La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l' universo), ma non si può intendere se prima non s' impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto

(G. Galilei, *Il Saggiatore*, VI, 232).

A quelli che non conoscono la matematica è difficile percepire come una sensazione reale la bellezza, la profonda bellezza della natura ... Se volete conoscere la natura, apprezzarla, è necessario comprendere il linguaggio che essa parla.

(R. Feynman, The Character of Physical Law)

Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere "belle"; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta.

(G.H.Hardy, Apologia di un matematico)

E' il pensiero creativo che distingue maggiormente gli uomini dalle scimmie;
si dovrebbe quindi trattarlo come un bene più prezioso dell'oro e conservarlo con grande attenzione.

(A.R. Hall, Una metodologia per la tecnica dei sistemi)

Un **modello matematico** è un modello costruito usando il linguaggio e gli strumenti della matematica. Come tutti gli altri modelli usati nella scienza, il suo scopo è quello di rappresentare il più possibile fedelmente un determinato oggetto o fenomeno reale. (Da Wikipedia, l'enciclopedia libera)

Operativamente, la modellizzazione matematica è quel processo che consente:

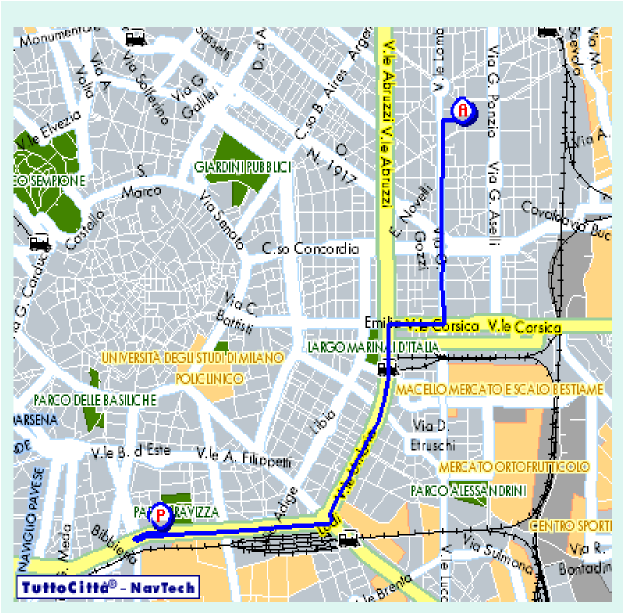
- di selezionare particolari aspetti di una situazione (ad esempio un fenomeno fisico, una situazione in campo economico, un problema di vita quotidiana…..);
- di rappresentarli con il linguaggio della matematica;
- di stabilire delle relazioni di tipo formale tra essi.

Ritroviamo Galileo e il metodo sperimentale….Egli

- formula un'ipotesi iniziale (dopo aver a lungo osservato un fenomeno reale ……);
- introduce una "convenzione linguistica" che descrive le relazioni fra le variabili e i parametri del sistema: il linguaggio matematico
- effettua esperimenti ripetuti con misurazioni delle grandezze fisiche importanti, trascurando gli effetti secondari, per verificare, attraverso l'esperienza, l'attendibilità delle ipotesi formulate e la validità del modello costruito
- sintetizza ed enuncia la legge generale

In virtù dell'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare più fenomeni, anche molto diversi fra loro. Uno stesso modello risolve 1, 2,…..,150,… problemi diversi!

Problemi elementari di ottimizzazione: *dalla geometria analitica alla ricerca operativa*.
PRIMO INCONTRO
Problema 1.
<u>Scelta dell'alloggio</u>

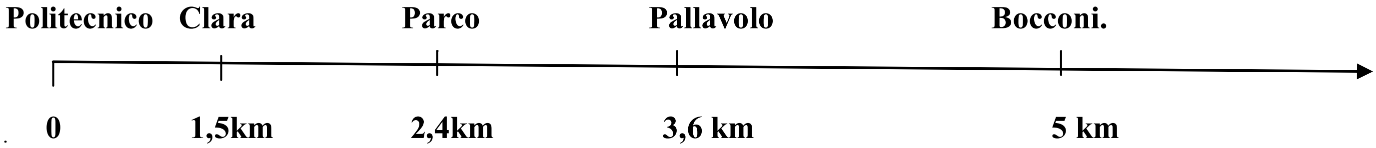


Camilla e Sara sono due sorelle, entrambe studentesse universitarie nella città di Milano ma provenienti dalla Toscana. Camilla ha superato il test per l'Università Bocconi, Sara invece sta già frequentando il Politecnico. La famiglia decide, per non essere sottoposta al raddoppio del prezzo per l'affitto di un'altra stanza in città, di comprare un bilocale in una zona che consenta, ad entrambe le ragazze, di "perdere meno tempo possibile" per gli spostamenti.
Sara il mattino va a lezione e il pomeriggio torna in Facoltà per le esercitazioni. La sera, prima di cena e senza passare da casa, va agli allenamenti di pallavolo e dopocena va a studiare da Clara.
Pranza e cena a casa.
Camilla, occuperà la giornata andando in Facoltà due volte al giorno, ma la mattina prima della colazione, che consumerà a casa, andrà a fare jogging al parco.
In quale zona conviene allora cercare la casa?

Per rappresentare la situazione si consulta una mappa della città di Milano, scala 1:18000 (1 cm = 180 m), e con un righello si possono misurare le distanze: partendo dal Politecnico si ha che Clara dista 1,5 km; il parco 2,4 km; la società di pallavolo 3,6 km e la Bocconi 5 km.
Con queste informazioni costruite il modello.
Un criterio di scelta potrebbe essere quello di ottimizzare il tempo ipotizzando le velocità medie dei mezzi pubblici (tram e autobus) nei vari tragitti.
Dopo aver osservato la mappa della città e aver individuato:

- le Facoltà di entrambe
- la società di pallavolo di Sara
- un parco

consideriamo un sistema di riferimento con origine in una delle due Facoltà e di denotiamo con x la coordinata del punto corrispondente alla casa cercata.
La sintesi delle misurazioni effettuate è la seguente:



Tenuto conto degli spostamenti di Sara, il suo percorso giornaliero tipo sarà il seguente:

	percorso	Lunghezza percorso S(x)
Mattino	casa-Politecnico-casa	$2\lvert x\rvert$
Pomeriggio	casa-Politecnico Politecnico-palestra-casa	$\lvert x\rvert$ $3.6+\lvert x-3.6\rvert$
Sera	casa-Clara-casa	$2\lvert x-1.5\rvert$

Allora la funzione che esprime la lunghezza del percorso giornaliero di Sara è:
S(x)= $2|x|+|x|+3.6+|x-3.6|+2|x-1.5|=3|x|+3.6+|x-3.6|+2|x-1.5|$
Il percorso giornaliero tipo di Camilla sarà invece il seguente:

	percorso	Lunghezza percorso C(x)
mattino	casa-parco-casa casa- Bocconi-casa	$2\|x-2.4\|$ $2\|x-5\|$
pomeriggio	casa- Bocconi-casa	$2\|x-5\|$

In questo caso la funzione che esprime la lunghezza del percorso giornaliero è:

$$C(x)=2|x-2.4|+4|x-5|$$

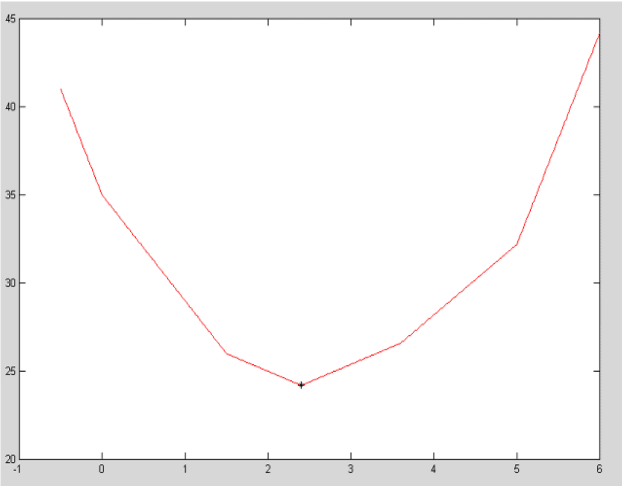
La funzione da ottimizzare è allora la somma delle lunghezze dei percorsi giornalieri di entrambe le ragazze: $L(x) = S(x) + C(x)= 3|x|+3.6+|x-3.6|+2|x-1.5|+2|x-2.4|+4|x-5|$

Volendo disegnarla devi togliere i valori assoluti ottenendo la funzione definita per casi:

$$L(x)=\begin{cases} -3x+3{,}6+(3{,}6-x)+2(1{,}5-x)+2(2{,}4-x)+4(5-x) & x\le 0 \\ 3x+3{,}6+(3{,}6-x)+2(1{,}5-x)+2(2{,}4-x)+4(5-x) & 0<x\le 1{,}5 \\ 3x+3{,}6+(3{,}6-x)+2(x-1{,}5)+2(2{,}4-x)+4(5-x) & 1{,}5<x\le 2{,}4 \\ 3x+3{,}6+(3{,}6-x)+2(x-1{,}5)+2(x-2{,}4)+4(5-x) & 2{,}4<x\le 3{,}6 \\ 3x+3{,}6+(x-3{,}6)+2(x-1{,}5)+2(x-2{,}4)+4(5-x) & 3{,}6<x\le 5 \\ 3x+3{,}6+(x-3{,}6)+2(x-1{,}5)+2(x-2{,}4)+4(x-5) & x>5 \end{cases}$$

Ma forse è meglio farci aiutare da un computer, e con un software adatto, non dobbiamo neanche fare lo sforzo di togliere i valori assoluti!
Il programma con Octave:

```
% sia x la variabile associata alla
posizione della casa;
 x=-0.5:0.01:6;
 y=3*abs(x)+3.6+abs(x-3.6)+
+2*abs(x-1.5)+2*abs(x-2.4)+4*abs(x-5);
 plot(x,y,'r',x(291),y(291),'k*');
```



Dal grafico si può vedere che la funzione L(x) assume il minimo proprio nel punto x=2,4.
Questa soluzione non è però accettabile, in quanto tale coordinata corrisponde alla zona del parco, dove avevamo già visto non avrebbero potuto trovare una casa.
Che cosa fare?
In mancanza di una soluzione esatta si può prendere in considerazione una soluzione approssimata: cercare una casa vicina al parco.

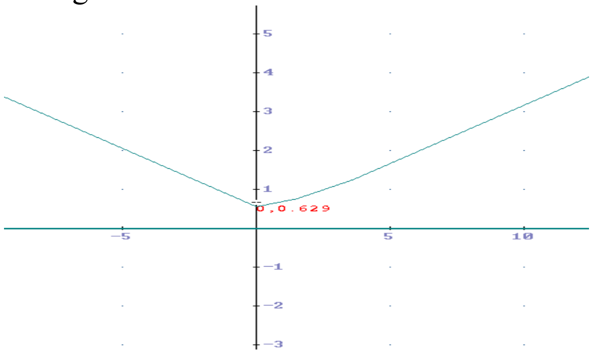
Ma non è detto che la soluzione ottimale sia sempre quella di minimizzare le distanze.
Potrebbe, spesso, essere più conveniente ottimizzare i tempi di percorrenza: ad esempio se si sceglie di spostarsi con la metropolitana, potrebbe essere meglio comprare una casa vicino ad una stazione MM.
Continuiamo a riflettere sul problema.
Un altro criterio: stimare il tempo:

tragitto	ora	v.c. km/h	d. km	t. h
casa-politecnico	8.30	10	$\lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert/10$
politecnico-casa	13.30	15	$\lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert/15$
casa-politecnico	15.00	20	$\lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert/20$
politecnico-palestra	18.30	10	3.06	3.06/10
palestra-casa	21.00	30	$\lvert x-36 \rvert$	$\lvert x-36 \rvert/30$
casa-Clara-casa	23.30	40	$\lvert x-1.5 \rvert$	$\lvert x-1.5 \rvert/40$

La funzione da ottimizzare è allora:

$$t_S(x)= (\lvert x \rvert/10)+ (\lvert x \rvert/15)+ (\lvert x \rvert/20) + (3.06/10) + (\lvert x-36 \rvert/30) + (\lvert x-1.5 \rvert/40)$$

il cui grafico è:



Provare ad interpretare il grafico trovato ed eventualmente a proporre altri modelli….

