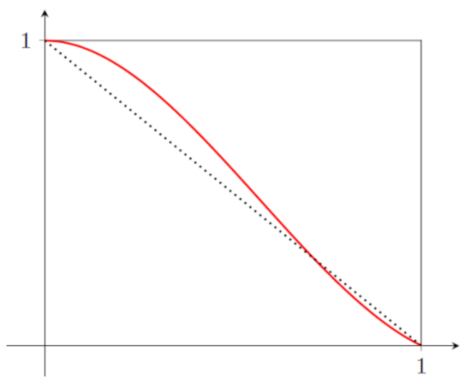
Esame di Stato 2018 – Prova di Matematica

Problema 1

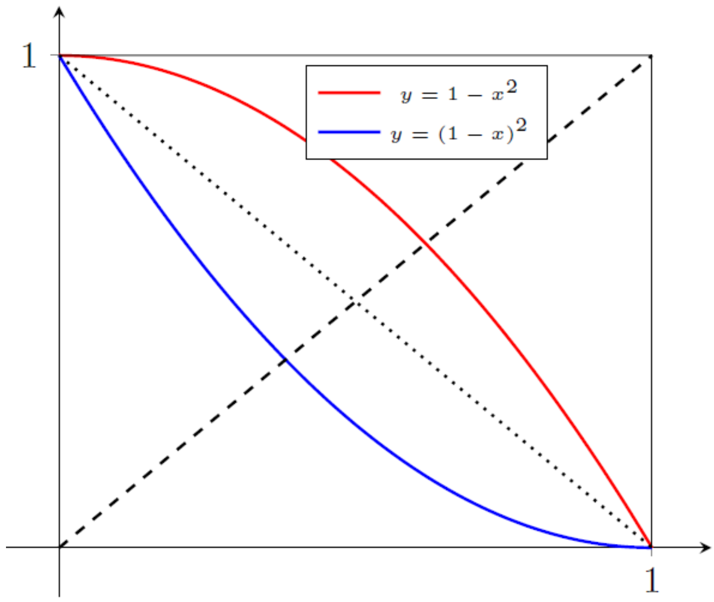
1) La funzione $y = f(x)$ è data da $y = -x + 1$ e la curva chiusa Γ si rappresenta con $|y| + |x| = 1$ essendo $-1 \leq x \leq 1$. In dettaglio la curva Γ si può rappresentare con le quattro funzioni:
   $y = -x + 1$ e $y = x - 1$ per $0 \leq x \leq 1$
   $y = x + 1$ e $y = -x - 1$ per $-1 \leq x \leq 0$

2) Una funzione polinomiale di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$ che soddisfi le condizioni richieste deve essere tale che $c = 1$ (passaggio per (0,1)), $b = 0$ ($f'(0) = 0$), $a = -1$ (passaggio per (1,0)). Dunque $y = -x^2 + 1$.
   L'area della zona colorata è data da:
   $$\int_0^1 (-x^2 + 1)dx = \frac{2}{3}$$
   quantità maggiore di 0,55. Le condizioni richieste per una funzione polinomiale di terzo grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ danno $d = 1$, $c = 0$, $a + b + 1 = 0$.
   Quindi la funzione ha la forma $y = ax^3 - (a + 1)x^2 + 1$.
   L'area della zona colorata è data da:
   $$\int_0^1 [ax^3 - (a + 1)x^2 + 1]dx = \frac{8 - a}{12}$$
   Posto questo valore uguale a 0,55 si ricava $a = \frac{7}{5}$.
   Quindi la funzione polinomiale richiesta ha equazione $y = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$ per $0 \leq x \leq 1$.
   La figura nel primo quadrante è:



3) La verifica che $a_n(x)$ e $b_n(x)$ soddisfano le condizioni a) e b) è un semplice calcolo. La c) dipende da fatto che $0 < x^n < 1$ (per ogni intero positivo n) quando $0 < x < 1$. Per $n \to +\infty$ la parte colorata della funzione $a_n(x)$ tende a riempire tutta la mattonella, mentre quella della funzione $b_n(x)$ tende a diminuire, fino a scomparire.

4) Osserviamo che nella mattonella $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$ la curva $a_2(x) = 1 - x^2$ è al di sopra della diagonale $y = -x + 1$ mentre la curva $b_2(x) = (1-x)^2$ è tutta al di sotto della stessa diagonale. Di conseguenza le mattonelle in cui è caduta una macchia nella zona non colorata sono 1000 per il primo tipo e nessuna per il secondo tipo. In totale 1000.



Osserviamo che lo stesso risultato vale considerando che il braccio meccanico si muova lungo l'altra diagonale (di equazione $y = x$). Infatti, in questo caso, la parte di diagonale (di lunghezza $\sqrt{2}$) non colorata per la funzione $a_2(x) = 1 - x^2$ misura $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ (dove $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ è il punto di intersezione tra diagonale e $a_2(x)$); mentre la parte di diagonale colorata per la funzione $b_2(x) = (1-x)^2$ misura $\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$ (dove $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ è il punto di intersezione tra diagonale e $b_2(x)$).

Quindi il numero di mattonelle danneggiate risulta:

$$0{,}2 \cdot 5000 \cdot \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + 0{,}2 \cdot 5000 \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 1000$$