11 – Le potenze aventi per esponenti delle radici

Dopo aver dato un significato a potenze aventi come esponente un qualsiasi numero reale, ci si chiede che caratteristica abbia una potenza a base reale e esponente irrazionale.
Poiché non è materialmente possibile lavorare con un numero irrazionale con infinite cifre dopo la virgola, si è giocoforza costretti ad approssimarlo ad un numero razionale e poi a trasformarlo in frazione. Dunque le potenze a esponente irrazionale vengono definite tramite le potenze con esponente fratto.

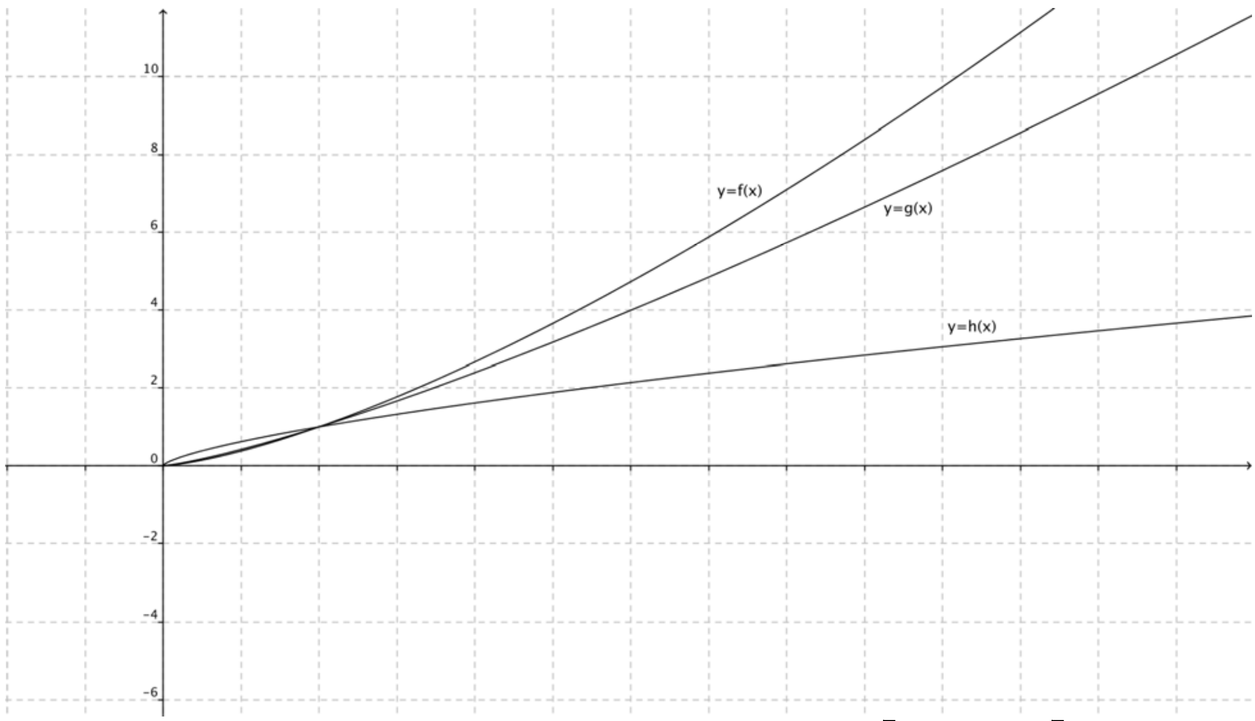

Fig. 9 – $f(x) = x^{\sqrt{2}}$; $g(x) = x^{\sqrt[3]{2}}$; $h(x) = x^{\ln(2)}$

L'unica accortezza da seguire nell'approssimare le potenze con esponente irrazionale a potenze con esponente fratto è quella, adottata da calcolatrici scientifiche, Derive e Excel, di ridurre la frazione all'esponente ai minimi termini prima di applicarla alla base per non cadere in contraddizioni come la seguente:

$$(-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[3]{27} = 3$$

e contemporaneamente:

$$(-27)^{\frac{2}{6}} = (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Il prof. Leonardo Sasso svela ancor meglio l'arcano:

supponiamo di volere definire $3^{\sqrt{2}}$; sappiamo che: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots\ldots$

Consideriamo i valori approssimati di $\sqrt{2}$ ottenuti per troncamento alla prima, seconda, terza, … cifra decimale. Possiamo costruire la successione delle potenze che hanno come base 3 e come esponenti tali troncamenti :

$3^1 \qquad 3^{1,4} \qquad 3^{1,41} \qquad 3^{\frac{1414}{1000}} \qquad \ldots\ldots$

che può essere riscritta nella forma:

$3^1 \qquad 3^{\frac{14}{10}} \qquad 3^{\frac{141}{100}} \qquad 3^{\frac{1414}{1000}} \qquad \ldots$

Si può dimostrare che questa successione (costituita da potenze ad esponente *razionale*) converge; si definisce $3^{\sqrt{2}}$ il numero cui converge tale successione.

Se volessimo ripetere lo stesso procedimento per definire $(-3)^{\sqrt{2}}$ ci sarebbe un ostacolo, dovuto al fatto che una potenza a esponente razionale $a^{\frac{m}{n}}$, con $a < 0$, può non esistere a seconda dei valori di m ed n.

Ripercorrendo la stessa strada svolta per definire $3^{\sqrt{2}}$, otterremmo la successione:

$(-3)^1 \qquad (-3)^{\frac{14}{10}} \qquad (-3)^{\frac{141}{100}} \qquad (-3)^{\frac{1414}{1000}} \qquad \ldots \qquad$ [*]

e troveremmo per esempio che il termine :

$$(-3)^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{(-3)^{141}}$$

non esiste essendo una radice di indice pari con radicando negativo.

Il problema è quindi che nella successione [*] un infinito numero di termini non ha significato e ciò porta come conseguenza che non è possibile garantire la convergenza della successione. Per questo motivo non è possibile dare un senso alla scrittura a^b, se $a < 0$ e b è irrazionale.