LAVORO DI GRUPPO n° 1

Cineclub a confronto

Due cineclub praticano le seguenti tariffe: il primo, 10 € di tessera annuale più 4 € a film; il secondo, 20 € di tessera annuale più 3 € a film. Senza entrare nel merito dei film proiettati, stabilire quando è più conveniente l'iscrizione al primo cineclub e quando al secondo.

SUGGERIMENTO

- Indicato con x il n° di film, scrivi le funzioni che esprimono il costo relativo al primo e al secondo cineclub
- Rappresenta le due funzioni in un sistema di riferimento cartesiano
- Osservando il grafico ottenuto valuta quando è più conveniente l'iscrizione al primo cineclub, quando al secondo; calcola, se esiste, un numero di film che rendono uguali i due costi.

Il trasloco

Laura cambia casa e per il trasloco chiede tre preventivi a diverse ditte di trasporti. Le ditte offrono rispettivamente le seguenti condizioni:
Ditta A

- fino a 200 kg di materiale trasportato: tariffa fissa di € 500;
- oltre i 200 kg: tariffa fissa di € 500 + € 1 per ogni kg oltre i 200.

Ditta B

- tariffa fissa di € 425 + € 0,75 per ogni kg (esempio: per trasportare 2 kg la tariffa è 425 + 2x0,75 = 426,5 euro).

Ditta C

- fino a 300 kg di materiale trasportato: tariffa fissa di € 400 + € 1 per ogni kg;
- oltre i 300 kg: tariffa fissa di € 700 + € 0,5 per ogni kg oltre i 300.

Aiuta Laura a capire come scegliere la ditta più conveniente, in base al peso del materiale da trasportare.

SUGGERIMENTO

- Indica con T_A T_B T_C il costo totale (in euro) del trasporto delle tre ditte in funzione del peso trasportato P espresso in kg.
- Rappresenta le tre funzioni in un sistema di riferimento cartesiano
- Calcola le coordinate dei punti di intersezione delle tre funzioni
- Osservando il grafico ottenuto valuta, in base ai vari intervalli di peso quale funzione fornisce il costo minore.

<u>Noleggio automobile</u>

Per il noleggio giornaliero di un'automobile si può scegliere fra tre diverse tariffe:

	quota fissa	importo a km
A	30 €	1.50 €
B	34 €	1.00 €
C	Nessuna*	2.00 €

*La tariffa C ha il vincolo di un minimo di 50 km, ossia la spesa è la stessa anche per percorsi inferiori a 50 km.

Discutere la convenienza delle tre tariffe.

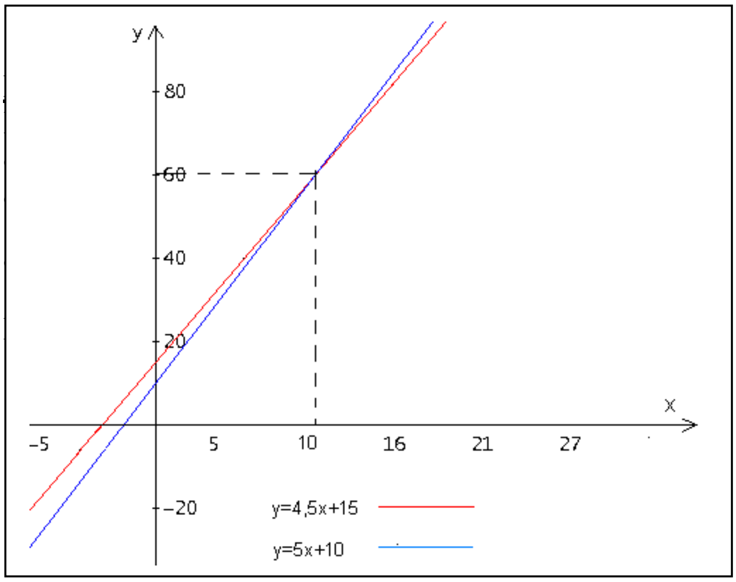
SOLUZIONI

<u>Cineclub a confronto</u>

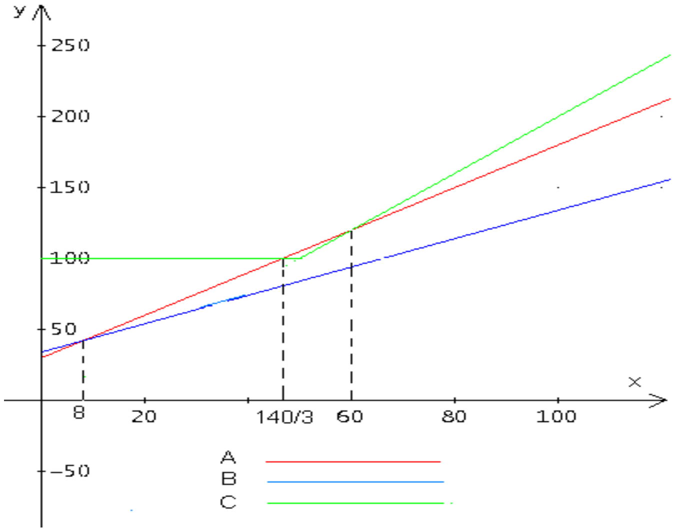
Funzione relativa al costo del 1° cineclub: $f_1(x)= 10+5x$

Funzione relativa al costo del 2° cineclub: $f_2(x)= 15+4,5x$

Sono funzioni lineari, il loro grafico è una retta. Rappresentiamole in un piano cartesiano:



x= 10, ascissa del punto di intersezione delle due rette, è il numero di film che rendono uguali i due costi (60 euro, ordinata dell'intersezione) .
Dal grafico si osserva che se il numero dei film è inferiore a 10 risulta più conveniente il primo cineclub, se superiore il secondo.



x=8 è l'intersezione tra le rette "A" e "B"
x=140/3 e x=60 sono le intersezioni tra la rette "A" e la spezzata "C"
Non c'è intersezione tra "B" e "C"

	Tariffa più conveniente	Ordine di convenienza
0≤x<8	A	A , B, C
x=8	A=B	A=B, C
8<x<140/3	B	B, A, C
x=140/3	B	B, A= C
140<x<60	B	B, C, A
x=60	B	B, A= C
x>60	B	B, A, C

Il trasloco

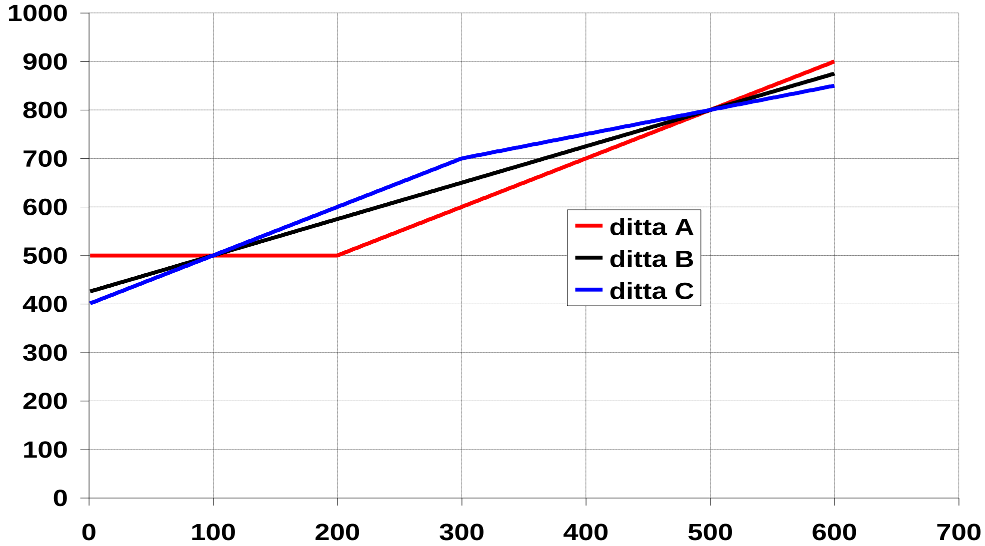
Le tre funzioni che indicano il costo complessivo sono le seguenti

dittaA $$T_A = \begin{cases} 500 & \text{per}\ldots 0 < P \le 200 \\ 500 + 1 * (P - 200) & \text{per}\ldots P > 200 \end{cases}$$

dittaB $$T_B = 425 + 0{,}75 * P$$

dittaC $$T_C = \begin{cases} 400 + 1 * P & \text{per}\ldots 0 < P \le 300 \\ 700 + 0{,}5 * (P - 300) & \text{per}\ldots P > 300 \end{cases}$$

Il grafico corretto è il seguente:



	Ditta più conveniente	Ordine di convenienza
$0 \le X < 100$	C	C, B, A
$X=100$	A=B=C	A=B=C
$100 < X < 500$	A	A, B, C
$X=500$	A=B=C	A=B=C
$X>500$	C	C, B, A

SECONDO INCONTRO

Problema 1

Le distanze pesate

In Val di Sole ci sono otto paesi, che vediamo sulla cartina: Pejo, Cogolo, Fucine, Pellizzano, Mezzana, Dimaro, Monclassico e Malè. In ciascun paese vivono bambini/ragazzi in età scolare (dalla prima elementare alla terza media), il problema che si pone è: dove costruire la scuola affinché siano ottimizzati i percorsi (distanza casa-scuola) per ciascun utente?

Si consulta una cartina stradale della zona, scala 1: 180 000, e si decide di calcolare le distanze dopo aver fissato l'origine nel paese di Pejo.

La prima cosa da fare è raccogliere quei dati sul territorio che si ritengono utili al fine di trovar la soluzione ottimale che accontenti tutti (o il maggior numero di utenti!)

I dati raccolti sono sintetizzati nella seguente tabella:

paese	**n°studenti**	**km**	**hlm**	**vm**
Pejo	9	0	1300	
Cogolo	11	3	1160	20
Fucine	22	9	925	
Pellizzano	13	13,2	930	40
Mezzana	25	18	940	
Dimaro	12	20,5	767	40
Monclassico	17	23	730	
Malè	28	26,5	738	40

In quale paese conviene costruire la scuola?

E' meglio minimizzare le distanze o i tempi di percorrenza?

La funzione obiettivo che si vuol minimizzare, in questo problema, è la somma di tutti gli spostamenti della popolazione scolastica in funzione della ipotetica posizione x della scuola: S(x).

