

UN EQUIVOCO DI SOLDNER NELL'INTERPRETAZIONE DELLA DEVIAZIONE GRAVITAZIONALE DELLA LUCE



JOHANN VON SOLDNER (IMMAGINE DI PUBBLICO DOMINIO, TRATTA DA WIKIPEDIA.ORG)

di Ledo Stefanini

Una necessaria premessa
Nel novembre del 1919 Arthur Eddington e i suoi collaboratori presentarono in un'assemblea congiunta della *Royal Society* e della *Royal Astronomical Society* i risultati relativi alla deviazione gravitazionale della luce, prevista dalla teoria generale della relatività, ottenuti tramite le osservazioni compiute durante l'eclissi solare del 29 maggio precedente [1].
Quando la notizia della conferma sperimentale della previsione di Einstein giunse in Germania, anche sull'onda del clamore che i giornali di tutto il mondo avevano suscitato, le reazioni furono di tipo diverso e talvolta dettate da motivazioni nazionalistiche o da pregiudizio razziale. Fra i più accesi avversari dell'ebreo Einstein (e degli ebrei in generale) si segnalò Philipp Lenard, premio Nobel per la Fisica del 1905, che già aveva duramente contestato il premio Nobel assegnato a Röntgen nel 1901. Allo scopo di dimostrare che non apparteneva ad Einstein la priorità della scoperta della deviazione gravitazionale della luce, Lenard pubblicò sugli *Annalen der Physik* del 1921 un lavoro che

Ledo Stefanini ✉
Università di Pavia
ledoste@unipv.it



Laureato in Fisica e in Astronomia presso l'Università di Bologna, è autore di alcune decine di pubblicazioni su riviste nazionali (*Giornale di Fisica*, *La Fisica nella Scuola*) e internazionali (*American Journal of Physics*, *European Journal of Physics*). Il suo campo di interesse è prevalentemente la storia della Fisica come fenomeno culturale, tema sul quale ha pubblicato diversi saggi. L'ultimo (*Il circolo Pickwick della Fisica*) ha ottenuto favorevoli recensioni sulle maggiori riviste scientifiche. Ha curato l'edizione critica delle ottocentesche biografie di Galileo scritte da Guglielmo Libri e François Arago e scritto un saggio storico sulla vicenda dei documenti apocriefi di Michel Chasles (*Una questione di priorità*, 2015).

Fra storia e memoria

un oscuro astronomo tedesco, Johann von Soldner, aveva scritto un secolo prima per gli *Annali* dell'osservatorio di Berlino. Naturalmente, le due deduzioni non sono confrontabili, in quanto appartengono a due teorie "incommensurabili" – la gravitazione e la teoria corpuscolare di Newton da una parte e la relatività generale dall'altra – ma viene spesso enfatizzato il fatto che i due valori della deviazione sono straordinariamente vicini. In questa revisione del lavoro di Soldner vogliamo mettere in luce il fatto che la deviazione calcolata da Einstein e quella di Soldner si riferiscono a situazioni fisiche del tutto diverse.

Lo scattering gravitazionale classico

Un classico problema di Meccanica analitica è quello della deviazione subita da una particella, proveniente dall'infinito, all'interno del campo gravitazionale di un corpo infinitamente più massiccio [2].

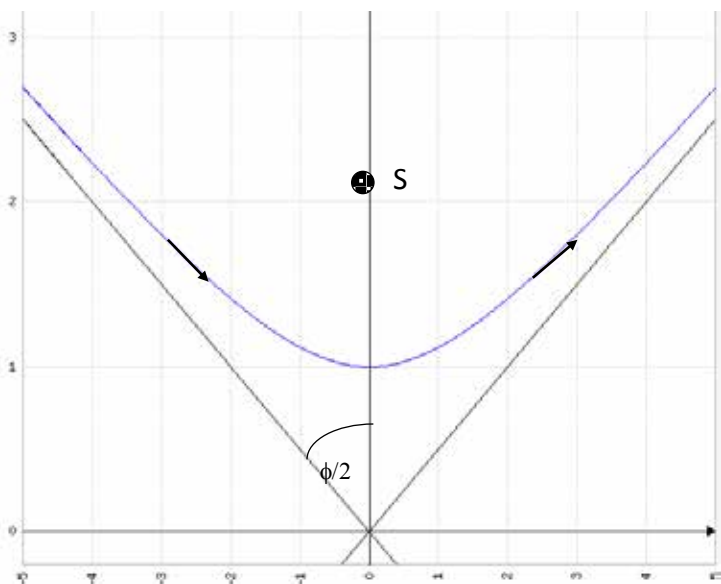


FIG. 1. TRAIETTORIA IPERBOLICA DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE (CORTESIA DELL'AUTORE)

