

4 - Le radici aritmetiche e il valore assoluto

La radice aritmetica con indice pari si comporta, nei confronti di un numero reale x qualsiasi, che abbia l'esponente uguale all'indice della radice, in modo analogo ad un valore assoluto; in simboli:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ } n \text{ pari} \wedge \forall x^n \in \mathbb{R}_+ : \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

che leggiamo: "per ogni numero naturale n , pari, e per ogni potenza con esponente n appartenente ai numeri reali positivi o nulli, risulta la radice di indice n della potenza di x di esponente n , uguale al valore assoluto di x "

La necessità del valore assoluto dipende dal fatto che occorre garantire la concordanza di segno con la radice aritmetica (che per definizione è non negativa). A conferma di ciò analizziamo le due funzioni:

$$y = \sqrt{x^2} \text{ e } y = |x|$$

per essere uguali devono avere lo stesso grafico e quindi non solo lo stesso dominio (valori della x) o campo di esistenza, ma anche lo stesso codominio (valori assunti dalla y). Per esempio le due funzioni $y = \sqrt{x^2}$ e $y = |x|$ hanno lo stesso codominio \mathbb{R}_+ e hanno lo stesso grafico come si evince dalla Fig. 4 ottenuta col programma applicativo Geogebra.

Se, come contro esempio, confrontiamo invece: $y = \sqrt{x^2}$ e $y = x$ ci accorgiamo che la seconda ha come codominio tutto \mathbb{R} . Quindi le due funzioni non possono essere uguali. E in effetti i loro grafici sono diversi, come si evince dalla Fig. 5.