Percorso di ogni studente di:	Percorso degli studenti:
Pejo $2\|x\|$	$2 \cdot 9 \cdot \|x\|$
Cogolo $2\|x-3\|$	$2 \cdot 11 \cdot \|x-3\|$

Fucine $2\lvert x-9\rvert$	$2\cdot 22\cdot \lvert x-9\rvert$
Pellizzano $2\lvert x-13{,}2\rvert$	$2\cdot 13\cdot \lvert x-13{,}2\rvert$
Mezzana $2\lvert x-18\rvert$	$2\cdot 25\cdot \lvert x-18\rvert$
Dimaro $2\lvert x-20{,}5\rvert$	$2\cdot 12\cdot \lvert x-20{,}5\rvert$
Monclassico $2\lvert x-23\rvert$	$2\cdot 17\cdot \lvert x-23\rvert$
Malè $2\lvert x-26{,}5\rvert$	$2\cdot 28\cdot \lvert x-26{,}5\rvert$

Allora

S(x) = $2\cdot 9\cdot \lvert x\rvert + 2\cdot 11\cdot \lvert x-3\rvert + 2\cdot 22\cdot \lvert x-9\rvert + 2\cdot 13\cdot \lvert x-13{,}2\rvert + 2\cdot 25\cdot \lvert x-18\rvert + + 2\cdot 12\cdot \lvert x-20{,}5\rvert + 2\cdot 17\cdot$ $\lvert x-23\rvert + 2\cdot 28\cdot \lvert x-26{,}5\rvert$ si escludono ovviamente i valori x > 26,5 e x < 0 e semplificata diventa:

S(x) = $18\,(x) + 22\lvert x-3\rvert + 44\lvert x-9\rvert + 26\lvert x-13{,}2\rvert + 50\lvert x-18\rvert + 24\lvert x-20{,}5\rvert + 34\lvert x-23\rvert + 56\,(26{,}5-x)$

[osservazione: in questo problema ritroviamo il concetto di distanza espressa come valore assoluto e quindi

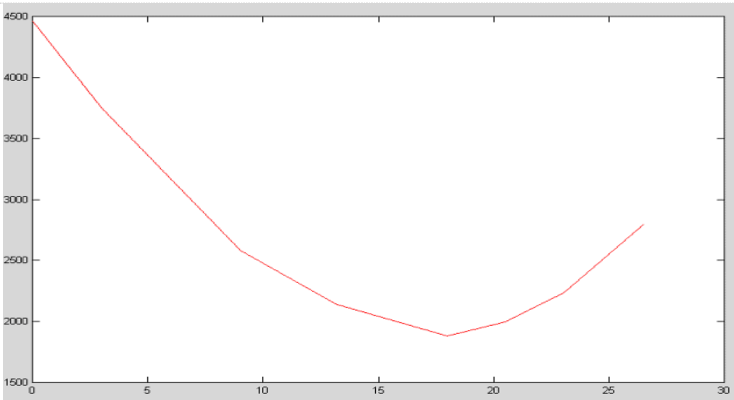
$$
S(x)=\begin{cases}
18x + 22(3 - x) + 44(9 - x) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 0 < x < 3 \\
18x + 22(x - 3) + 44(9 - x) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 3 < x < 9 \\
18x + 22(x - 3) + 44(x - 9) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 9 < x < 13{,}2 \\
18x + 22(x - 3) + 44(x - 9) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 13{,}2 < x < 18 \\
18x + 22(x - 3) + 44(x - 9) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 18 < x < 20{,}5 \\
18x + 22(x - 3) + 44(x - 9) + 26(13{,}2 - x) + 50(18 - x) + 24(20{,}5 - x) + 34(23 - x) + 56(26{,}5 - x) & 20{,}5 < x < 23
\end{cases}
$$

Per disegnare il grafico si utilizzano Derive o Octave.

Programma con Octave:

```
% x variabile associata alla posizione
della scuola;
x=0:0.01:26.5;
y=18*abs(x)+22*abs(x-3)+44*abs(x-
9)+26*abs(x-13.2)+
50*abs(x-18)+24*abs(x-
20.5)+34*abs(x-23)+56*abs(x-26.5);
plot(x,y,'r')
```

Il grafico è:



Dal grafico si vede che il minimo della funzione S(x) è in corrispondenza del paese Mezzana.
Nell'ipotesi che si decida di costruire la scuola proprio a Mezzana, proviamo a vedere se la scelta è davvero la migliore possibile. Ad esempio si potrebbe indagare anche sul tempo impiegato dagli studenti a raggiungere l'eventuale scuola. Se oltre a minimizzare la somma delle distanze, costruendo la scuola a Mezzana, si riducesse al minimo anche il disagio dovuto al tempo di percorrenza…..
Nella tabella, nella quale abbiamo raccolto le informazioni, sono riportate le velocità medie impiegate dall'autobus o da un'auto a percorrere la strada che collega i vari paesi.
Raccogliamo i dati:
Pejo - Mezzana: 20 km/h
Cogolo - Mezzana: 20 km/h
Fucine - Mezzana: 40 km/h

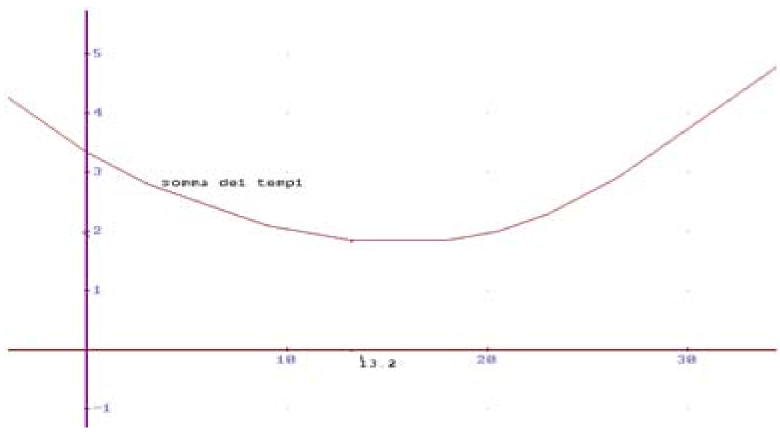
Pellizzano - Mezzana: 40 km/h
Dimaro - Mezzana: 40 km/h
Monclassico - Mezzana: 40 km/h
Malè - Mezzana: 40 km/h

Nell'ipotesi che tutti percorrano i rispettivi tragitti con la velocità media di circa 34 km/h (in alcuni tratti la velocità diminuisce a causa della pendenza e del numero di curve, ma nel piano la provinciale è molto trafficata e piena di semafori!), quindi con <u>velocità costante</u>, i tempi di percorrenza saranno proporzionali alle distanze percorse.

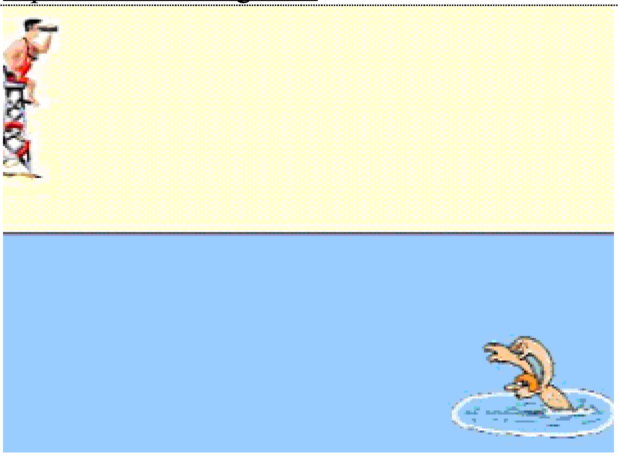
paese	**d (km)**	**vm(km/h)**	**t=d/vm (min)**
Pejo	$\|x\|$	34	$\|x\|/34$
Cogolo	$\|x-3\|$	34	$\|x-3\|/34$
Fucine	$\|x-9\|$	34	$\|x-9\|/34$
Pellizzano	$\|x-13{,}2\|$	34	$\|x-13{,}2\|/34$
Mezzana	$\|x-18\|$	34	$\|x-18\|/34$
Dimaro	$\|x-20{,}5\|$	34	$\|x-20{,}5\|/34$
Monclassico	$\|x-23\|$	34	$\|x-23\|/34$
Malè	$\|x-26{,}5\|$	34	$\|x-26{,}5\|/34$

Ci proponiamo di minimizzare la funzione somma dei tempi utilizzando Derive o Octave.
Con Octave:

```
 %x variabile distanza;
 x=0:1:26.5;
 y1=abs(x)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Pejo;
 y2=abs(x-3)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Cogolo;
 y3=abs(x-9)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Fucine;
 y4=abs(x-13.2)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Pellizzano;
 y5=abs(x-18)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Mezzana;
 y6=abs(x-20.5)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Dimaro;
 y7=abs(x-23)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Monclassico;
 y8=abs(x-26.5)/34;% tempo impiegato ad arrivare alla scuola dagli alunni di Malè;
y=[y1;y2;y3;y4;y5;y6;y7;y8];
S=sum(y);
 plot(x,S,'r',x,)
```

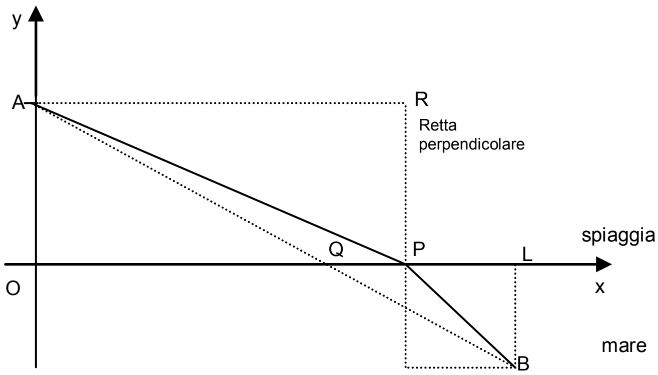


Problemi di minima distanza nel piano.
Problema 1.
Il problema del bagnino.



Un bagnino è sulla propria torretta di osservazione che si trova sulla spiaggia ad una certa distanza dal mare, vede un bagnante che sta annegando, spostato rispetto alla propria posizione.
Sapendo che nella spiaggia può correre ad una velocità v1 mentre nell'acqua può nuotare ad una velocità v2, minore di v1.
In quale punto deve tuffarsi per raggiungere il bagnante, nel minor tempo possibile?
Il problema può essere posto anche così: ***qual è il percorso migliore che deve fare il bagnino per salvare un bagnante che sta annegando?***

La risposta più immediata è: **il percorso rettilineo! Ovvero quello di minima lunghezza che congiunge il bagnino al bagnante.**
Ma siamo sicuri che il percorso rettilineo sia davvero quello che ottimizza (nel nostro caso minimizza) il tempo che il bagnino impiega a raggiungere il bagnante?
Anche il campione mondiale di nuoto, corre comunque più veloce di quanto possa nuotare!
Per studiare meglio il problema rappresentiamo graficamente la situazione, introducendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, come nella figura riportata sotto.



A: posizione del bagnino;
B: posizione del bagnante;
asse x: battigia (linea di divisione fra spiaggia e mare);
R: retta perpendicolare (normale) all'asse x nel punto P.

Dalla figura si vede che il percorso AP+PB è sempre maggiore (in distanza percorsa) del percorso rettilineo AQ+QB, per ogni P diverso da Q.
Se indichiamo con v1 la velocità del bagnino sulla spiaggia e con v2 quella in mare, guardando il disegno si potrebbe dire che il percorso APB, più lungo, potrebbe essere più rapido, perché il tempo che perde nel tratto AP (più lungo di AQ) lo recupera nel tratto PB (più breve di QB). Anche perché la velocità v1 è maggiore della velocità v2.
In generale, **il percorso di minima lunghezza coincide con quello di minimo tempo?**
La lunghezza del percorso AP+PB dipende dall'ascissa x del punto P (punto in cui il bagnino si tuffa in mare) e allora anche il tempo dipende da x.
Per studiare il problema attribuiamo dei valori:
OA=40m (distanza bagnino dalla battigia)
LB=35m (distanza bagnante dalla battigia)
OP=x posizione del "presunto" punto di minimo tempo
OL=60m (intervallo nel quale varia l'ascissa x)