Dai principi classici di conservazione, dalla centralità del campo e con un minimo di calcolo, per la deviazione della particella si ottiene:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = G \frac{M}{v_0^2} \frac{1}{b}, \quad (1)$$

dove M indica la massa del corpo centrale, v_0 la velocità iniziale, G la costante di gravitazione e b il parametro d'urto. La cosa più notevole di questo risultato è che è indipendente dalla massa del corpo che subisce lo *scattering*. Talvolta si preferisce scriverlo nella forma:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = g \frac{R^2}{v_0^2 b}, \quad (2)$$

dove R indica il raggio del corpo centrale e g l'accelerazione di gravità alla sua superficie. Se poi il parametro d'urto è il raggio stesso del corpo centrale e v_0 la velocità della luce, questa si riduce a:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = g \frac{R}{c^2}. \quad (3)$$

Un risultato che, nell'ambito della Meccanica newtoniana, è basato sul principio di equivalenza tra la massa gravitazionale e quella inerziale.

Lo storico calcolo di Soldner

Il primo ad affrontare in maniera quantitativa il problema della deflessione gravitazionale della luce, concepita come costituita da corpuscoli dotati di massa, fu Johann Georg von Soldner (1776-1833) che in un lavoro del 1801 (ma pubblicato nel 1804) calcolò la deviazione di un raggio luminoso in un campo gravitazionale [3]. Facendo riferimento alla fig. 2, il fine di Soldner era di determinare la deviazione subita dai raggi di luce che giungono all'osservatore terrestre in direzione orizzontale, una deviazione che si dovrebbe aggiungere a quella dovuta alla rifrazione atmosferica che consente di ricevere luce da un astro anche quando è al di sotto dell'orizzonte. Nella sua Memoria, basata sul modello corpuscolare della luce, Soldner assume che, in conseguenza dell'attrazione gravitazionale, ogni granello subisce un'accelerazione radiale:

$$a = 2g_s \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (4)$$

dove g_s indica l'accelerazione gravitazionale sulla superficie della Terra ed R il suo raggio. A questo proposito non sarà inutile osservare che la g_s di Soldner non indica quella che attualmente è nota come "accelerazione di gravità", ma la distanza percorsa da un grave nel primo secondo di caduta libera [4], cioè la sua metà.

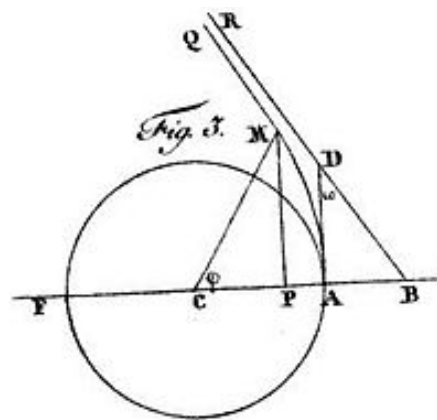


FIG. 2. ILLUSTRAZIONE TRATTA DALLA MEMORIA DI SOLDNER DEL 1804 (CORTESIA DELL'AUTORE)

Con riferimento ad una coppia di assi cartesiani scelti in modo opportuno in relazione alle simmetrie, da questa seguono le equazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2g_s \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \varphi, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2g_s \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \varphi \quad (5)$$

che, per un corpuscolo radente alla superficie, ammettono la soluzione:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{2}{ap}y^2 = 1 \quad (6)$$

dove:

$$a = \frac{2g_s R}{c^2 - 4g_s R}, \quad p = \frac{c^2}{g_s R} \quad (7)$$

Risulta quindi che la traiettoria del corpuscolo è un ramo di iperbole di asintoti:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p}{2a}}(x+a) \quad (8)$$

Ne segue per il corpuscolo di luce una deviazione:

$$\omega = \frac{2g_s R}{c\sqrt{c^2 - 4g_s R}} \quad (9)$$

che, trascurando $4g_s R$ rispetto a c^2 , si riduce a:

$$\omega = \frac{2g_s R}{c^2} \quad (10)$$

che coincide con la (3), tenuto conto del diverso significato delle costanti gravitazionali.

