2 – Le radici n-me di indice dispari - Esempio: la radice cubica

L'estrazione di radice è, quando possibile, l'operazione inversa dell'elevamento a potenza:

$$\forall x \in \Re \wedge \forall y \in \Re : y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x, \forall n \in N - \{0\}$$

dove x è detto radicando e n indice della radice.
Da un punto di vista insiemistico, l'operazione di estrazione di radice definisce in generale una relazione perché a un dato numero reale può associare nessuna, una o più radici. Se indichiamo con $\Re_a$ il sottoinsieme dei numeri Reali per i quali è lecito calcolare la radice, possiamo scrivere:

$$\forall x \in \Re_a \subset \Re \wedge \forall n \in N - \{0\},\ \exists y \in \Re \ni' \sqrt[n]{x} = y$$

che si legge: "per ogni x, numero reale appartenente al sottoinsieme $\Re_a$ di $\Re$, e per ogni numero naturale n non nullo, esiste, ma non è detto che sia unico, un numero reale y tale che la radice di indice n di x sia uguale a y"

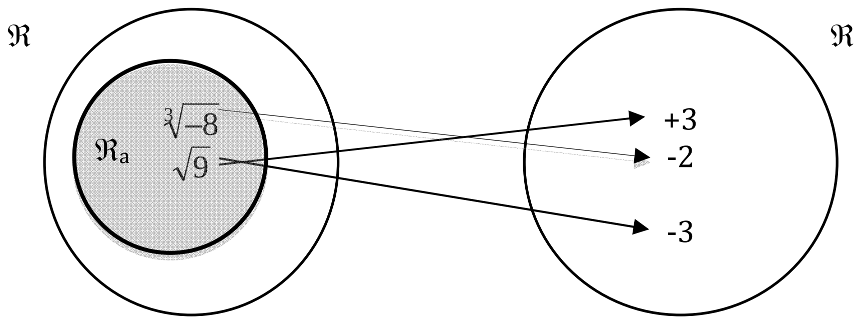

Fig.1- La relazione radice

Al variare del numero naturale n, si ottengono tutti i componenti di una famiglia infinita di radici che possono definire delle relazioni, ma anche, in particolari casi, delle funzioni.
Se n è dispari, l'operazione di estrazione di radice definisce una funzione perché ad ogni numero reale associa una ed una sola radice positiva o negativa, concorde col segno della variabile indipendente:

$$\forall x \in \Re \wedge \forall n \in N - \{0\},\ n\ \ dispari,\ \exists| y \in \Re \ni' y = \sqrt[n]{x}$$

che si legge: "per ogni x, numero reale appartenente a $\Re$, e per ogni numero naturale n dispari, esiste un unico numero reale y tale che y sia uguale alla radice di indice n di x "

Esempio: la radice cubica

$$\forall x \in \Re,\ \exists| y \in \Re \ni' y = \sqrt[3]{x}$$

che si legge: "per ogni x, numero reale appartenente a $\Re$, esiste un unico numero reale y tale che y sia uguale alla radice cubica di x"
I casi possibili secondo il segno del radicando sono:

1. x>0 $\Rightarrow \exists| y \in \Re_+ \ni' y = \sqrt[3]{x}$

2. x=0 $\Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0$

3. x<0 $\Rightarrow \exists | y \in \Re_{-} \ni' y = \sqrt[3]{x}$

scritture che si leggono nel seguente modo:

1. “se x è positivo, allora esiste un unico numero reale positivo y tale che sia uguale alla radice cubica di x”
2. “se x è uguale a zero, allora la radice cubica di x è uguale a zero”
3. “se x è negativo, allora esiste un unico numero reale negativo y tale che sia uguale alla radice cubica di x”