E' ragionevole escludere i valori di x <0, altrimenti il bagnino andrebbe prima indietro e perderebbe tempo prezioso, e i valori x> 60 perché andrebbe prima avanti per tornare poi indietro. Il tempo di percorrenza complessivo è quindi (sempre nell'ipotesi che le velocità siano costanti nei rispettivi tratti:

$$t(x) = \frac{AP}{v_1} + \frac{PB}{v_2}$$

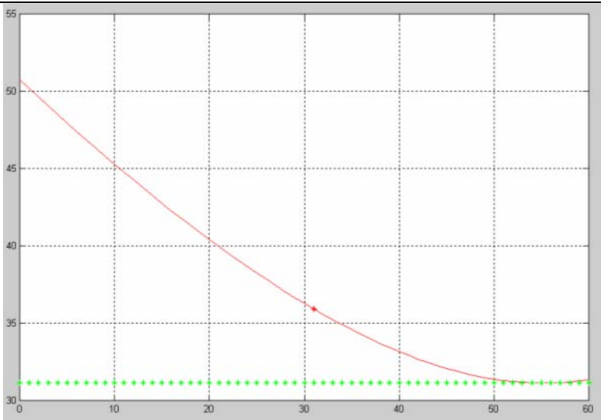
Sapendo che:
la velocità del campione del mondo nei 100 m è di circa 10 m/s, possiamo ragionevolmente porre v_1= 9 m/s;
la velocità del campione del mondo sui 100 m stile libero è di circa 2 m/s, possiamo porre v_2=1.5 m/s.
Inoltre AP e PB li possiamo trovare con il teorema di Pitagora applicato rispettivamente ai triangoli AOP e PBL quindi:

$$t(x) = \frac{\sqrt{(40)^2 + x^2}}{9} + \frac{\sqrt{(60-x)^2 + (35)^2}}{1.5}$$

Il nostro programma di calcolo Matlab, costruisce la funzione t(x) sostituendo i valori di x compresi fra 0 e 60, e determina via via l'ascissa del punto che migliora il tempo di percorrenza del tragitto APB.
Le coordinate del punto Q (quello relativo alla minima distanza) le posso determinare trovando l'equazione della retta passante per i punti A(0,40) e B(60,-35):

$y-40=\frac{-35-40}{60}(x-60)$ mentre la sua intersezione con l'asse x la trovo ponendo

y=0 e quindi -40=$\frac{-75}{60}$ (x-60) che risolta è x= 32



Programma con Octave:

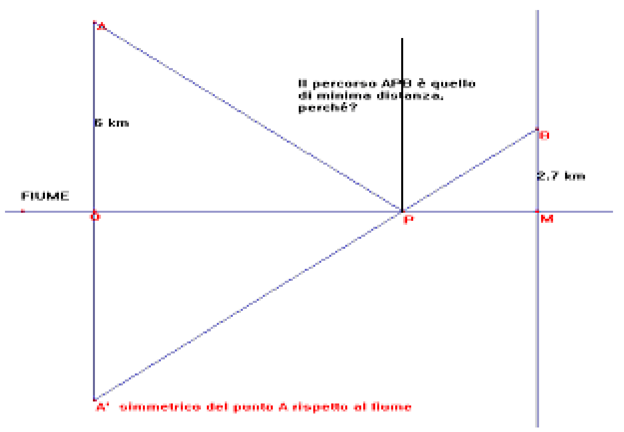
```
% x variabile posizione del punto P;
 x=0:1:60;
 y=((sqrt(40^2+x.^2))/9)+
+((sqrt((60-x).^2+35^2))/1.5);
 min(y);
 plot(x,y,'r',x(32),y(32),'r*',x,min(y),,g*'),hold
on,grid
```

Dal grafico si vede che il tempo corrispondente al percorso di minima distanza (* asterisco rosso) è maggiore rispetto al tempo impiegato dal bagnino se entra in mare nel punto P di ascissa
 x= 55,2318 minimo di t(x).
Quindi il bagnino deve sapere che per salvare il bagnante deve tuffarsi oltre il punto di intersezione della retta che lo congiunge al bagnante….

Osservazione:

Una situazione analoga si trova in natura quando si studia il problema della propagazione della luce: ***la luce per propagarsi da un punto A ad un punto B qualsiasi, segue un cammino lungo il quale impiega il minimo tempo possibile.*** **(principio di minimo dell'Ottica)….dal quale si ricavano la *legge della rifrazione e la legge della riflessione.***

Problema 2.



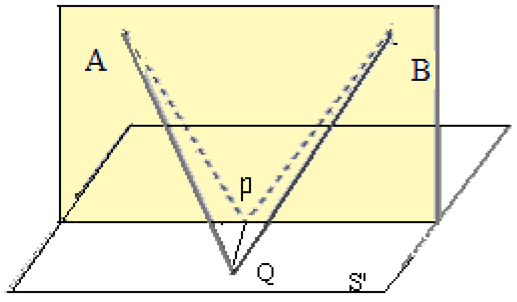
Una persona deve andare dalla località A alla località B dalla stessa parte di un fiume il cui percorso è rettilineo ed è sempre ugualmente raggiungibile. Prima di giungere in B deve passare al fiume ad attingere acqua. In quale punto scenderà al fiume in modo da percorrere la minima distanza?
Questo problema è uguale al precedente?

Utilizziamo il principio della Riflessione della luce: **ogni qualvolta un raggio luminoso si sposta da un punto a un altro segue il percorso per il quale impiega il tempo minimo**
Consideriamo, ad esempio, un raggio solare con velocità v ed un punto P, posti nello stesso mezzo di propagazione (omogeneo ed isotropo[1]). Consideriamo anche una superficie riflettente come nella figura 1. Vogliamo dimostrare che:

1. Il raggio incidente, il raggio riflesso e la perpendicolare alla superficie riflettente nel punto di incidenza giacciono in uno stesso piano;
2. L'angolo che il raggio riflesso forma con la suddetta perpendicolare, detto angolo di riflessione, è uguale a quello che il raggio incidente forma con la stessa perpendicolare, detto angolo di incidenza.

Per la dimostrazione del punto 1 supponiamo, come si può vedere in figura 1, che il raggio uscente da A raggiunga il punto B dopo essersi riflesso nel punto Q del piano S'. Sia S il piano passante per A e B e perpendicolare a S', sia P un punto di S tale che il segmento PQ sia perpendicolare a S.

figura 1



Qualunque sia $Q \neq P$ il cammino AQ+QB > AP+PB poichè AQ > AP e QB > PB perché ipotenuse di triangoli rettangoli. Quindi, per il principio di Fermat, il cammino reale seguito dal raggio in esame è AP+PB e inoltre sia il raggio incidente sia il raggio riflesso giacciono nel piano S che contiene anche la normale alla superficie riflettente nel punto d'incidenza P.

Per dimostrare il punto 2 consideriamo la seguente figura:

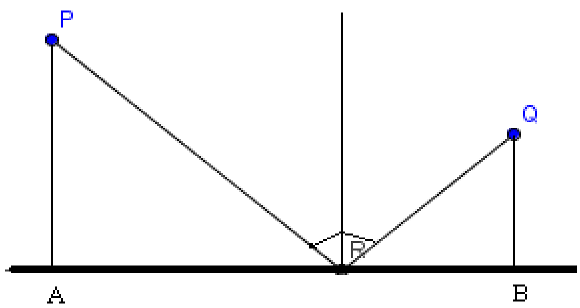
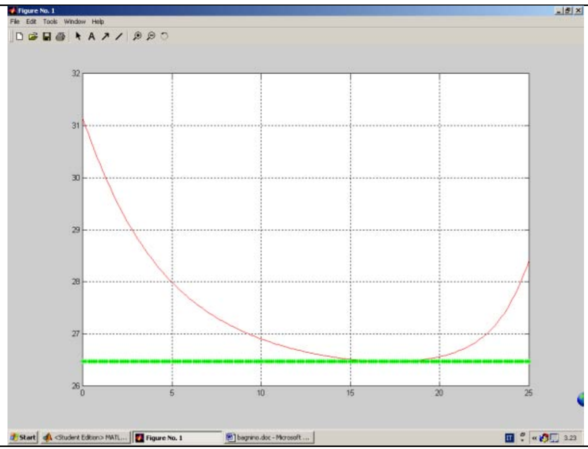


figura 2

Calcolare la funzione del tempo t impiegato dal raggio di luce per andare da P a Q e poi trovare il valore per il quale il tempo t risulta minimo.

Soluzione con Octave:

```
% x posizione del punto P; distanza OP=25 Km;
x=0:0.1:25;
y=(sqrt(6^2+x.^2))+(sqrt((25-x).^2+2.7^2)); % percorso variabile APB;
min(y);
z=sqrt(25^2+(2.7+6)^2); % percorso A'PB;
plot(x,y,'r',x,min(y),'g*',x,z,'k'),hold on,grid
```



TERZO INCONTRO

Problema 1.

<u>Un viaggio nel Sahara</u>

Un'organizzazione umanitaria, non governativa, ha come obiettivo principale la promozione dello sviluppo e della tutela delle comunità locali. Un importante progetto dell'organizzazione è quello di attraversare il Deserto del Sahara, dall'Oceano Atlantico al Mar Rosso per una lunghezza di circa 4000 km nel percorso più lontano da qualsiasi città della costa, con l'obiettivo di censire la presenza di villaggi e dello stato di salute degli abitanti, soprattutto dei bambini.

Per la spedizione vengono utilizzati tre camion arancioni, tipo quelli usati nei famosi viaggi di "Overland", affiancati da due fuoristrada più piccoli ed agili, per la realizzazione delle riprese per un documentario.

I tre camion, oltre ad un serbatoio normale da 500 litri, ne hanno uno supplementare che assicura un'autonomia di 2000 km alla velocità massima di circa 100Km/h. I camion vengono allestiti in modo che uno contenga i viveri e i medicinali, uno contenga il necessario per dormire ed uno contenga un'officina con pezzi di ricambio e una cisterna per il gasolio supplementare. Su ciascun fuoristrada, con un'autonomia massima di 700 km, viene caricato un fusto di carburante di scorta di 50 l (circa 460 km), ma il percorso per raggiungere la prima oasi con un distributore per il rifornimento è di circa 1400 km!

E' necessario quindi, prima di partire, studiare la situazione e trovare una soluzione ottimale.

Una proposta è questa: i due fuoristrada partono insieme ma, arrivati ad una certa distanza x, uno cede all'altro tutto il carburante che gli avanza, tranne la quantità che gli serve per ritornare alla base sulla costa del Marocco, mentre l'altro prosegue e attraversa il deserto fino al Nilo. Come deve essere x perché questo sia possibile?

Indichiamo con x il numero di km nel quale il secondo fuoristrada decide di "cedere il carburante all'altro".

Evidentemente, il fuoristrada che ritorna alla base ha bisogno del carburante per 2x km (bisogna tener conto anche del viaggio di ritorno) e quindi può cedere all'altro una quantità di carburante pari a (700+460 – 2x) km.

Impostiamo il seguente sistema: $\begin{cases} (1160-2x)+1160 \geq 1400 \\ x \geq 1160-2x \end{cases}$

La seconda disequazione segnala che il fuoristrada destinato a proseguire nell'attraversata, è effettivamente in grado di caricare il carburante che gli cede l'altro.

Dal sistema impostato segue che:

$$\begin{cases}(2320-1400)\geq 2x \\ x\geq 1160-2x\end{cases} \quad \begin{cases}920\geq 2x \\ 3x\geq 1160\end{cases} \quad \begin{cases}x\leq 460 \\ x\geq 386.\overline{6}\end{cases}$$

Il problema è risolubile se i due fuoristrada si separano in un tratto di strada che soddisfa la seguente diseguaglianza approssimata: 387 km $\leq x \leq$ 460 km

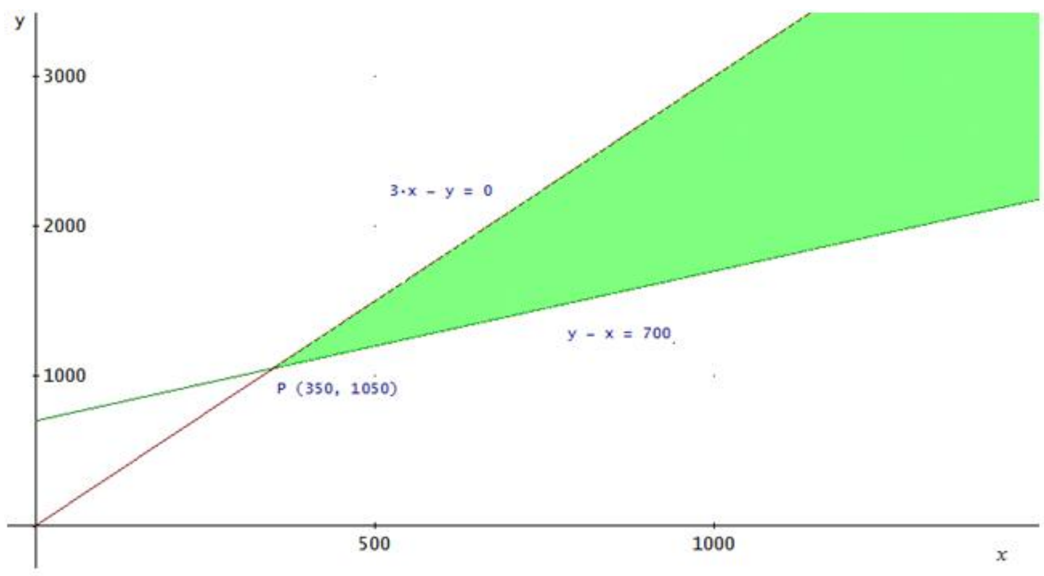
Generalizziamo ora il nostro problema nel caso in cui non sia possibile stabilire con certezza l'autonomia di ciascun fuoristrada. Se indichiamo con y la loro autonomia, domandiamoci qual è il valore minimo di y per cui il nostro problema ha soluzione?

