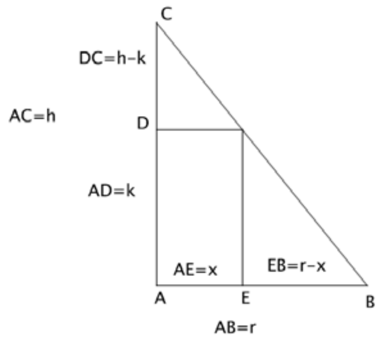
Esame di Stato 2018 – Prova di Matematica

Questionario

1. Siano r il raggio di base del cono e h la sua altezza.



Detti x e k rispettivamente il raggio del cilindro inscritto e la sua altezza, per similitudine di triangoli si ha:

$$\frac{h}{r} = \frac{k}{r-x}$$

Da qui si ottiene $k = \frac{h(r-x)}{r}$.

Il volume del cilindro è quindi: $V = \frac{\pi x^2 h(r-x)}{r}$.

Confrontando V con la metà del volume del cono (che è uguale a $\pi r^2 h/6$) dopo aver semplificato occorre confrontare $x^2(r-x)$ con $\frac{1}{6}r^3$. La prima espressione ammette massimo per $x = \frac{2r}{3}$ con valore $\frac{4r^3}{27}$. Che è minore $\frac{r^3}{6}$.

2. Indichiamo con $p(i)$ la probabilità che esca la faccia i. Si ha:

$$\begin{cases} p(1) = 2p(2) \\ p(2) = 2p(3) \\ p(3) = 2p(4) \\ p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1 \end{cases}$$

Indichiamo con p la probabilità che esca 4. Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{cases} p(4) = p \\ p(3) = 2p \\ p(2) = 4p \\ p(1) = 8p \\ 8p + 4p + 2p + p = 1 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo:

$$p = \frac{1}{15}$$

La probabilità che escano due risultati uguali è:

$$p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 + p(4)^2 = \frac{1}{15^2}(1 + 4 + 16 + 64) = \frac{85}{225}$$

3. Bisogna risolvere il sistema dato dall'uguaglianza delle due funzioni e delle loro derivate:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5 = -4x + k \\ 3x^2 - 8x = -4 \end{cases}$$

Si verifica che il sistema è soddisfatto per $x = \frac{2}{3}$ a cui corrisponde $k = \frac{167}{27}$ e per $x = 2$ a cui corrisponde $k = 5$.

4. Per $x \to +\infty$ il numeratore di $f(x)$ tende a $+\infty$ mentre il denominatore si mantiene limitato, positivo e discosto dallo zero.
Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste e vale $+\infty$ (il ragionamento poteva essere formalizzato ricorrendo al teorema o criterio del confronto).
Per $x \to -\infty$ numeratore e denominatore di $f(x)$ sono entrambi ∞ ma l'infinito di ordine superiore (la funzione esponenziale per $x \to -\infty$) si presenta al denominatore.
Il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$ vale dunque zero.

5. Detta h l'altezza del rettangolo e $2r$ la sua base, il perimetro della figura $\pi r + 2r + 2h$ deve essere uguale a 2. Da cui $h = 1 - r(1 + \pi/2)$.
L'espressione dell'area è $S = 2rh + \pi r^2/2$. Sostituendo i valori di h in funzione di *r* si ha:

$$S = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)r^2 + 2r$$

che ha il massimo per $r = \frac{2}{4+\pi}$ Pertanto la base del rettangolo è data da $2r = \frac{4}{4+\pi}$ e l'altezza $h = \frac{2}{4+\pi}$.

6. Siano (a, a, a) le coordinate. Questo punto appartiene anche alla retta passante per $T(-4,0,1)$ e perpendicolare al piano tangente π. Retta che è rappresentabile con equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Dalle equazioni $-4 + 3t = -t = 1 - 2t = a$ si ricava $t = a = -1$. Il centro C ha dunque coordinate $(-1, -1, -1)$ e l'equazione della sfera è:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14$$

essendo $\sqrt{14}$ la distanza di C da T.

7. Deve essere:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = 10$$

Calcoliamo l'integrale:

$$[x^3 + 3x]_a^{a+1} = (a + 1)^3 + 3(a + 1) - a^3 - 3a = 3a^2 + 3a + 4$$

Poniamo il valore ottenuto uguale a 10:

$$3a^2 + 3a + 4 = 10$$

$$3a^2 + 3a - 6 = 0$$

da cui si ottengono due soluzioni

$$a_1 = 1 \text{ e } a_2 = -2$$

8. Indichiamo con X il numero di partite, su 12, vinte dal giocatore 1. Vale:

$$P(X = k) = \binom{12}{k}\frac{1}{2^{12}}$$

Uno dei giocatori vince in un numero di partite minore o uguale a 12 se X è minore o uguale a 2. La probabilità di questo evento è:

$$P(X \geq 10) + P(X \leq 2) = \frac{1}{2^{12}}\left[\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12}\right] = \frac{79}{2^{11}}$$

9. Il triangolo ABC è equilatero infatti $AB = AC = BC = \sqrt{8}$.

Con una sostituzione si verifica che i tre punti appartengono al piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$.

Calcoliamo l'equazione del piano assiale β del segmento AB (ovviamente passante per C).

Direzione $AB = (0, -2, 2)$, equazione del piano β: $-2(y - 1) + 2(z - 2) = 0$.

Analogamente calcoliamo l'equazione del piano assiale γ del segmento BC.

Direzione $BC = (-2,2,0)$ equazione $\gamma : -2(x-3) + 2(y-1) = 0$.

I punti richiesti si trovano sulla retta d'intersezione dei piani β e γ. In forma parametrica questa retta ha equazioni

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Si richiede che il punto $(3+t, 1+t, 2+t)$ appartenente a questa retta abbia distanza uguale a $\sqrt{8}$ da A (oppure da B oppure da C):

$$A^2 = t^2 + t^2 + (2+t)^2 = 8$$

da cui si ricava

$$3t^2 + 4t - 4 = 0$$

ovvero

$$t_1 = -2 \text{ e } t_2 = \frac{2}{3}$$

I punti richiesti hanno coordinate $(1, -1, 0)$ e $\left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

10. Calcoliamo y' e y'':

$$y' = 2ke^{kx+2}$$

$$y'' = 2k^2e^{kx+2}$$

Andando a sostituire, otteniamo:

$$2k^2 - 4k - 6 = 0$$

da cui

$$k = 3 \text{ e } k = -1$$