

Poliedri (omaggio a Ugo Adriano Graziotti)

I poliedri e il loro studio riempiono, potremmo dire, tutta la nostra storia. La letteratura, e non solo matematica, su di essi è sconfinata. Richiamo brevemente alcuni elementi, per poi passare a presentare – anche qui in minima parte – il lavoro di un artista-matematico Adriano Graziotti (1912 – 2000), del quale ho avuto il privilegio di essere amico e con il quale ho condiviso molte giornate. Nel parco della sua casa dove erano collocate alcune delle sue sculture, raffiguranti animali, già molto anziano e malato, trascorrevo il tempo accanto a lui mentre seduto in carrozzina, una spazzola di metallo in mano, “lisciava” le sue opere (un’opera non è mai conclusa, mi diceva). Spesso rimanevamo per lungo tempo in silenzio: non ho mai comunicato tanto con un essere umano!

La prima costruzione dei cinque poliedri regolari è dovuta, quasi sicuramente, alla scuola Pitagorica. Sempre **Proclo** a proposito di Pitagora afferma: *“Egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari)”*.

Platone assegna a queste figure un ruolo importante nella sua filosofia. Nel dialogo Timeo, egli associa ai quattro elementi da cui trae origine il mondo, quattro dei cinque poliedri:

fuoco	—————▶	tetraedro
terra	—————▶	cubo
aria	—————▶	ottaedro
acqua	—————▶	Icosaedro

Utilizza solo 4 elementi poiché tanti erano gli elementi fondamentali secondo la filosofia antica. Al dodecaedro, come abbiamo già visto, dà **un ruolo di ornamento e di completamento**.

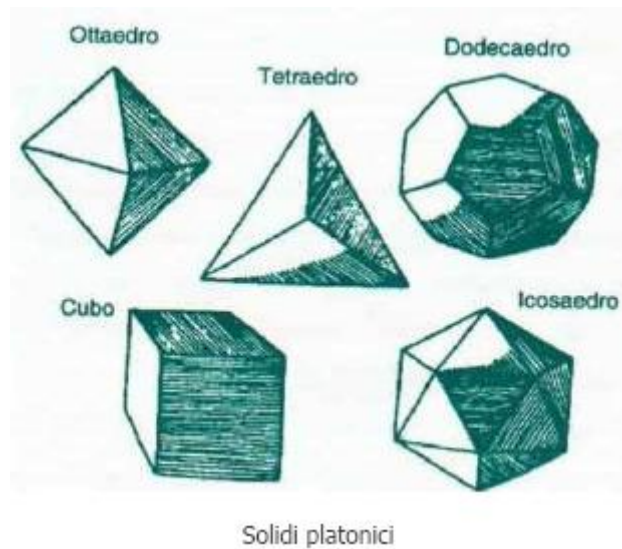
Un **poliedro** si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono pure congruenti tra loro. Per questo motivo se ne possono costruire solo cinque.

Ritroviamo i cinque poliedri con **Euclide**. Infatti, nel XII libro degli *“Elementi”*, Euclide propone di inscrivere ciascun poliedro in una sfera di dato diametro e quindi di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto ed il diametro della sfera circoscritta. In tal modo le misure degli spigoli diventano tra loro rapportabili.

Nell’ultimo capitolo del suo libro, Euclide dimostra che non ci possono essere altri poliedri regolari al di fuori dei cinque.

Un poliedro ha almeno 4 facce e in tal caso si chiama **tetraedro**.

Un poliedro con 6, 8, 12, 20 facce si chiama **esaedro**, **ottaedro**, **dodecaedro**, **icosaedro**.



Un poliedro è una parte finita di spazio, nel senso che non contiene rette o semirette. Le parti finite di spazi sono dette **solidi**.

Dopo Euclide, **Archimede** si occupò dei poliedri, ma non di quelli strettamente regolari.

Egli richiede che:

- Le facce siano dei poligoni regolari, anche diversi tra loro (ad esempio: triangoli equilateri, quadrati).
- Le facce poligonali devono essere disposte nello stesso modo intorno ad un vertice.

Si parla in tal caso di **poliedri semiregolari o Archimedei**. Anche per questi solidi c'è un numero limitato di possibilità: in tutto **13**.

Piero della Francesca nel trattato "*De quinque corporibus regularibus*" sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano l'eterna perfezione.