Procediamo in analogia con quanto visto prima:

$$\begin{cases}(y-2x)+y\geq 1400 \\ x\geq y-2x\end{cases}$$

$$\begin{cases}y-x\geq 700 \\ 3x-y\geq 0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0\end{cases}$$

La regione colorata rappresenta le coppie (x,y) per cui il problema ha soluzione.



In particolare possiamo chiederci: qual è la minima autonomia per cui è possibile raggiungere la prima oasi con il rifornimento di carburante?

E' evidente dal grafico che la minima autonomia corrisponde alla minima ordinata y dei valori della regione colorata: è l'ordinata del punto P ottenuto dall'intersezione delle due rette.

Dunque la minima autonomia che consente di realizzare questo viaggio è di 1050 Km

Problema 2.

Il problema della dieta

Anna gioca a pallavolo e durante il torneo universitario invernale, il suo allenatore, sapendo che è vegana[1], le impone un minimo giornaliero di sostanze nutritive: proteine, calcio e vitamine.

Anna ha a disposizione due alimenti, chiamiamoli A e B (per non fare pubblicità) che si comprano solo in negozi particolari, ognuno dei quali fornisce un certo numero di sostanze nutritive per unità di peso. Ovviamente si informa anche sul loro costo per unità di peso e si pone il problema di

[1] Scelta di vita che evita il consumo di tutto ciò che deriva dallo sfruttamento, dalla sofferenza e dall'uccisione degli animali

determinare la giusta combinazione in peso degli alimenti A e B per soddisfare alle prescrizioni della dieta richiesta dall'impegno agonistico ed avere, contemporaneamente, il minor costo possibile.

Quali passi deve compiere Anna per risolvere il problema?

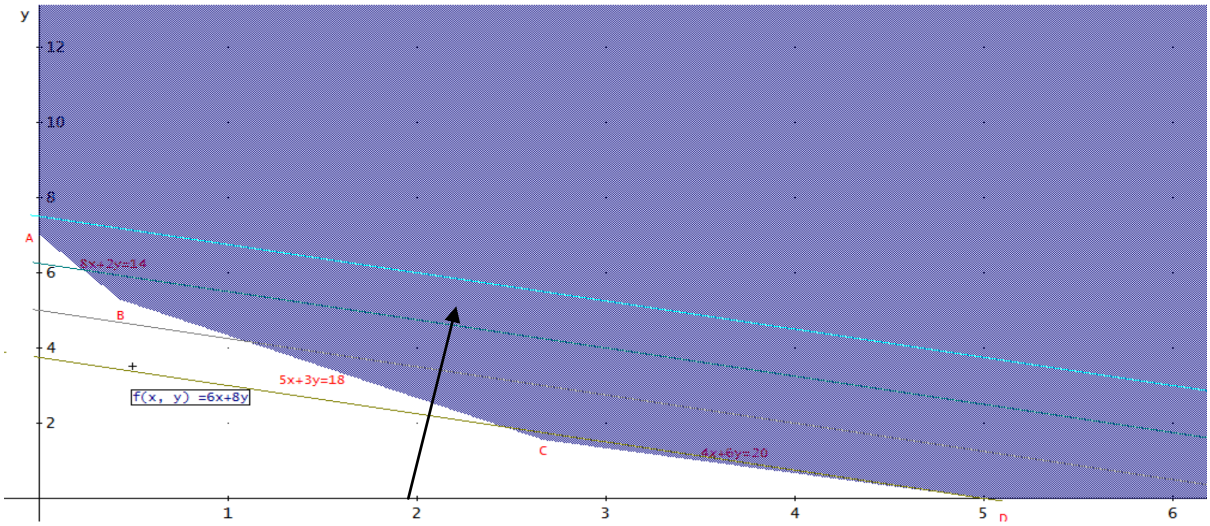
- Riassumere le informazioni raccolte nella seguente tabella:

	A	B	minimo giornaliero
vitamine	5	3	18
proteine	4	6	20
calcio	8	2	14
costo	6 €	8 €	

- Indicare con x e y le quantità in peso dei due alimenti A e B da mangiare ogni giorno (almeno finché c'è il torneo).
- Costruire il <u>modello matematico</u> in questo modo:
  $f(x, y) = 6 \cdot x + 8 \cdot y$ è la <u>funzione obiettivo</u> da ottimizzare. Le variabili x e y sono soggette ai seguenti vincoli:
  $5 \cdot x + 3 \cdot y \geq 18$
  $4 \cdot x + 6 \cdot y \geq 20$
  $8 \cdot x + 2 \cdot y \geq 14$
  $x \geq 0,\ y \geq 0$
- Risolvere il problema con il metodo grafico

Osservazioni:

La funzione da ottimizzare è un costo quindi è da minimizzare. E' un'equazione lineare nelle variabili x e y. La regione che si ottiene risolvendo il sistema di disequazioni lineari (rappresentato da tutti i vincoli) è una regione convessa chiamata regione delle soluzioni ammissibili.



Tutte le coppie di valori di x e y all'interno dell'area colorata sono soluzioni del problema lineare e inserendoli nella funzione obiettivo, si trovano i valori in peso corrispondenti alle varie combinazioni degli alimenti A e B.

Come si può osservare il valore della funzione obiettivo aumenta quanto più la retta nel grafico chiamata f(x,y)=6x+8y si allontana dal perimetro segnato dai vertici A, B, C e D. Questo significa che la soluzione ottima giace su uno dei vertici della regione delle soluzioni ammissibili. Cerchiamo la combinazione che minimizza la funzione costo dopo aver trovato le coordinate dei vertici:

A (0, 7)

B è soluzione del sistema $\begin{cases} 8x+2y=14 \\ 5x+3y=18 \end{cases}$ B$\left(\frac{3}{7},\frac{37}{7}\right)$

C è soluzione del sistema $\begin{cases} 5x+3y=18 \\ 4x+6y=20 \end{cases}$ C$\left(\frac{8}{3},\frac{14}{9}\right)$

D (5, 0) da cui $f(0,7) = 56$ € $\quad f\left(\frac{3}{7},\frac{37}{7}\right) = 44{,}86$ € $\quad f\left(\frac{8}{3},\frac{14}{9}\right) = 28{,}44$ € $\quad f(5,0) = 30$ €

Anna scopre che la combinazione più conveniente è $\left(\frac{8}{3},\frac{14}{9}\right)$ espresso in hg. Decide quindi di mangiare ogni giorno almeno 2,6 hg (circa) dell'alimento A e 1,6 hg (circa) dell'alimento B.

LAVORO DI GRUPPO n° 2

La dieta

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 45 g e 60 g, di carboidrati compreso tra 100 g e 120 g con l'ulteriore vincolo che la quantità complessiva di proteine e carboidrati non deve superare i 160 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti A e B della Tabella sotto riportata. Rappresentate graficamente in un piano cartesiano le possibili soluzioni.

Composizione	**A**	**B**
grassi	**5%**	**30%**
proteine	**15%**	**30%**
carboidrati	**50%**	**20%**
altre sostanze	**30%**	**20%**

SUGGERIMENTO

- Siano z e w le quantità giornaliere degli alimenti **A, B.** Indica con $x=\frac{z}{100}$ e $y=\frac{w}{100}$ ed esprimi le limitazioni espresse dal problema
- Considera il sistema delle disequazioni ottenute (ogni "compreso" rappresenta la soluzione comune di 2 disequazioni)
- Rappresenta in un piano cartesiano le disequazioni ottenute (ogni disequazione è soddisfatta dai punti di un semipiano)
- L'intersezione dei semipiani è la soluzione dl problema

La pelletteria

Ad una pelletteria vengono forniti mensilmente al massimo 80 m^2 di pelle e 100 m^2 di tessuto plastificato per produrre borse e zaini. Per confezionare una borsa occorrono 0,4 m^2 di pelle e 0,05 m^2 di tessuto per gli inserti. Per produrre uno zaino occorrono 0,8 m^2 di tessuto e 0,2 m^2 di pelle. Per fare una borsa, inoltre, occorrono tre ore di lavorazione, mentre per fare uno zaino ne occorrono 4 ed il monte ore mensile per questa produzione non può essere superiore a 800 ore. Sapendo che su ogni borsa si ha un guadagno di 30 € e su uno zaino di 20 €, determina come deve essere organizzata la produzione mensile per avere il massimo guadagno.

	BORSA	ZAINO
Quantità di pelle (m^2)	0,4	0,2
Quantità di tessuto (m^2)	0,05	0,8
N. ore di lavorazione	3	4
Guadagno (€)	30	20

SUGGERIMENTO

- Indicato con x il numero di borse da produrre in un mese e con y il numero di zaini, scrivi le funzioni che esprimono:
  - la quantità totale di pelle necessaria
  - la quantità totale di tessuto necessaria
  - il numero di ore di lavorazione totale
  - il guadagno complessivo
- Scrivi le limitazioni
- Rappresenta le disequazioni in un sistema di riferimento cartesiano e identifica la regione delle soluzioni possibili
- La funzione guadagno è rappresentata da un fascio di rette parallele …

SOLUZIONI

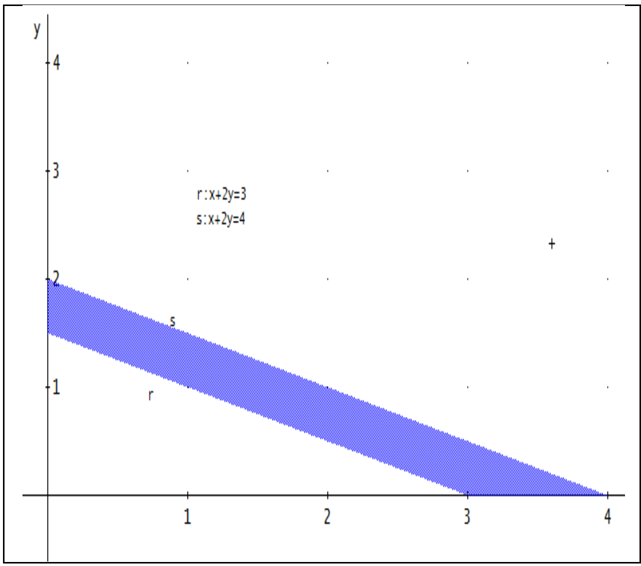
<u>La dieta</u>

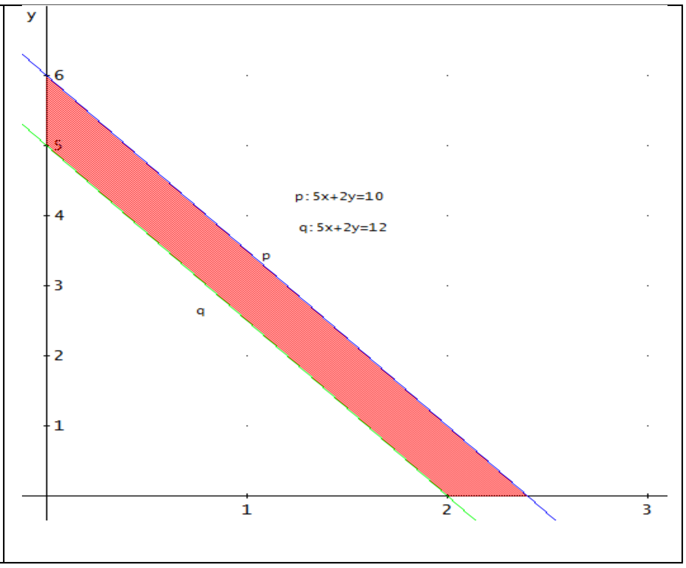
Indichiamo con x e y le quantità giornaliere rapportate a 100 degli alimenti A, B ed esprimiamo le limitazioni espresse dal problema.
Otteniamo il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 45 \le 15x + 30y \le 60 \\ 100 \le 50x + 20y \le 120 \\ 65x + 50y \le 160 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \le x + 2y \le 4 \\ 10 \le 5x + 2y \le 12 \\ 13x + 10y \le 32 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

