistenza dell'integrale delle funzioni di una variabile non è dimostrata sempre con rigore e semplicità desiderabili in tali questioni. Invero spesso si ricorre a considerazioni geometriche; ma parmi che il modo di ragionare dei principali trattatisti non sia soddisfacente. (...) si suol considerare l'area della figura senza definirla; e parmi che l'area, considerata come quantità d'una figura piana curvilinea, sia appunto una di quelle grandezze geometriche, che, come la lunghezza di un arco di curva, ecc., spesso la nostra mente concepisce, o crede concepire chiaramente, ma che hanno bisogno prima d'essere introdotte in analisi, d'essere ben definite"*.

Anziché definire l'integrale come il limite delle cosiddette somme integrali, quando esiste al tendere dell'ampiezza degli "intervallini" a zero, lo introduce come l'estremo superiore delle somme inferiori o come l'estremo inferiore delle somme superiori, quando questi due estremi coincidono. È una novità rispetto alle trattazioni precedenti. Ma è anche una novità sui cui vantaggi Peano tornerà spesso. Nelle "Annotazioni" al trattato di Calcolo del 1884, ad esempio, scrive: *"questa definizione dell'integrale definito è equivalente a quella data da Riemann (...); ma il considerare l'integrale definito come il limite inferiore di certe somme e limite superiore di altre, pare alquanto più semplice che il considerare l'integrale come il limite verso cui tende una somma"*.

Nel 1886 è la volta di *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*. Si tratta uno dei contributi più celebrati di Peano, con la dimostrazione del teorema di esistenza delle soluzioni dell'equazione differenziale  $y'=f(x,y)$ . Peano fa chiarezza sulle ipotesi che servono a dimostrare l'esistenza e su quelle invece sufficienti per l'unicità della soluzioni del cosiddetto *problema di Cauchy*. Dimostra, in particolare, che per l'esistenza non occorre avanzare ipotesi sulla derivata della funzione  $f$  o sul comportamento dei suoi rapporti incrementali, ma è sufficiente richiedere che  $f$  sia continua.

La Nota del 1886 sarà seguita da *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* (1887; la versione francese è del 1888) dove Peano presenta il "metodo delle approssimazioni successive" che ora è comunemente ricordato come *metodo di Peano-Picard*.

Sempre alle equazioni differenziali lineari è dedicata la Nota *Sur les wronskiens* del 1889. *"La proposition que je contest"* è quella per cui l'annullamento del determinante wronskiano costituirebbe una condizione necessaria e sufficiente perché  $n$  funzioni siano linearmente dipendenti. In generale, il teorema è falso. O meglio: se  $n$  funzioni sono linearmente dipendenti, allora il loro wronskiano (il determinante della matrice costituita dalle  $n$  funzioni e dalle loro derivate, fino a quelle di ordine  $n-1$ ) è sempre nullo, ma il viceversa non vale. Può benissimo darsi che il wronskiano sia identicamente nullo in un intervallo, senza che le funzioni in questione risultino linearmente dipendenti. Il contro esempio di Peano è molto semplice:

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x|x| \quad x \in [-1, 1].$$

Anche in questo caso lo studio verrà ripreso nella Nota *Sul determinante wronskiano* (1892), dove la precedente condizione necessaria e sufficiente viene enunciata correttamente (e dimostrata) con l'aggiunta di un'opportuna ipotesi.

*Una nouvelle forme des reste dans la formule de Taylor* (1889) presenta, con il suo *Teorema II*, quello che oggi è comunemente chiamato *resto di Peano* nella formula di Taylor relativa allo sviluppo di una funzione di una variabile. Sulla questione, Peano interviene ancora nel 1891, con il lavoro *Sulla formula di Taylor*. È qui che introduce le “sue” derivate che, per la loro maggiore generalità rispetto a quelle ordinarie, hanno dato luogo a tutta una serie di studi per l'estensione delle usuali proprietà del calcolo e delle regole di ottimizzazione e la ricerca delle condizioni sufficienti che permettono di dedurre l'esistenza delle derivate ordinarie da quelle di Peano. L'analisi di Peano parte, appunto, dalla formula di Taylor “*indipendentemente dalla convergenza delle serie*” delle potenze. È in questo contesto, considerando l'uguaglianza:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_n \cdot h^n + o(h^n)$$

