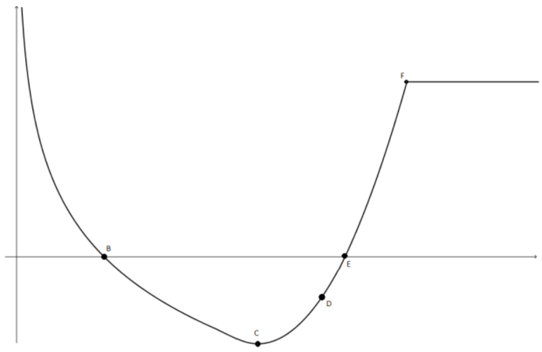
PROBLEMA 2

1 a)

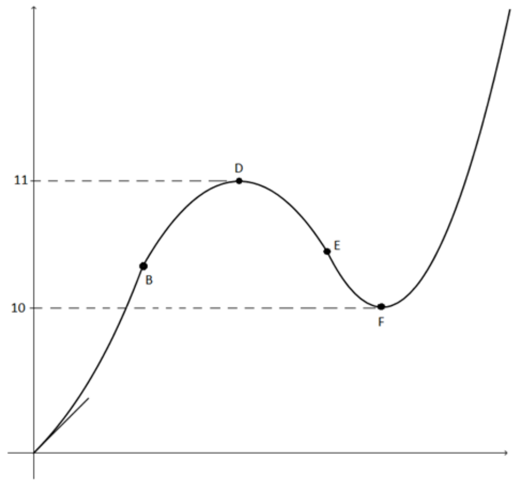
Tracciamo il grafico della funzione $y = f'(x)$, supponendo f generalmente derivabile due volte.
Dal grafico di f deduciamo $f'(0) = +\infty$.
Sempre dal grafico di f relativamente all'arco AB, deduciamo che f è crescente (ha quindi derivata prima non negativa: $f' \geq 0$ ovvero la funzione di cui stiamo cercando il grafico è non negativa nell'intervallo in questione) e concava; ha quindi derivata seconda non positiva: $f'' = (f')' \leq 0$ e quindi la nostra funzione f' risulterà decrescente.
$f'(1) = 0$, in quanto il punto B è massimo relativo per il grafico di f.
Consideriamo adesso il grafico di f relativamente all'arco BC e ragioniamo come sopra. La funzione f è decrescente: $f' \leq 0$ e quindi la nostra funzione sarà non positiva. La funzione f è anche concava: $f'' = (f')' \leq 0$ e quindi la nostra funzione f' sarà una funzione decrescente.
Per gli archi CE e EF si ragiona in modo analogo.
Per $x \geq 8$, la funzione è data da $f(x) = 2(x - 8)$, equazione della retta passante per i punti F e G, e quindi risulta $f'(x) = 2$.
Un grafico qualitativo di f', che non riesce a tener conto degli eventuali suoi punti di flesso, è il seguente:



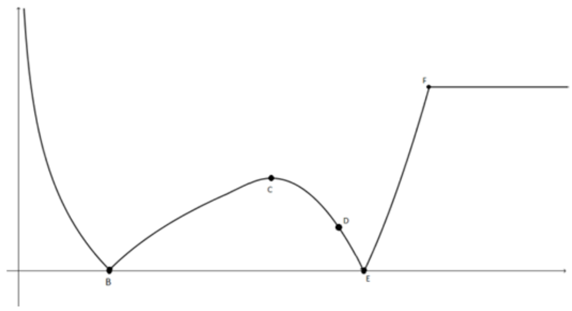
Per quanto riguarda i valori di f' nei due punti richiesti, dalle informazioni sulle rette tangenti al grafico di f nei punti C e D, abbiamo $f'(3) = -2$, $f'(5) = -\frac{1}{2}$.

1 b)

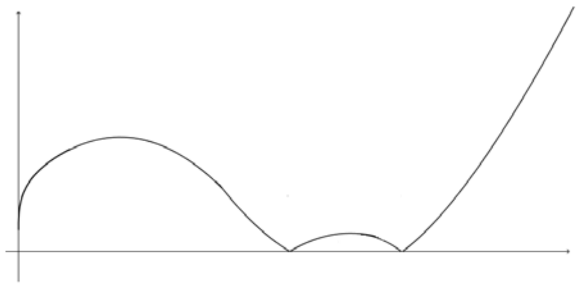
Per tracciare il grafico della funzione integrale, cominciamo con l'osservare che $F(0) = 0$ e che $F(x)$ è sicuramente positiva per $x \leq 5$.
Cominciamo adesso a considerare l'arco AB. Da $F' = f > 0$, segue che F è una funzione crescente; da $F'' = f' > 0$, segue che F è una funzione convessa. In particolare risulta $F'(0) = f(0) = 1$.
Consideriamo adesso l'arco BD e ragioniamo in modo analogo. Da $F' = f > 0$, segue che F è una funzione crescente; da $F'' = f' < 0$, segue che F è una funzione concava. In particolare il valore $F(5)$ è dato dall'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$ ovvero da 11; $F'(5) = f(5) = 0$.
Ragionando in modo del tutto simile per gli archi DE, EF e per $x \geq 8$, si ricava il seguente grafico qualitativo.