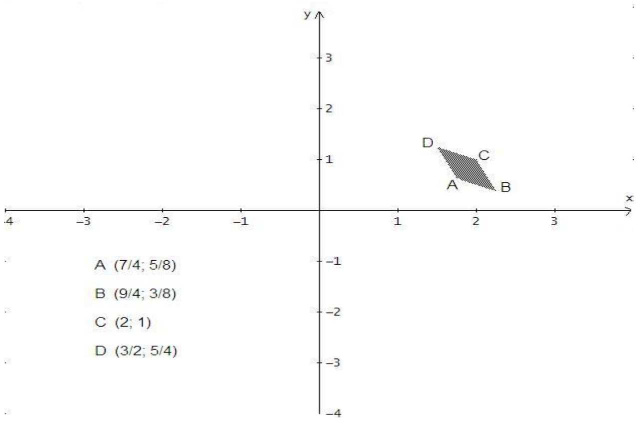
$$3 \le x + 2y \le 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \ge 3 \\ x + 2y \le 4 \end{cases} \qquad 10 \le 5x + 2y \le 12 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y \ge 10 \\ 5x + 2y \le 12 \end{cases}$$

In ognuno dei due sistemi le rette sono parallele, in questo caso l'intersezione dei due semipiani è una striscia.

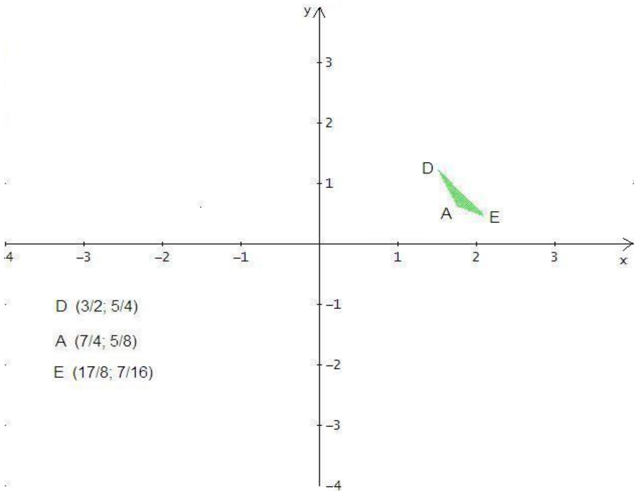




L'intersezione tra le 2 strisce è un parallelogramma di vertici: $A\left(\frac{7}{4};\frac{5}{8}\right)$ $B\left(\frac{9}{4};\frac{3}{8}\right)$ $C(2;1)$ $D\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$



La disequazione $13x+10y \leq 32$ rappresenta un semipiano α. L'intersezione del parallelogramma ABCD e del semipiano α è un triangolo di vertici DAE con E $\left(\frac{17}{8};\frac{7}{16}\right)$



<u>La pelletteria</u>

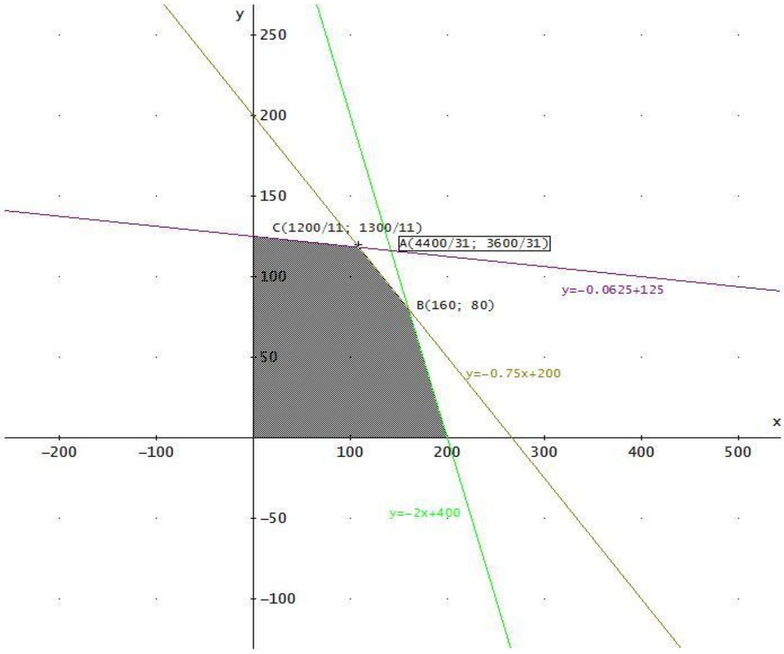
Il modello matematico che rappresenta il problema è dato dal seguente sistema di disequazioni in due incognite

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0.4x + 0.2y \leq 80 \\ 0.05x + 0.8y \leq 100 \\ 3x + 4y \leq 800 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{funzione obiettivo} \\ 30x + 20y = \text{Massimo} \end{array}$$

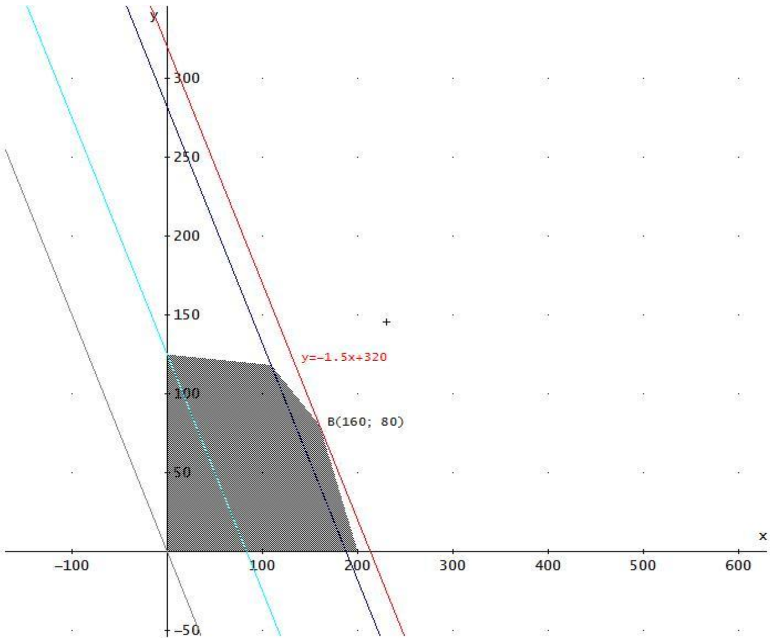
Ovvero

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 400 \\ y \leq -0{,}0625x + 125 \\ y \leq -0{,}75x + 200 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{funzione obiettivo} \\ 30x + 20y = G \qquad y = -1{,}5x + \frac{G}{20} \end{array}$$

Ogni disequazione rappresenta un semipiano, perciò il sistema è rappresentato dall'intersezione di tutti i semipiani.



La funzione obiettivo corrisponde a un fascio di rette parallele la cui ordinata all'origine è proporzionale al guadagno. Sovrapponendo alcune rette parallele alla regione precedentemente individuata, si nota che la retta che ha la maggiore ordinata all'origine è quella che passa per il punto B



Perciò il massimo guadagno si ottiene producendo in un mese 160 borse e 80 zaini.
In tal caso il guadagno ammonta a 6400 € (dato che deve essere 320=G/20)

QUARTO INCONTRO

Problema 1
<u>Tariffe telefoniche a confronto</u>
Le variabili che influenzano il costo di una bolletta telefonica sono:

- numero di chiamate;
- durata delle telefonata;
- costo dell'abbonamento;
- linea telematica e noleggio modem;
- chiamate verso telefoni fissi (locali o interurbane), cellulari, numeri speciali;
- scatto alla risposta.

Provate ad analizzare una bolletta, troverete sempre le seguenti voci:

Tipo di chiamata	Offerta	Quantità	Durata	Costo	Rif. Iva
Urbane					20%
Interurbane					20%
Cellulari					20%
Numeri speciali					20%
Totale					
Totale costo per consumi					
Totale costo per abbonamenti					
Totale costi per noleggio (modem) e manutenzione					

Cosa offrono i gestori telefonici?
Visto il numero di variabili in gioco, conviene eseguire una semplificazione del problema. Potremo pensare di:

- considerare solo il caso della telefonia fissa
- non effettuare telefonate verso cellulari
- non effettuare telefonate internazionali
- non effettuare telefonate verso numeri speciali
- collegarci ad internet tramite abbonamento ADSL con modem a noleggio

Oggi ci sono molte opportunità e il mercato è ricco di offerte, come fare allora a capire qual è per noi l'offerta più conveniente?
Proviamo a studiare il problema scegliendo un gestore telefonico e confrontiamo alcune tariffe proposte:

- **Tariffa A**
  - Scatto alla risposta: 0.00 €
  - Canone mensile: 20.50 €
  - Costo per chiamata di 1 minuto: 0.012 €
  - Abbonamento mensile per collegamento internet e noleggio modem ADSL: 23.50 €
- **Tariffa B**
  - Scatto alla risposta: 0.062 €
  - Canone mensile: 19.50 €
  - Costo per chiamata di 1 minuto: 0.015 €
  - Abbonamento mensile per collegamento internet + noleggio modem ADSL: 23.50 €
- **Tariffa C**
  - scatto alla risposta: 0.00 €
  - Canone mensile: 49.50 €
  - Costo per chiamata di 1 minuto: 0.00 €
  - Abbonamento mensile per collegamento internet + noleggio modem ADSL: 23.50 €
- **Tariffa D**
  - scatto alla risposta: 0.063 €
  - Canone mensile: 16.50 €
  - Costo per chiamata di 1 minuto: 0.00 €
  - Abbonamento mensile per collegamento internet + noleggio modem ADSL: 23.50 €

Come primo passo nella costruzione dei modelli relativi a ciascuna tariffa, facciamo una ulteriore semplificazione: fissiamo un numero medie di telefonate a bimestre, ad esempio 200. Il bimestre è il periodo di riferimento di una bolletta.

E allora ci proponiamo di:

1. Individuare, per ogni tariffa, il modello descritto dall'offerta.
2. Tracciare i relativi grafici nello stesso sistema di riferimento.
3. Stabilire qual è l'offerta più conveniente in base al tempo di conversazione.

Indichiamo con la variabile indipendente x il tempo (in minuti) dedicato alla "conversazione telefonica" e con f (x) il costo della bolletta (in funzione del tempo x di conversazione). Con le semplificazioni fatte precedentemente, costruiamo i costi per ognuna delle tariffe proposte.

