Esame di Stato 2018 – Prova di Matematica

Problema 2

1) La retta r_k ha equazione $y = kx + 9$. La retta s_k ha equazione $y = (k-3)x + 11$. Mettendo a sistema queste due equazioni si ricava effettivamente $x = \frac{2}{3}$.
2) L'ordinata del punto M è data da

$$\frac{2}{3}k + 9$$

La disequazione

$$\frac{2}{3}k + 9 < 10$$

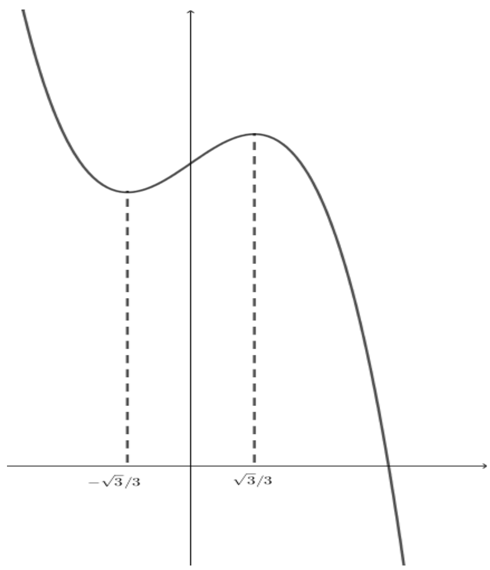
è soddisfatta per:

$$k < \frac{3}{2}$$

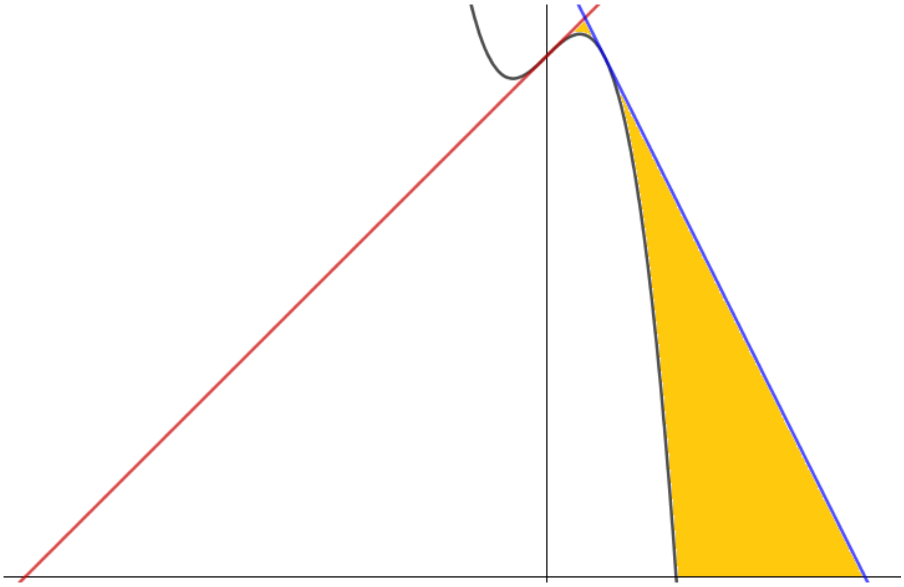
Il più grande intero che la soddisfa è dunque $k = 1$.

Per disegnare Γ_1 (naturalmente definita su tutto l'asse reale) è sufficiente calcolare $f_1'(x) = -3x^2 + 1$ e $f_1''(x) = -6x$. Dallo studio del segno di f_1' si deduce che $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono rispettivamente punti di minimo (con ordinata positiva) e di massimo locali. Dallo studio del segno di f_1'' si deduce che la funzione presenta un punto di flesso in $x = 0$ ed è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Notiamo infine che la funzione per $x \to +\infty$ tende a $-\infty$ e che per $x \to -\infty$ tende a $+\infty$.

Il grafico di Γ_1 è il seguente:



3) La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area delle regioni del piano che soddisfano la condizione $y_p > f_1(x)$ e l'area del triangolo T.