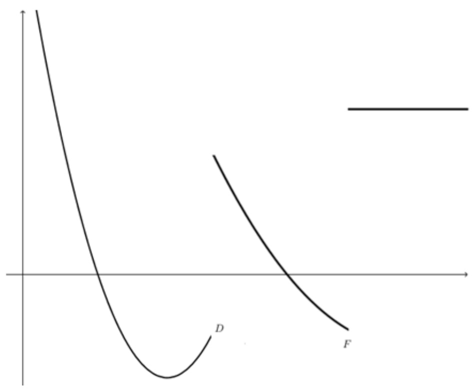
2 a)
Per tracciare il grafico di $y = |f'(x)|$ basta "confermare" le parti positive (ad ordinata positiva) del grafico di f' e "ribaltare" attorno all'asse delle x quella negativa.



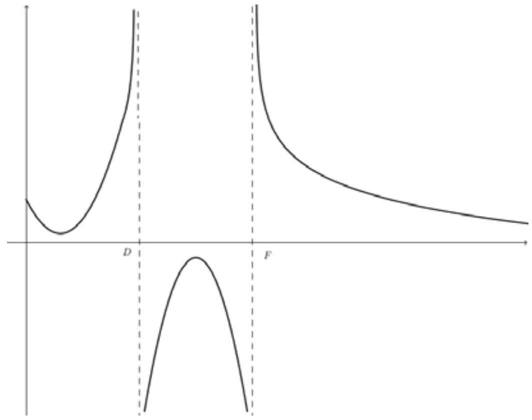
2 b)
Per tracciare il grafico di $y = |f(x)|'$, cominciamo a tracciare quello di $|f(x)|$.



Notiamo che in corrispondenza dell'arco AD e per $x \geq 8$, il grafico di $|f|$ naturalmente coincide con quello di f e quindi il grafico di $|f|'$ si ottiene ripetendo esattamente quanto detto nel punto **1 a)**.
Per quanto riguarda l'arco DF del grafico di $|f|$, si ragiona in modo simile e si ottiene quindi la seguente figura da cui si deduca che la funzione $y = |f(x)|'$ non è definita per $x = 5$ e $x = 8$ (punti angolosi per il grafico di $|f|$).



2 c)
Cominciamo a considerare il grafico della funzione f limitatamente all'arco AD. Da $y = 1/f$ e $y' = -f'(x)/f^2(x)$, segue che $y(0) = 0$ e che y tende a $+\infty$ per x che tende a 5 da sinistra ($x = 5$ è per y equazione di un asintoto verticale); inoltre, quando f era crescente (decrescente), y risulta decrescente (crescente). In particolare $y(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{4}$.
Si ragiona in modo del tutto analogo per l'arco DF e per $x \geq 8$.



3)
Siccome le funzioni in questione sono tutte continue, l'uguaglianza utile per rispondere a questa domanda è data dal cosiddetto teorema di Lagrange per il calcolo integrale: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, dove $c \in (a, b)$.

$$f(c) = \frac{1}{8}\int_0^8 f(x)dx = \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{5}{4}$$

$$|f(c)| = \frac{1}{8}\int_0^8 |f(x)|dx = \frac{1}{8} \cdot 12 = \frac{3}{2}$$

$$f'(c) = \frac{1}{6}\int_1^7 f'(x)dx = \frac{1}{6} \cdot [f(7) - f(1)] = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4} - 4\right) = -\frac{19}{24}$$

$$F(x) = \int 2(x-8)dx = (x-8)^2 + c$$

Poiché la F passa per il punto (8,10) si ricava che $c = 10$. Si ha quindi:

$$F(c) = \int_9^{10} [10 + (x-8)^2]dx = \frac{37}{3}$$

4)
La generica equazione della retta tangente in un punto $x = c$ al grafico di una funzione f è:

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x-c)$$

Abbiamo allora, per la retta tangente al grafico di F:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0)$$

ovvero

$$y = x$$

Per la retta tangente nel punto $x = 8$:

$$y - F(8) = F'(8)(x-8)$$

ovvero

$$y = 10$$