Tariffa A

$f_A(x) = 2(20.50)+ 200\cdot 0.00 + 0.012\cdot x + 2(23.50)$

semplificando si ha $f_A(x) = 88.00 + 0.012\cdot x$

Tariffa B

$f_B(x) = 2(19.50) + 200\cdot 0.062 + 0.015 \cdot x + 2(23.50)$

$f_B(x) = 98.4 + 0.015\cdot x$

Tariffa C

$f_C(x) = 2(49{,}50) + 200\cdot 0{,}00 + 0{,}00 \cdot x + 2(23{,}50)$

$f_C(x) = 146{,}00$

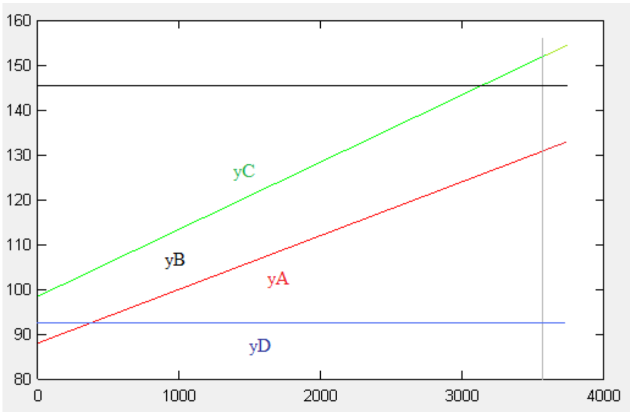
Tariffa D

$f_D(x) = 2(16{,}50) + 200\cdot 0{,}063 + 0{,}00\cdot x+ 2(23{,}50)$

$f_D(x) = 92{,}6$

Ora per vedere quale tariffa (spesa in funzione del tempo) è più conveniente non ci resta che confrontare i grafici delle quattro rette nello stesso sistema di riferimento cartesiano, ove sull'asse delle ascisse è riportata la durata della telefonata, in quello delle ordinate la spesa. Costruire i grafici, ad esempio con Octave:

```
% Sia x la variabile relativa al tempo di chiamata in minuti;
x=0:10:3600;
yA=88.00+0.012*x;
yB=98.4 + 0.015*x;
yC=146.00;
yD=92.6;
plot(x,yA,'r',x,yB,'g',x,yC,'k',x,yD,'b'),hold on
```



Come si vede dal programma occorre porre delle limitazioni al tempo (intervallo di variazione della variabile x): il tempo è maggiore o uguale a 0 e minore di una limitazione di minuti 3600 (ad esempio tetto massimo di chiamate consentite dal budget famigliare).

Qual è la tariffa più conveniente?

Per dare una risposta occorre prima trovare il punto d'intersezione fra la tariffa A e la tariffa D:

$$\begin{cases} y = 88 + 0.012x \\ y = 92.6 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene che:

- per telefonate di durata inferiore a 383 minuti circa è più conveniente la tariffa A;
- se la durata della telefonata è pari a 383 minuti circa è indifferente scegliere le tariffe A e D;
- se la telefonata supera 383 minuti la tariffa più conveniente è la tariffa D.

Cerchiamo di migliorare la nostra indagine, proviamo a non fissare il numero di telefonate, ovvero al posto di 200 telefonate introduciamo la variabile y, conservando la variabile x per il tempo e tutte le altre ipotesi di partenza.
Quali saranno le espressioni che consentono di calcolare il costo a bimestre per ciascuna tariffa?

Tariffa A
$f_A(x, y) = 2(20.5)+ 0.00 \cdot y + 0.012 \cdot x + 2(23.50)$
semplificando si ha $f_A(x, y) = 88 +0.012\cdot x$
Tariffa B
$f_B(x, y) = 2(19.50) + 0.062\cdot y + 0.015 \cdot x + 2(23.50)$
$f_B(x, y) = 86 + 0.015\, x + 0.062\, y$
Tariffa C
$f_C(x, y) = 2(49.50)+ 0.00\cdot y + 0.00 \cdot x + 2(23.50)$
$f_C(x) = 146$
Tariffa D
$f_D(x, y) = 2(16.50) + 0.063\cdot y + 0.00 \cdot x + 2(23.50)$
$f_D(x) = 80 + 0.013\cdot y$

Quali limiti (vincoli) dobbiamo porre alle nostre variabili?

- x rappresenta il tempo e abbiamo visto che è ragionevole imporre $0\leq x\leq 3600$.
- y rappresenta il numero di chiamate in un bimestre e quindi $y\geq 0$.

Inoltre supponiamo che la mamma abbia posto come limitazione, a tutta la famiglia, che:
la spesa complessiva fra il numero di chiamate e il tempo trascorso a conversare non debba superare le 100 euro a bimestre.

Il problema sarà, quindi, quello di costruire un modello che renda minima la spesa f(x, y) relativa a ciascuna tariffa rispettando i vincoli posti alle variabili nei quattro casi presi in considerazione.

Tariffa A

$$\begin{cases} f_A(x, y) = 88 + 0.012x \\ 0 \leq x \leq 3600 \qquad y \geq 0 \\ 0 \leq 0.012x \leq 100 \end{cases}$$

Tariffa B

$$\begin{cases} f_B(x, y) = 86 + 0.015\,x + 0.062\,y \\ 0 \leq x \leq 3600 \qquad y \geq 0 \\ 0 \leq 0.015x + 0.062y \leq 100 \end{cases}$$

Tariffa C

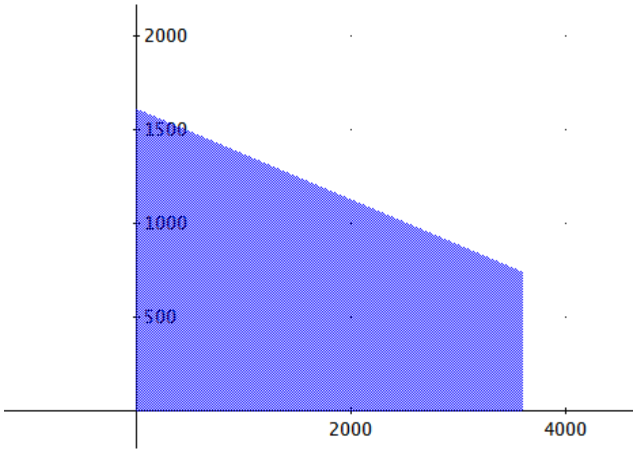
$$\begin{cases} \mathbf{f_C(x,y)} = 146 \\ 0 \leq x \leq 3600 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Tariffa D

$$\begin{cases} f_D(x, y) = 80 + 0.013y \\ 0 \leq x \leq 3600 \qquad y \geq 0 \\ 0 \leq 0.013y \leq 100 \end{cases}$$

Si rappresentano graficamente le quattro regioni individuate dai quattro sistemi.
La regione relativa alle tariffe A e C è una striscia illimitata verso l'alto, $y \geq 0$.
Per la tariffa A, la regione ottenuta è una striscia illimitata verso l'alto. Il minimo si ottiene in (0,0), ovvero la spesa $f_A(0,0)$= 88 euro (ma allora è inutile avere il telefono per pagare solo il canone!).
Se, invece, x=3600 (massimo di minuti di conversazione consentiti)
$f_A(x,y)= 88+0.012\cdot 3600=131.2$ euro
Per la tariffa C la spesa resta costante nel bimestre poiché non dipende né da x né da y ed è uguale a 146 euro.
Lavoriamo allora con le tariffe B e D.

Tariffa B



#1: $0 \le x \le 3600$

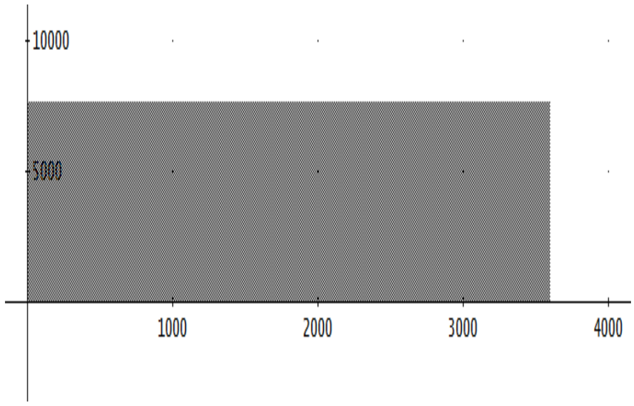
#2: $y \ge 0$

#3: $0 \le 0.015 \cdot x + 0.062 \cdot y \le 100$

#4: SOLVE($[0 \le x \le 3600,\ y \ge 0,\ 0 \le 0.015 \cdot x + 0.062 \cdot y \le 100],\ [x,\ y]$)

$[15 \cdot x + 62 \cdot y \le 100000 \wedge x \le 3600 \wedge 15 \cdot x + 62 \cdot y \ge 0 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0]$

Tariffa D



#1: $0 \le x \le 3600$

#2: $y \ge 0$

#3: $0 \le 0.013 \cdot y \le 100$

#4: SOLVE($[0 \le x \le 3600,\ y \ge 0,\ 0 \le 0.013 \cdot y \le 100],\ [x,\ y]$)

$$\left[x \le 3600 \wedge y \le \frac{100000}{13} \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\right]$$

In tutti e due i grafici relativi alle tariffe B e D troviamo un sottoinsieme del piano che viene chiamato: regione ammissibile.

Osservazioni

Quando il problema si traduce in un modello matematico costituito da:

1. una funzione obiettivo f(x, y) lineare (per noi in due variabili) da "ottimizzare" (per noi da minimizzare perché esprime un costo);
2. un sistema di vincoli espressi da equazioni o disequazioni lineari;
3. un sistema di vincoli di segno, $x \ge 0$ e $y \ge 0$

allora si è in presenza di un problema di programmazione lineare.

Quando le variabili sono due (x e y, nel nostro caso) il problema si può risolvere con il metodo grafico.

Si osserva che:

a) i vincoli di segno limitano la ricerca delle soluzioni al primo quadrante del piano cartesiano;

b) dopo aver tracciato le rette associate alle equazioni contenute in ogni sistema di vincoli e aver evidenziato le regioni ottenute dalle disequazioni, se l'intersezione fra di esse non è vuota, si ottiene un poligono (o una regione illimitata come nel caso dei due sistemi relativi alle tariffe A e C) detto regione ammissibile perché contiene tutte le coppie (x, y) che soddisfano le disequazioni e le equazioni del sistema.

c) Ciascuna coppia (x, y) è detta soluzione ammissibile. Le coppie relative ai vertici di ciascun poligono sono dette invece soluzioni ammissibili di base, fra di esse, se esiste, si trova la soluzione ottima del problema.

Il valore della funzione obiettivo si calcola in corrispondenza di ogni vertice della regione ammissibile e poi si sceglie la coppia che rende ottima (cioè massima o minima a seconda del problema) la funzione stessa. Questo è conseguenza del Teorema fondamentale della programmazione lineare: il massimo o il minimo di una funzione lineare, di un numero qualsiasi di variabili, soggetta a vincoli lineari, espressi cioè da equazioni e/o disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici della regione ammissibile.

Riprendiamo il nostro problema e ricordiamo che x esprime il tempo (in minuti), y esprime il numero di chiamate quindi la soluzione, se esiste, deve essere composta da numeri interi. Se troviamo numeri decimali, il minimo va cercato nei punti della regione a coordinate intere più vicini a quelli trovati.