Cominciamo da quest'ultima:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{3} \cdot \left(\frac{11}{2} + 9\right) = \frac{841}{12}$$

L'area che figura al numeratore della probabilità da calcolare è quella evidenziata in giallo nella figura ovvero quella ottenuta dalla differenza tra l'area del triangolo T e la somma di due aree: quella del triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,9)$ e $(-9,0)$ e quella sottesa dalla cubica e delimitata dall'asse delle x e dalle rette $x = 0$ e $x = c$ (dove con c abbiamo indicato l'ascissa dello zero della cubica).

L'area A_1 del triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,9)$ e $(-9,0)$ è data da:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = \frac{81}{2}$$

L'altra area A_2 è data dal seguente integrale:

$$A_2 = \int_0^c (-x^3 + x + 9)dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c$$

Si verifica che un valore approssimato (con due cifre decimali) di c, è dato da 2,24.

Eseguendo i calcoli (approssimati) si trova $A_2 = 16{,}38$.

Quindi la probabilità risulta:

$$P = \frac{A_T - A_1 - A_2}{A_T} = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16{,}38}{\frac{841}{12}} = 0{,}19$$

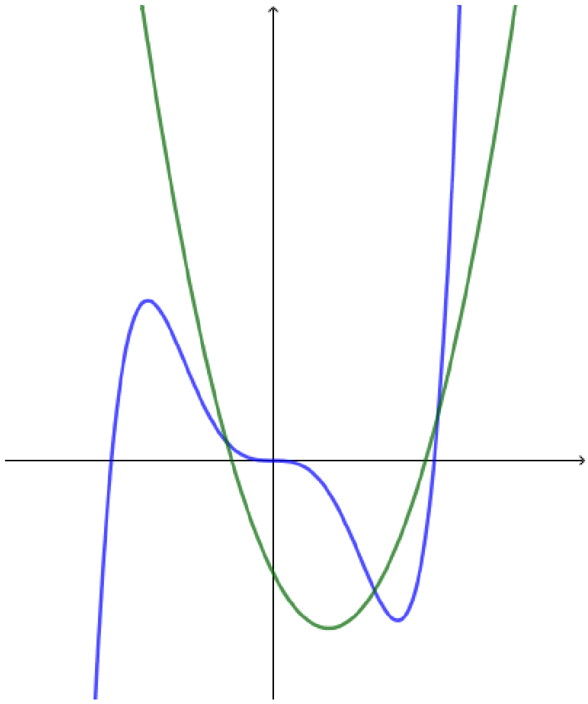
4) Il coefficiente angolare della retta tangente a Γ_1 in $N = (a, -a^3 + a + 9)$ è $-3a^2 + 1$. Di conseguenza l'equazione della retta normale a Γ_1 in N è:

$$y = -a^3 + a + 9 + \frac{1}{3a^2 - 1}(x - a)$$

Imponendo il suo passaggio per l'origine si ottiene:

$$-3a^5 + 4a^3 + 27a^2 - 2a - 9 = 0$$

Per determinarne il numero di soluzioni confrontiamo la parabola di equazione $y_1 = 27a^2 - 2a - 9$ e la funzione $y_2 = 3a^5 - 4a^3$.



Dai grafici delle due funzioni e dal loro confronto si deduce che le intersezioni sono effettivamente tre (per il confronto è essenziale ricordare che y_2 è un infinito di ordine superiore a y_1 per $x \to +\infty$ e verificare che, in corrispondenza dell'intersezione positiva con l'asse delle x di y_2 la funzione y_1 assume valore positivo).

In generale la retta normale alla funzione $y = P_n(x)$, polinomio di grado n-esimo, in un punto $x = a$ ha per equazione:

$$y - P_n(x) = \frac{-1}{P_n{}'(a)}(x - a)$$

Pensando al passaggio per l'origine, dopo aver posto $P_n' = Q_{n-1}$, si ottiene l'equazione:

$$P_n(a) \cdot Q_{n-1}(a) + a = 0$$

È un'equazione polinomiale di grado $n + n - 1 = 2n - 1$ e ammette quindi al più $2n - 1$ radici ciascuna.