Il calcolo numerico

Per quanto riguarda il calcolo, Soldner inizia precisando: "Sotto il presupposto che la luce impieghi 564,8 secondi per venire dal Sole alla Terra, troviamo che traversa 15,562085 raggi terrestri in un secondo. Pertanto $v=15,562085$. Se prendiamo la latitudine geografica tale che il quadrato del suo seno sia $1/3$, per il raggio della Terra il valore di 6369514 metri, e per l'accelerazione di gravità 3,66394 m (Traité de Mécanique Céleste par Laplace, Tome I, pag. 118), allora, espresso in raggi terrestri, $g=0,000000575231$. Uso questi valori, come le misure più recenti e attendibili del raggio della Terra e dell'accelerazione di gravità, senza averli specificamente ricavati dal Traité de Mécanique Céleste" [5].

Cominciamo con l'osservare che la prima parte della proposizione è ricavata quasi verbatim da Laplace: "Sul parallelo per il quale il quadrato del seno della latitudine è $1/3$, lo spazio che la pesantezza fa descrivere in un secondo è, sulla base delle osservazioni della lunghezza del pendolo, uguale a $3^{metri},65548$ " [6].

Un valore che introduce un problema nel problema, perché il valore corretto di quella che oggi si chiama "ac-

celerazione di gravità" si trovava nella terza edizione dei Principia di Newton: "Infatti, la lunghezza di un pendolo, che oscilla con la frequenza di un minuto secondo nella latitudine di Parigi, è di tre piedi parigini e $8\frac{1}{2}$ linee, come osservò Huygens. E l'altezza che un grave in caduta descriverà durante un minuto secondo sta alla metà della lunghezza di questo pendolo nella ragione del quadrato della circonferenza del cerchio al suo diametro (come mostrò ancora Huygens) e perciò è di 15 piedi parigini, 1 pollice, $1\frac{7}{9}$ di linea" [7].

Naturalmente, Newton faceva riferimento all'Horologium oscillatorium di Huygens [8].

Solo che la misura indicata da Newton, corrispondente a 4,9 m, è ben lontana dal valore riportato da Soldner, ricavato da Laplace. Qualche studioso attribuisce gli errori numerici che compaiono nella Memoria di Soldner (correttamente indicati da Lenard nella pubblicazione del 1922) a sviste del tipografo [9], ma questo non basta a chiarire il problema.

Infatti egli conferma tale valore scegliendo di esprimere tale lunghezza in unità di raggio della Terra, ottenendo, coerentemente, $0,575231 \times 10^{-6}$. Va tenuto presente che, quando Soldner scriveva queste parole (1801), erano passati più di 70 anni dalla fondamentale scoperta dell'aberrazione stellare da parte di Bradley, che permetteva di attribuire alla velocità della luce un valore di circa diecimila volte quella della velocità di rivoluzione della Terra o precisamente:

$$c = 3,01 \times 10^8 \frac{m}{s}.$$

Citando Bradley: "This therefore being $20''\frac{2}{3}$, AC will be to AB, that is, the Velocity of Light to the Velocity of the Eye (which in this Case may be supposed the same as the Velocity of the Earth's annual Motion in its Orbit) as 10210 to One, from whence it would follow, that Light moves, or is propagated as far as from the Sun to the Earth in $8' 12''$ " [10].