I vertici del poligono della Tariffa B sono:
O (0, 0); A (0, 1613); B (3600, 742); C (3600, 0) quindi per la funzione obiettivo f_B (x, y) si ha (con le considerazione fatte):

- f_B (0, 0) = 86
- f_B (0, 1613) = 186.006 quindi 186
- f_B (3600, 742) = 186.004 quindi 186
- f_B (3600, 0) = 140

I vertici del poligono della Tariffa D sono:
O (0, 0); A (0, 7692); B (3600, 7692); C (3600, 0) quindi per la funzione obiettivo f_D (x, y) si ha (con le considerazione fatte):

- f_D (0, 0) = 80
- f_D (0, 7692) = 179.996 quindi 180
- f_D (3600, 7692) = 179.996 quindi 180
- f_D (3600, 0) = 80

Ora siamo in grado di confrontare le tariffe prese in considerazione, ma prima è meglio osservare che mentre la tariffa B ha il minimo in (0, 0) come la Tariffa A, la tariffa D assume lo stesso valore minimo anche in (3600,0).
Proviamo ora a fare il confronto supponendo di parlare al telefono 3600 minuti e di effettuare (ad esempio, perché più credibile) 742 telefonate a bimestre.
Tariffa A: f_A = 131
Tariffa B: f_B = 186
Tariffa C: f_C = 146
Tariffa D: f_D = 89.646 ovvero 90

Con queste ipotesi la tariffa migliore è la Tariffa D

Se invece supponiamo di parlare 3600 minuti e di fare 7692 telefonate in due mesi (ipotesi davvero improponibile!), allora si ha che la tariffa migliore è la Tariffa A infatti sostituendo nelle funzioni da minimizzare si ha:
Tariffa A: f_A = 131
Tariffa B: f_B = 617
Tariffa C: f_C = 146
Tariffa D: f_D = 179.996 ovvero 180

LAVORO DI GRUPPO n° 3

Il poster

Amedeo vuole trasformare una foto scattata a Parigi in un poster da appendere nella sua camera per allietare col piacevole ricordo i "tristi" momenti di studio. Decide che il taglio migliore della foto sia un rettangolo con la altezza tripla della base. L'ingrandimento vuole incorniciarlo e proteggerlo con un vetro. Dopo aver confrontato vari prezzi decide che i più economici siano quelli riportati in tabella. Ciascun costo è composto da una quota fissa a cui va sommata una variabile dipendente dalle dimensioni del poster. Amedeo ha a disposizione 70 €. Quali dimensioni del poster si può permettere? Rinunciando al vetro e alla cornice a quanto può ambire?

SUGGERIMENTO

- Indicato con x la misura della base, scrivi le funzioni che esprimono il costo relativo all'ingrandimento fotografico, alla cornice, al vetro, al costo totale
- Rappresenta la funzione in un sistema di riferimento cartesiano e confronta il grafico ottenuto con il grafico che esprime la funzione "somma posseduta"

- Osservando il grafico ottenuto decidi le dimensioni appropriate alla somma posseduta da Amedeo
- Rappresenta solo la funzione “costo dell’ingrandimento” e fai il dovuto confronto.

Prodotto	Quota fissa in €	Quota variabile
Ingrandimento fotografico	9	0,02 €/cm^2
Vetro	7	0,01 €/cm^2
Cornice	5	0,02 €/cm

<u>Il dilemma della mamma</u>

La mamma sta andando a fare la spesa in un supermercato che dista 30 km da casa.
A metà strada si ricorda di aver lasciato aperto il rubinetto dell’acqua calda. Supposto che il costo dell’acqua versata sia circa 6 €/h, il costo dell’auto sia (0.16+0.05v) €/km e il tempo previsto per la spesa sia di 30 minuti.
Determinare qual è la velocità minima alla quale la mamma deve viaggiare affinché le convenga non tornare subito indietro.
Si supponga per semplicità che la velocità sia costante.

SUGGERIMENTO

Per costruire il modello, raccogliamo i dati a nostra disposizione:

- Costo acqua calda: 6 €/h
- Costo auto: (0.16+0.05v) €/km
- Tempo della sosta: 30’ = ½ h
- Distanza casa – destinazione: 30 km
- Spazio percorso quando si accorge di aver lasciato aperta l’acqua: 15 km
- La relazione: $v = s/t \rightarrow t = s/v$

E’ chiaro che la risposta dipende dalla velocità media, che chiameremo v.
Allora, determiniamo la minima velocità media per la quale alla mamma conviene proseguire.
Stabiliamo di considerare un sistema di riferimento che ha origine nel punto in cui si trova la casa CE è il punto che rappresenta la meta della mamma; M il punto medio del tragitto CME
Valutiamo i costi che la mamma dovrà sostenere in ciascuna delle due possibili scelte:
Se torna subito indietro…. Se prosegue….

<u>Spazio di frenata</u>

Quando si studia per ottenere la patente di guida, sia per l'automobile che per il motorino, uno degli argomenti importanti è la distanza di sicurezza. L'articolo 149 del Codice della strada impone che durante la marcia i veicoli devono tenere, rispetto al veicolo che precede, una distanza di sicurezza tale che sia garantito in ogni caso l'arresto tempestivo e siano evitate collisioni con i veicoli che precedono.
I seguenti sono alcuni esempi di test per la patente.

La distanza di sicurezza è

- una distanza fissa V/F
- dipende dalla prontezza dei riflessi del conducente V/F
- può dipendere dall'efficienza dei freni V/F
- può dipendere dalla larghezza della strada V/F
- può dipendere dalla velocità del proprio veicolo V/F
- può dipendere dalla presenza di veicoli che ci seguono V/F
- deve essere adeguata allo stato di efficienza del veicolo V/F
- non dipende dalla velocità del veicolo V/F

- deve essere tale da evitare il tamponamento del il veicolo che precede V/F
- deve consentire in ogni caso l'arresto tempestivo del veicolo V/F
- non deve mai essere inferiore a 150 m V/F
- varia se si è su strada urbana o extraurbana V/F

NOTA: le risposte corrette sono F V V F V F V F V V F F

Non esiste una "formula magica" per calcolare la distanza di sicurezza, però è chiaro che deve essere maggiore dello spazio di frenata, infatti bisogna anche tener conto del cosiddetto "spazio di reazione" che è la distanza percorsa nel tempo di reazione ovverosia lo spazio percorso nel tempo che intercorre tra l'istante in cui il conducente percepisce il pericolo e quello in cui interviene sul pedale del freno.

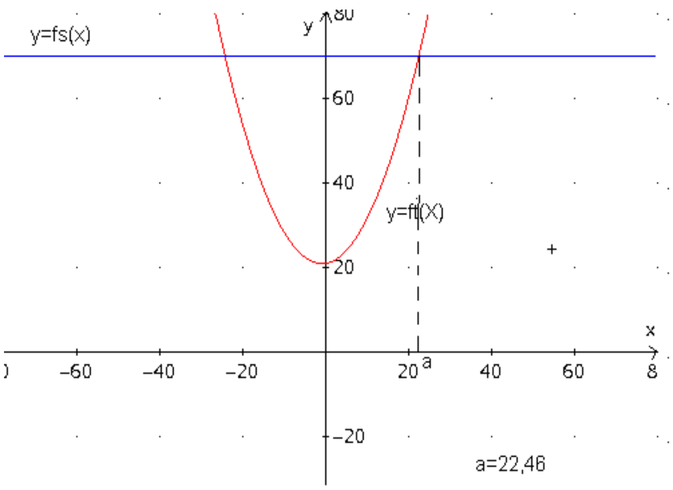
Lo spazio di frenata è invece la distanza percorsa dal veicolo durante l'azione frenante fino all'arresto. Il Ministero dei Trasporti fornisce un modello semplificato, ma abbastanza aderente alla realtà secondo cui la formula per calcolare lo spazio di frenata s espresso in metri, è la seguente
$s = v^2/(250*f)$
dove v è la velocità del veicolo in km/h , ed *f* è un coefficiente che dipende dalle condizioni del fondo stradale secondo la seguente tabella:

Condizione della strada	Coefficiente di aderenza f
strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	0,8
strada asfaltata ruvida	0,6
strada asfaltata liscia	0,5
strada asfaltata bagnata	0,4
strada con fanghiglia	0,3
strada ghiacciata	0,1

SOLUZIONI

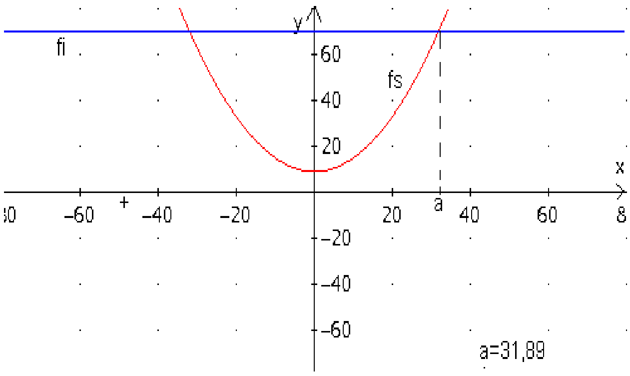
<u>Il poster</u>

Considerando come x cm e 3x cm i lati del poster, la superficie misura $3x^2$ cm^2
Funzione relativa al costo dell'ingrandimento: $f_i(x)= 0{,}06\ x^2 + 9$
Funzione relativa al costo del vetro: $f_v(x)= 0{,}03\ x^2 + 7$
Funzione relativa al costo della cornice: $f_c\ (x)= 0{,}16\ x + 5$
Funzione relativa al costo totale del poster: $f_t\ (x)= 0{,}09\ x^2 + 0{,}16\ x + 21$
Funzione relativa alla somma posseduta da Amedeo: fs (x) = 70
ft è una funzione quadratica, il suo grafico è una parabola, fs è una funzione costante, il suo grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse. Rappresentiamole in un piano cartesiano:



x=22,46 è l'ascissa positiva dei punti di intersezione della parabola con la retta, è la misura della base del rettangolo.

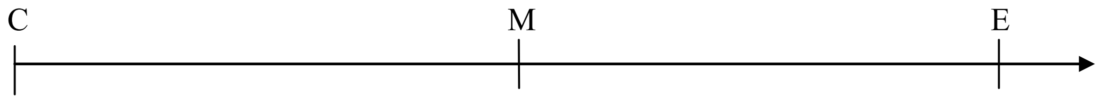
Rappresentiamo nel grafico solo f_i, che è una parabola a confronto con f_s



x=±31,89 sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con la retta. Il valore positivo è la misura della base del rettangolo, ingrandimento possibile con la somma posseduta da Amedeo.

<u>Il dilemma della mamma</u>

E' chiaro che la risposta dipende dalla velocità media, che chiameremo v.
Allora, determiniamo la minima velocità media per la quale alla mamma conviene proseguire. Stabiliamo di considerare un sistema di riferimento che ha origine nel punto in cui si trova la casa C. E è il punto che rappresenta la meta della mamma; M il punto medio del tragitto.



Valutiamo i costi che la mamma dovrà sostenere in ciascuna delle due possibili scelte:

Se torna subito indietro….	Se prosegue….
Il costo totale sarà dato dalla somma di: 1. La spesa dell'auto per il tragitto CM +2CE 2. La spesa dell'acqua versata nel tragitto CM	Il costo totale sarà dato dalla somma di: 1. La spesa dell'auto per il tragitto ME +CE 2. La spesa dell'acqua versata nel tragitto ME +CE 3. La spesa dell'acqua versata nel tempo della spesa.

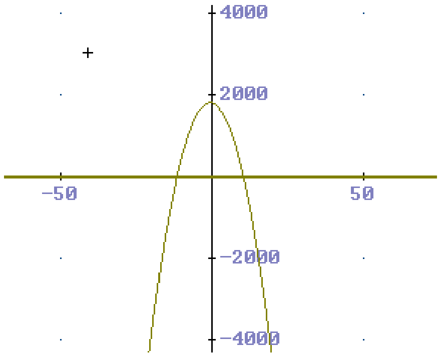
Per decidere se la mamma farebbe meglio a tornare a casa per chiudere l'acqua o a fare la spesa, confrontiamo i due costi.

- Nel primo caso la mamma spende in più il costo dell'auto per i tratti CM+MC, cioè $y_1=(0.16+0.05v)30$
- Nel secondo caso spende in più il costo dell'acqua consumata per il tempo previsto per la sosta e per il tragitto ME+EM cioè

$$y_2 = 6\cdot\left(\frac{30}{v}+\frac{1}{2}\right)$$

Allora le conviene proseguire se e solo se

$y_2 \le y_1$ semplificando si ha: $-5v^2 - 6\,v + 600 \le 0$



Poiché ha senso considerare solo i valori positivi di v, dal grafico si deduce che le soluzioni del problema sono tutti i valori $v \geq 37$ e quindi la velocità minima richiesta è: 37 km/h