PROBLEMA 1

1. Fissiamo il riferimento come consigliato: A origine degli assi, $B(0,1)$. Poiché la larghezza del serbatoio è $2m$, la curva profilo intersecherà in $(1,0)$ l'asse delle ascisse.
Per la simmetria della figura, possiamo limitarci a studiare le funzioni nell'intervallo $[0,1]$.
Scartiamo la funzione $f_3(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ perché $f'_3(0) = 0$ e in B è assente il punto angoloso.
Scartiamo la funzione $f_2(x) = -6x^3 + 9kx^2 - 4x + 1$ perché il passaggio per $(1,0)$ implica $k = 1$ e $f"_2(x) = -36x + 18$ cambia di segno nell'intervallo $[0,1]$. Quindi il profilo del serbatoio non è convesso come suggerito dalla figura (per altro, calcolando il volume, risulterebbe in questo caso inferiore al voluto).
La funzione $f_1(x) = (1-x)^{\frac{1}{k}}$ è tale che $f_1(0) = 1$ e $f_1(1) = 0$ come richiesto; inoltre $f'_1(0) = -\frac{1}{k} < 0$ e $f"_1(x) = \frac{1-k}{k^2}(1-x)^{\frac{1}{k}-2} < 0$ per $x \in [0,1]$, e la funzione è concava.
La scelta cadrà quindi sulla funzione $f_1(x)$.

2. Calcoliamo ora il volume del serbatoio che ha forma cilindrica con generatrici perpendicolari al piano xy.
Se A è l'area della base, si ha $V = \mathrm{A} \cdot 8 \geq 13$, dove $\mathrm{A} = 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
Quindi, deve essere: $\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx = \int_0^1 \left(1-y^k\right)\,dy = 1 - \frac{1}{k+1} \geq \frac{13}{16}$ soddisfatta per $k \geq \frac{13}{3}$.
Siccome ragioniamo sugli interi deve essere $k \geq 5$.
Infine, dovrà anche essere $f'_1(0) = -\frac{1}{k} < -tg\ 10°$ ossia $k < 5{,}67$.
In conclusione, $k = 5$ e la funzione cercata è data da: $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{5}}$.
3. Sia z il livello del gasolio, e $P = p \cdot 100$ la percentuale di riempimento, con $p(z) = \frac{\int_0^z (1-y^5)dy}{\int_0^1 (1-y^5)dy} = \frac{6z-z^6}{5}$.
La differenza tra il livello del gasolio segnata e la percentuale contenuta è espressa da:
$s(z) = z - p(z) = \frac{z^6-z}{5}$.
La massima differenza si ha in corrispondenza per i valori di z per cui è $s'(z) = 0$ ossia $z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \cong 0{,}7$; in tal caso l'errore assoluto in percentuale è $100 \cdot s\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \cong 11{,}6\%$

Infine osserviamo che $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{6-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} > \frac{1}{2}$; più precisamente $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{191}{320} \cong 0{,}597$ come osservato dall'amministratore.
La differenza riscontrata tra l'indice lineare z e l'indice percentuale di riempimento p è dovuto al fatto che il livello del gasolio, a parità di flusso, aumenta più rapidamente alla fine, o anche, pensando al principio di Cavalieri, al fatto che le sezioni orizzontali sono decrescenti e non costanti.