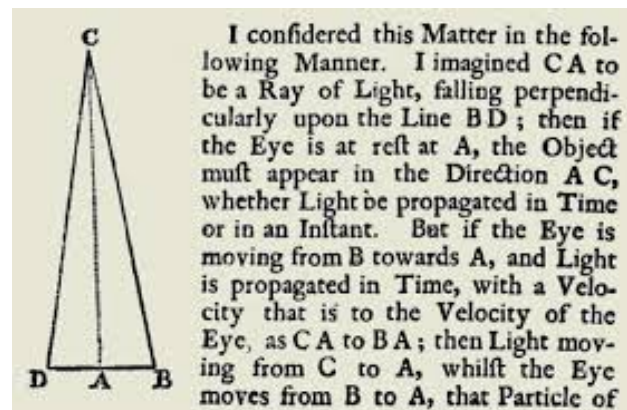
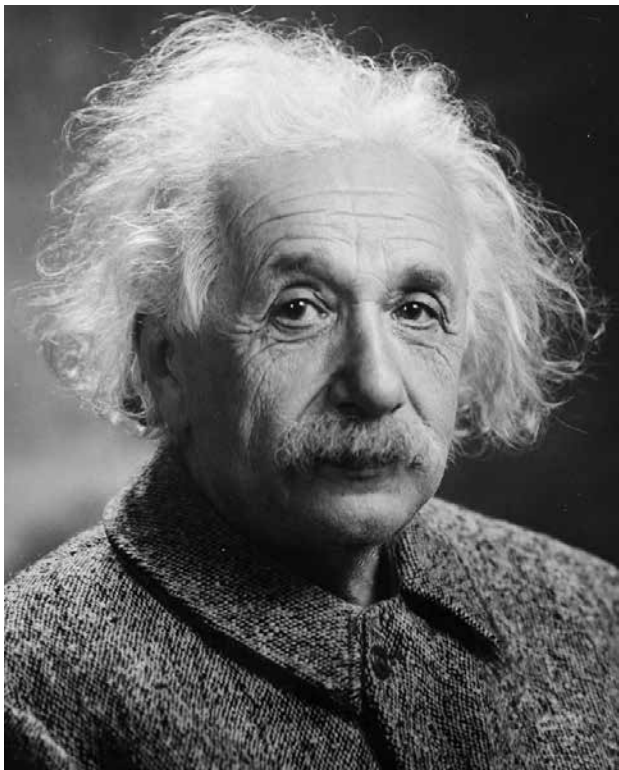


FIG. 3. ILLUSTRAZIONE TRATTA DALLA MEMORIA DI BRADLEY (1727) (CORTESIA DELL'AUTORE)

Fra storia e memoria



ALBERT EINSTEIN (IMMAGINE DI PUBBLICO DOMINIO, TRATTA DA WIKIPEDIA.ORG)

Non possiamo poi evitare di osservare che nella terza edizione dei *Principia* (1726), Newton aveva assunto per l'Unità Astronomica un valore di 19.600 raggi terrestri, pari all'83% del valore reale, e Lacaille, nel 1769, aveva ottenuto un valore di 23.940 raggi, che si distaccava dal valore reale solo del 2,3 %, in eccesso [11].

Pertanto se, seguendo Bradley, si assume una distanza Terra-Sole di 492 secondi-luce, ne discende per la velocità della luce:

$$c = 47 \frac{R}{s},$$

ben diverso dal valore assunto da Soldner ($v = 15,562085$). La deviazione gravitazionale terrestre calcolata da Soldner per i corpuscoli di luce è coerente con i valori prodotti. Inserendo nella (10):

$$g_S = 0,57 \times 10^{-6}, \quad c = 15,56 \frac{R}{s},$$

si perviene a:

$$\omega = 4,84 \times 10^{-9}(\text{rad})$$

ovvero:

$$\omega = 1,0 \times 10^{-3} \text{sec. arco},$$

conforme al risultato prodotto da Soldner. Per contro, la (3) produce:

$$\frac{\varphi}{2} = 0,14 \times 10^3 \text{sec. arco}$$

lontano dal risultato di Soldner di un fattore 10. Se dalla Terra passiamo al Sole, nella (3) è necessario introdurre il valore dell'accelerazione di gravità sulla superficie solare. Secondo Newton, il valore del campo gravitazionale sulla superficie del Sole sta all'omologo sulla superficie terrestre come 10.000 sta a 435 [12], il che è straordinariamente prossimo al valore oggi accettato di 28.