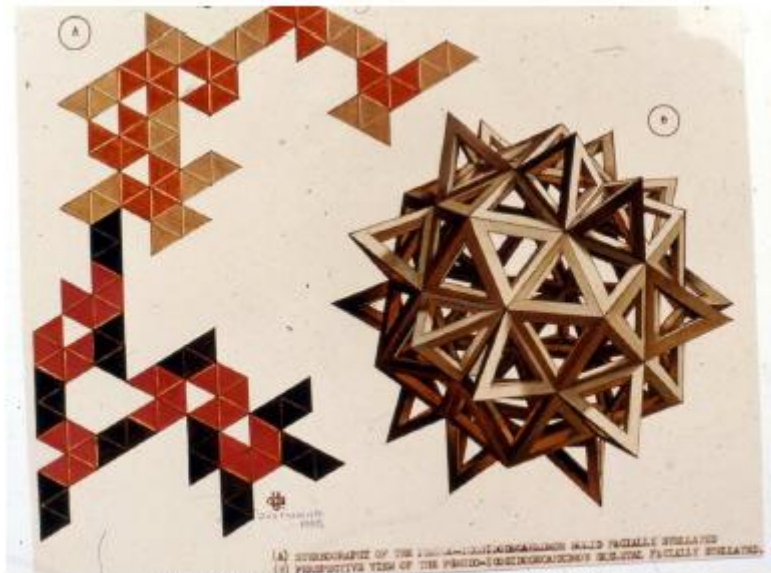
Di questo trattato esiste una versione in volgare nella "*Divina Proporzione*" di **Fra' Luca Pacioli**. I disegni per questo libro sono stati eseguiti da **Leonardo da Vinci**.

Adriano Graziotti ha "costruito" una grandiosa collezione di poliedri, tutti realizzati manualmente da lui – di cui un centinaio sono esposti al Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" della Sapienza di Roma – scoprendo anche forme nuove.



Poliedri realizzati da Ugo Adriano Graziotti

Dei poliedri ha studiato inoltre lo sviluppo **stereometrico**. Cioè il dispiegamento e la proiezione sul piano di un poliedro. Scienza nota fin dall'antichità, particolarmente utile per visualizzare le modalità di connessione degli spigoli dei poligoni regolari che formano il solido. La successione dei poligoni può essere colorata secondo principi cromatici e successioni differenti che costituiscono, a tutti gli effetti, un vero e proprio linguaggio musicale.



U. Adriano Graziotti, Sviluppo stereometrico

Ha esplorato anche a fondo il problema della **dualità**. Lo studio della geometria classica che prende in esame le proprietà metriche delle figure, cioè le misure di angoli e di lati che restano invariati se la figura stessa viene sottoposta a movimenti rigidi cioè traslazioni, rotazioni e ribaltamenti. Sottoponendo le figure ad un diverso tipo di trasformazione si giunge ad una nuova geometria.

E' quello che è accaduto a partire dal '500 con la **teoria della prospettiva**. Il problema di quali siano le proprietà geometriche della figura reale che si conserva passando alla sua immagine mediante proiezione, viene sollevato per la prima volta da **Leone Battista Alberti**.

Ad esempio nella prospettiva due linee che nella realtà sono parallele vengono rappresentate in modo da incontrarsi in un punto, le lunghezze e gli angoli perciò si alterano.

Nel '600 prendono avvio i primi studi di geometria proiettiva ad opera di **Desargues** e **Pascal**.

Un concetto curioso ed importante nella geometria proiettiva è il **principio di dualità**.

Consideriamo i due assiomi relativi al piano proiettivo:

1. **Due punti distinti determinano una ed una sola retta.**
2. **Due rette distinte determinano uno ed un solo punto.**

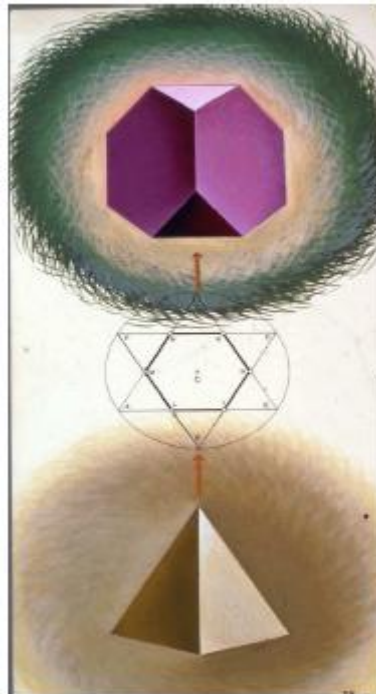


Ebbene, partendo dal primo assioma è possibile ottenere il secondo scambiando fra loro i termini punto e retta e viceversa.

Questo accade per tutti i teoremi della geometria proiettiva e si dice che punto e retta sono elementi duali.

