1. La funzione $g(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore di a e b. Per $a \neq 0$ si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$
e la funzione assume valori positivi e negativi (il segno dipende dal fattore $ax + b$). Si può quindi applicare il teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di un massimo e un minimo assoluti.
Se f e g si intersecano nel punto di coordinate $A(2, 1)$ allora
$$\begin{cases} 1 = f(2) = 4a - 2 + b \\ 1 = g(2) = 2a + b \end{cases}$$
Risolvendo il sistema si trova che $a = 1$ e $b = -1$

2. Con i valori $a = 1$ e $= -1$ le due funzioni diventano: $f(x) = x^2 - x - 1$ e $(x-1)e^{2x-x^2}$ Osserviamo che $g(x) = (x-1)e^{1-(x-1)^2}$ la nuova scrittura evidenzia la simmetria del grafico della funzione rispetto al punto $(1, 0)$. Infatti ponendo $t = x - 1$ si ha $\overline{g}(t) = te^{1-t^2}$. Dunque $\overline{g}(-t) = -\overline{g}(t)$: simmetria dispari.
Con la stessa trasformazione per la funzione f si ha $\overline{f}(t) = t^2 + t - 1$
Studiamo le funzioni così traslate. La $\overline{f}(t)$ è una parabola convessa con il punto di minimo nel vertice $V(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$
Per studiare $\overline{g}(t)$ calcoliamo la derivata prima $\overline{g'}(t) = (1 - 2t^2)e^{1-t^2}$
Il segno e gli zeri della derivata prima coincidono con quelli del fattore $1 - 2t^2$.
$\overline{g}'(t) = 0$ per $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{g}'(t) > 0$ per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\overline{g}'(t) < 0; t < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ punto di minimo assoluto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2e}}{2})$
$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ punto di massimo assoluto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2e}}{2})$
Controlliamo che le due funzioni siano tangenti nel punto $B(0, -1)$ che a seguito della traslazione, è diventato $\overline{B}(-1, -1)$
verifichiamo che le due funzioni $\overline{g}'(-1) = -1 = \overline{f}'(-1) = -1$ Disegniamo il grafico delle due funzioni:

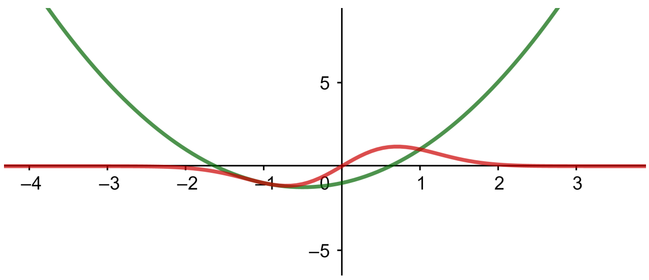

Figure 1:

Per determinare l'area della regione S notiamo che nell'intervallo $[-1, 1]$ $\overline{g} \geq \overline{f}$ quindi:
$$S = \int_{-1}^{1} (\overline{g} - \overline{f})dt = \int_{-1}^{1} [te^{1-t^2} - (t^2 + t - 1)]dt = \int_{-1}^{1} (t^2 + t - 1)dt$$

Essendo $\overline{g}(t)$ una funzione dispari su un intervallo simmetrico.

$$\Big[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t\Big]_{-1}^{1}=-\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\Big)+\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\Big)=\frac{4}{3}$$

3. Per il teorema di Ampére la circuitazione del campo magnetico è pari alla somma delle correnti concatenate alla spira S.

   I punti P_1, P_2, P_3 del nuovo sistema di riferimento hanno coordinate $P_1(\frac{1}{2},0)\ P_2(\frac{1}{2},1)\ P_1(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
   I punti sono interni alla spira se le rispettive ordinate sono comprese tra $f(1/2)$ e $g(1/2)$.
   $f(1/2)=-1/4\ g(1/2)=\frac{1}{2}e^{3/4}$
   Dei punti dati, solo P_1 e P_2 sono interni ad S, pertanto solo i_1 e i_2 sono correnti concatenate ad S, mentre i_3 non darà alcun contributo.

   $$\Gamma(\vec{B})=\mu_0 i_1+\mu_2 i_2=\mu(2,0A+i_2)$$

   Si assume come positivo il verso della corrente data, per cui si considera la circuitazione lungo S in senso orario.
   Se i_1 e i_2 sono concordi $\Gamma(\vec{B})$ sarà sempre positiva. Se i_2 ha verso opposto rispetto a i_1, $\Gamma(\vec{B})$ è positiva se $i_2<2,0A$ nulla se $i_2=2,0A$ ed è negativa se $i_2>2,0A$.

4. Facendo ruotare la spira S in un campo magnetico uniforme si produce una f.e.m. indotta secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

   $$fem=-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

   Dove $\Phi(\vec{B})=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$
   B e S sono costanti, cambia però l'angolo tra $\vec{B}$ ed $\vec{S}$, $\theta=\omega t$ per cui $\Phi(\vec{B})=BS\cos(\omega t)$

   $$fem=-\frac{d}{dt}[BS\cos(\omega t)]=-BS(-\omega\sin\omega t)=\omega BS\sin\omega t$$

   $i=\dfrac{fem}{R}=\dfrac{\omega BS}{R}\sin\omega t$. La corrente è massima quando $\sin\omega t=1$.
   $i_{Max}=\dfrac{\omega BS}{R}$

   $$\omega=\frac{i_{max}R}{BS}=\frac{5,0A\times10^{-3}\cdot0,2\Omega}{1,5\times10^{-2}T\cdot\frac{4}{3}m^2}=5,0\times10^{-2}\frac{rad}{s}$$