Pertanto, se il corpo centrale è il Sole:

$$g = 2,72 \times 10^2 \frac{m}{s^2} \quad \text{ed} \quad R = 7 \times 10^8 m,$$

la (3) produce:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = 2,12 \times 10^{-6} \quad (11)$$

con una deviazione complessiva:

$$\varphi = 2 \times 2,12 \times 10^{-6} \quad (12)$$

ovvero:

$$\varphi = 2 \times 0,437 \text{ sec. arco}. \quad (13)$$

Ma di questo Soldner non fa parola. Si limita ad osservare che *“se sostituiamo nella formula per $\tan \omega$ l'accelerazione di gravità sulla superficie del Sole, ed assumiamo come unitario il raggio di questo corpo, troviamo $\omega = 0",84"$ [13]. Un risultato sorprendentemente vicino a quello prodotto dalla (3), ma con un significato diverso, in quanto quello ottenuto da Soldner non è la deviazione prodotta dal Sole su una particella di luce che sfiora il Sole, bensì la sua metà. La conclusione di Soldner è molto chiara: *“Se fosse possibile osservare le stelle fisse in prossimità del Sole, allora dovremmo tenere in considerazione questo fenomeno. Comunque, poiché è ben noto che questo è impossibile, allora si potrà trascurare anche la perturbazione introdotta dal Sole. Per i raggi di luce provenienti da Venere (che è stata osservata fino ad una distanza di soli due minuti dal bordo del Sole, [...]) questa [deviazione] è molto minore, a causa del fatto che non è lecito assumere come infinite le distanze di Venere e della Terra dal Sole”* [14].*

Un discorso straordinariamente simile a quello con cui Einstein – più di un secolo dopo – concludeva un suo lavoro del periodo di Praga, dedicato alla deviazione della luce: *“Un raggio di luce che sfiora il Sole dovrebbe subire una deviazione di 4×10^{-6} secondi d'arco. La distanza angolare della stella dal centro del Sole appare aumentata di questa entità. Poiché le stelle fisse nella parte di cielo vicino al Sole sono visibili durante un'eclisse totale di Sole, questa conseguenza della teoria si può confrontare con l'evidenza sperimentale. Con il pianeta Giove la deviazione che ci si può aspettare è circa 1/100 del valore*

indicato. È desiderabile e urgente che gli astronomi si facciano carico della questione qui sollevata, nonostante che le considerazioni sopra presentate possano apparire fondate in maniera insufficiente o, addirittura, azzardate. Poiché, a prescindere da ogni teoria, rimane la questione se sia possibile, con gli strumenti attualmente disponibili, rivelare una qualche influenza dei campi gravitazionali sulla propagazione della luce" [15].

Nonostante l'analogia della conclusione e la coincidenza dei valori calcolati per la deviazione, nel 1911 Albert Einstein non era a conoscenza del lavoro di Soldner. Anzi, l'articolo che questi aveva pubblicato sull'annuario dell'Osservatorio di Berlino rimase sconosciuto alla comunità degli scienziati fino al 1921, quando Philipp Lenard pubblicò l'articolo di Soldner sugli *Annalen der Physik* [16].

Lo scopo di Lenard – che non fece mai mistero delle sue profonde convinzioni antisemitiche, persino dopo la fine della guerra – era quello di togliere al giovane ebreo Einstein il merito della scoperta, in seguito alla clamorosa conferma che ne era venuta dalle osservazioni effettuate dalle spedizioni di Davidson e Eddington durante l'eclissi di Sole del 1919, per conto della *Royal Society*. È stato giustamente sottolineato che, a dispetto dell'apparente coincidenza dei risultati – 0",83 quello di Einstein, 0",84 quello di Soldner – il primo è basato sul principio di equivalenza e su quello di relatività e il secondo sulla Meccanica di Newton e sul modello corpuscolare della luce, trascurando il fatto elementare che, in realtà:

$$\omega(\text{Soldner}) = \frac{1}{2} \varphi. \quad (28)$$

Nel 1911 era ancora in pieno travaglio il processo che avrebbe condotto Einstein alla formulazione della teoria generale della relatività. Quattro anni dopo, basandosi sulla nuova teoria, lo stesso Einstein corresse il suo risultato moltiplicandolo per un fattore 2 [17]. ■