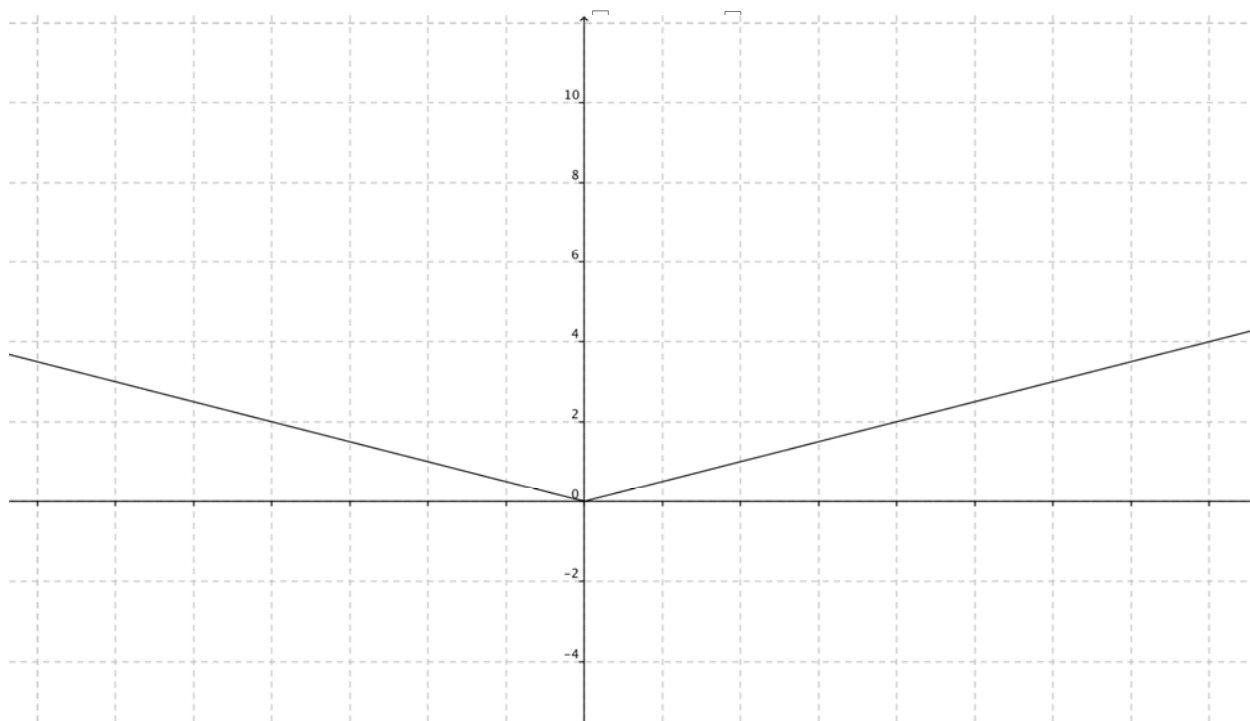


Fig. 4 - grafico comune alle due funzioni $y = \sqrt{x^2}$ e $y = |x|$

□

□

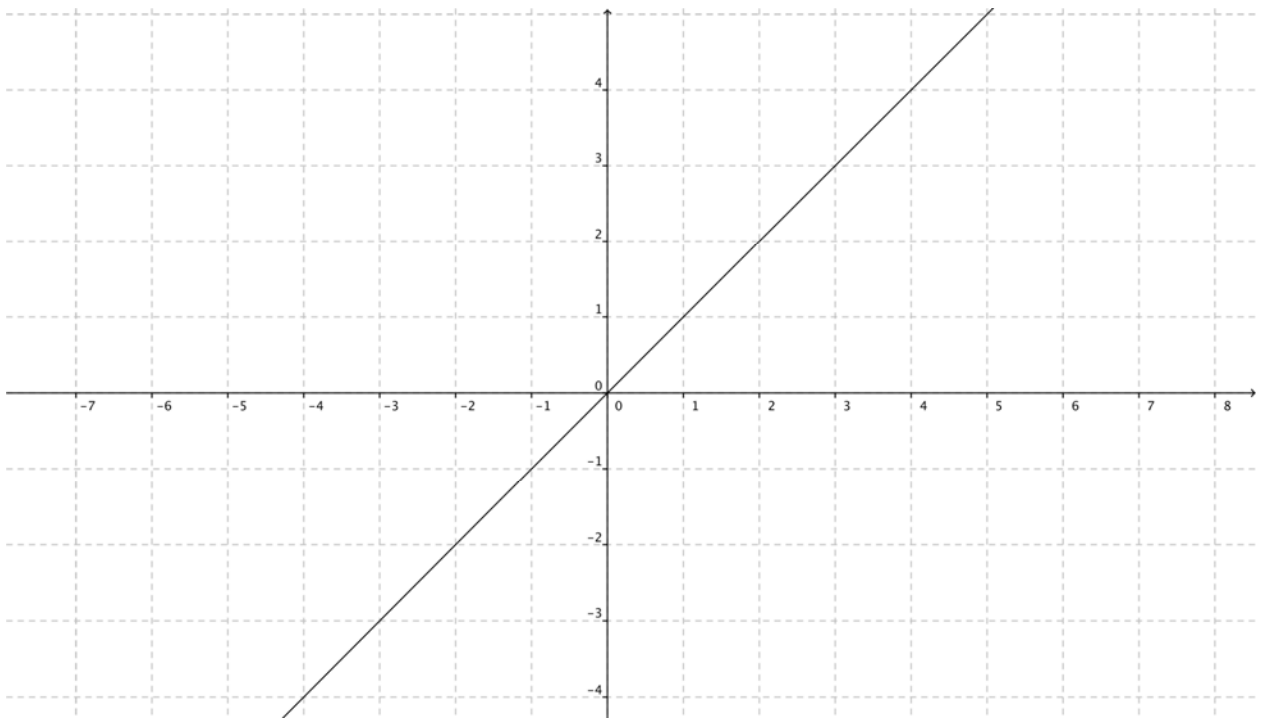


Fig. 5 - grafico della funzione $y = x$

Regola: tutte le volte che portiamo fuori dalla radice di indice pari un fattore che ha l'esponente uguale all'indice, per conservare l'uguaglianza, dobbiamo metterlo in valore assoluto.

Esempi:

$$1) \sqrt[4]{x^4 + x^4 y^2} = \sqrt[4]{x^4(1 + y^2)} = |x| \sqrt[4]{1 + y^2}$$

$$2) \sqrt{a^3 + 2a^2b + ab^2} = \sqrt{a(a^2 + 2ab + b^2)} = \sqrt{a(a+b)^2} = |a+b| \sqrt{a}$$