dove l'ultimo termine rappresenta un infinitesimo di ordine superiore a  $h^n$  per  $h \rightarrow 0$ , che possiamo definire la quantità  $a_n n!$  come la derivata  $n$ -esima di  $f$  nel punto  $x_0$  secondo Peano. È chiaro che, se  $f$  è derivabile (in senso ordinario), allora ammette anche le derivate di Peano. Ma il viceversa non vale o, meglio, vale solo per i primi ordini. Se  $f$  è continua,  $a_0$  assegna il valore  $f(x_0)$  della funzione nel punto. Sotto la stessa ipotesi,  $a_1$  esprime la derivata prima  $f'(x_0)$ . Di più non è possibile affermare: già a livello di derivata seconda, non è detto che implichi l'esistenza di  $f''(x_0)$  né che si abbia  $a_2 = f''(x_0)/2!$ . Basta considerare la funzione  $f$  che vale 0, se  $x$  è razionale, e assume invece il valore  $x^3$  quando è irrazionale: la sua derivata prima (nulla nell'origine) non esiste invece negli altri punti e non permette quindi il calcolo di  $f''(0)$ ; risulta invece  $f(x) = o(x^2)$  da cui deduciamo  $a_1 = a_2 = 0$ .

È del 1890 l'articolo *Sulla definizione dell'area di una superficie* in cui critica e corregge l'ordinaria definizione di area di una superficie non piana con una impostazione che sarà alla base – quasi 40 anni dopo – degli studi sull'argomento da parte del giovane Renato Caccioppoli.

Nell'ultimo decennio del secolo, l'interesse per l'Analisi – che pure continua ad essere prevalente – si accompagna comunque ad altri progetti e ad altre “curiosità”. I contributi originali, che spesso sono rimasti nella storia della Matematica, cominciano ad assumere una scansione più lenta.

Possiamo ancora citare *Sur la définition de la dérivée* del 1892, che è il risultato di una polemica con il collega Philip Gilbert dell'Università di Lovanio.

Peano confronta l'usuale definizione di derivata (di una funzione di una variabile reale) con quella in cui si considera il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

quando entrambi,  $x$  e  $y$ , tendono al punto  $x_0$  in cui si vuole calcolare la derivata. Dimostra che le due definizioni non coincidono e che la prima – quella ordinaria – implica la seconda se la derivata è supposta continua. Alcune interessanti osservazioni sulla nozione di gradiente di una funzione reale di  $n$  variabili reali si trovano, invece, nelle precedenti *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1888) con un “pionieristico” suo utilizzo nella ricerca dei punti di massimo o di minimo in un insieme non aperto.

Nello stesso anno, viene pubblicata la Nota *Sulla definizione del limite di una funzione*.

Sull'argomento – le definizioni di *limite* e di *valore limite* – Peano tornerà anche in altri momenti, con la Nota *Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique* (1894), seguita ancora da *Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti* dello stesso anno e da *Sulla definizione di limite* del 1913.

È Peano che valorizza, per così dire, la definizione di Cauchy di *valore limite* e “impone” questo termine (e quello di *classe limite*) almeno nella letteratura italiana. Il suo obiettivo cogliere le differenze tra due concetti che pure si presentano legati l’uno all’altro: le due definizioni “*sono simili, come si vede, perché constano delle stesse parole diversamente disposte, ma non sono identiche*”. Il limite di una funzione, per  $x$  tendente ad un certo punto di accumulazione del suo dominio, può anche non esistere; se però esiste, è unico. La classe limite – l’insieme dei valori limite – è invece sempre diversa dall’insieme vuoto. Si riduce ad un unico elemento qualora esista il limite, ma può anche coincidere con tutto un intervallo o, addirittura, con l’estensione compatta di  $R$ . Gli esempi forniti, a questo proposito, da Peano sono diventati dei veri e propri “classici” in molti manuali di Analisi del ’900:  $f(x) = \sin x$  che ammette come classe limite, per  $x \rightarrow \infty$ , l’intervallo  $[-1, 1]$  e  $f(x) = x \sin x$  la cui classe limite è data da tutto l’intervallo  $[-\infty, +\infty]$ . Le ultime Note citate vedono una consistente presenza della Logica e del suo linguaggio. L’attenzione specifica per l’Analisi tende a diminuire. Nell’ambito ora citato a proposito del concetto di limite, del 1894, si legge: “*nous ferons usage, dans cette étude de la logique mathématique*”. Gli anni successivi si incaricheranno di confermare come questo sia ormai l’interesse emergente di Peano.