Così due **figure sono duali** tra loro quando una è ottenibile dall'altra sostituendo ad ogni elemento l'elemento duale. Anche per la geometria proiettiva nello spazio vale il principio di dualità.

Tale principio applicato ai poliedri fa corrispondere facce a vertici ed implica così che **da ogni poliedro** possiamo ottenere il suo poliedro duale scambiando fra di loro **il numero delle facce con il numero dei vertici** e lasciando inalterato il numero degli spigoli.



U. Adriano Graziotti, Dualità

E si è dedicato anche allo studio e alla realizzazione di **cupole geodetiche**.

Una **cupola geodetica** è una struttura emisferica composta da una rete di travi giacenti su cerchi massimi (geodetiche). Le geodetiche si intersecano formando elementi triangolari che giacciono approssimativamente sulla superficie di una sfera; i triangoli sono tutti molto simili tra loro ed essendo rigidi garantiscono la robustezza locale, mentre le geodetiche formate dai loro lati distribuiscono gli sforzi locali sull'intera struttura. La cupola geodetica è l'unica struttura costruita dall'uomo che diventa proporzionalmente più resistente all'aumentare delle dimensioni. Quando la struttura forma una sfera completa, viene detta *sfera geodetica*.

Fra tutte le strutture costruite con elementi lineari, la cupola geodetica è quella con il massimo rapporto fra volume e peso racchiuso: strutturalmente sono molto più forti di quanto sembrerebbe guardando le travi che le costituiscono. Durante la costruzione di una nuova cupola geodetica c'è un momento in cui la struttura raggiunge la "massa critica" necessaria e si assesta verso l'alto, sollevando i ponteggi ad essa fissati.

Il progetto di una cupola geodetica è molto complesso, in parte perché non esistono progetti standard di cupole geodetiche pronti, da scalare dimensionalmente secondo le necessità, ma ogni cupola deve essere progettata da zero in base alle dimensioni, alla forma e ai materiali. Esistono dei criteri di progettazione basati sull'adattamento di solidi platonici, come l'icosaedro: essenzialmente consistono nel proiettare le facce del solido sulla superficie della sfera che lo circoscrive. Non c'è un modo perfetto di eseguire una simile operazione, perché non è possibile conservare contemporaneamente i lati e gli angoli originali, il risultato è una soluzione di compromesso basata su triangoli e geodetiche solo approssimativamente regolari.

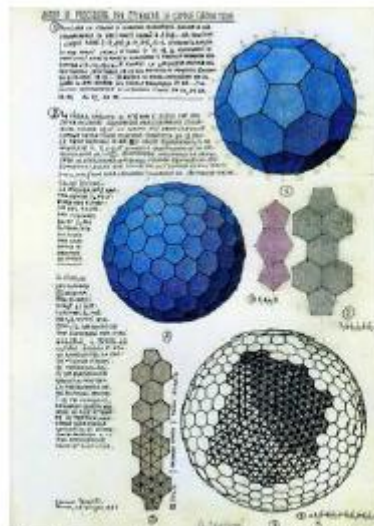
Il progetto di geodetiche si può estendere a superfici di forma qualsiasi, purché curva e convessa; in questi casi però si rende necessario calcolare separatamente ogni trave della struttura, facendo lievitare i costi.

A causa delle difficoltà di progetto delle cupole geodetiche i costruttori tendono a standardizzarle e a costruire solo pochi modelli di dimensioni prefissate.



La Biosfera di Montreal, R. Buckminster Fuller, Isola di Sainte-Hélène.

Gli studi di Graziotti



Studio di cupole geodetiche di A. Graziotti

Altre realizzazioni e immagini relative a Ugo Adriano Graziotti:



Icosaedro stellato solido di U. Adriano Graziotti. Costituito da 20 tetraedri regolari e da 12 piramidi pentagonali rette, ognuna delle quali si compone di cinque triangoli "sublimi", costruiti cioè con l'osservanza della proporzione aurea (la divina proporzione) tra la lunghezza dello spigolo e quella della base.



Studio di U. Adriano Graziotti



San Francisco 1964



Cattolica 1995

Lucio Saffaro scrittore e pittore italiano, ha studiato i solidi e soprattutto gli icosaedri esistenti in natura e li ha rappresentati anche dipingendoli in quadri.



Ritratto di Keplero, Lucio Saffaro, 1967



Lucio Saffaro, Opus CIXI, 1971



Lucio Saffaro, La conoscenza dell'Austro (opus CCXVI), 1975



Lucio Saffaro, Il secondo Palladio, 1974



Il piano di Orfeo (opus CCLXXXIII), 1991