Note

- [1] DYSON F.W., "Joint Eclipse Meeting of the Royal Society and the Royal Astronomical Society", *The Observatory*, Vol. 42, November 1919, pp. 389-398.
- [2] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley P.C., Reading (MA), 1959, pp. 76-79.
- [3] SOLDNER J.G. von, "Ueber die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung", *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, 1804, pp. 161-172
- [4] JAKI S.L., "Johann Georg von Soldner and the Gravitational Bending of Light. With an English translation of his Essay on it published in 1801", *Foundations of Physics* 8 (1978), pp. 927-950.
- [5] SOLDNER J.G. von, *op. cit.*, p. 171.
- [6] LAPLACE P.S., *Traité de Mécanique Céleste*, Tome premier, Paris, an VII (1799), p. 118.
- [7] NEWTON I. (1726), *Principi Matematici di Filosofia Naturale*, a cura di A. Pala, Libro terzo, Proposizione IV, Teorema IV, UTET, Torino (1989).
- [8] HUYGENS H.C., *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum*, Paris (1673), Propositio XXV.
- [9] TREDER H.J., JACKISCH G., "On Soldner's Value of Newtonian Deflection of Light", *Astronomische Nachrichten*, Bd. 302 (1981), H. 6.
- [10] BRADLEY J. (1727), "A Letter from the Reverend Mr. James Bradley, Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F.R.S., to Dr. Edmond Halley Astrono. Reg. &c. living an Account of a new discovered Motion of the Fix'd Stars", *Philosophical Transactions*, vol. 35, No. 399-406, pp. 437-661.
- [11] HUGHES D.W. (2001), "Six stages in the history of the astronomical unit", *Journal of Astronomical History and Heritage*, Vol. 4, No. 1, p. 15-28.
- [12] NEWTON I. (1726), *op.cit.*, Libro terzo, Proposizione VIII, Teorema VIII.
- [13] SOLDNER J.G. von, *op. cit.*, p. 171.
- [14] SOLDNER J.G. von, *ibidem*.
- [15] EINSTEIN A. (1911), "Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes", *Annalen der Physik*, 35, pp. 898-908, "On the influence of Gravitation on the Propagation of Light", in *The Principle of Relativity*, Dover Publications Inc. (1952).
- [16] SOLDNER J.G. von, (LENARD P.): "Über die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht", *Annalen der Physik*, 65, 1921, pp. 593-604.
- [17] EINSTEIN A. (1916), "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Annalen der Physik*, (4), 49, 1916, "I fondamenti della teoria della relatività generale", trad. di A.M. Pratelli, in *Cinquant'anni di Relatività*, Editrice Universitaria, Firenze (1955).

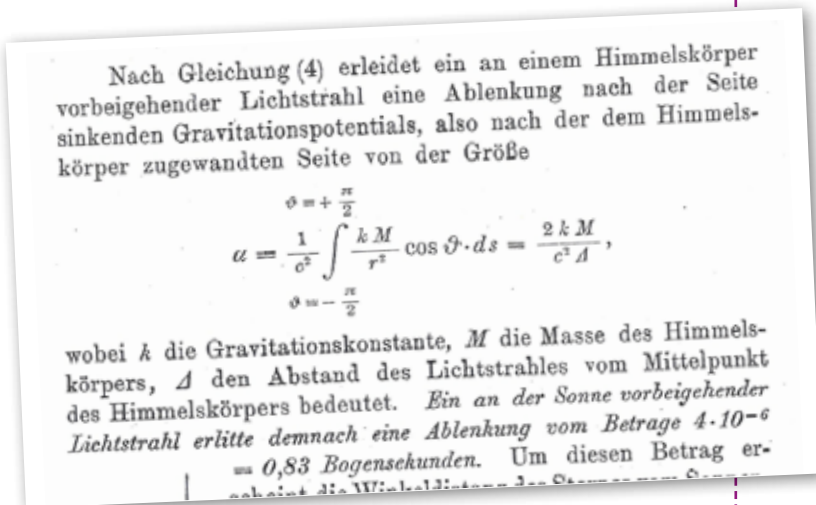


FIG. 4. LA FORMULA DI EINSTEIN DALLA PAGINA CONCLUSIVA DELLA MEMORIA DEL 1911 (CORTESIA DELL'AUTORE)