

# Mostrare o Dimostrare

Marco Andreatta

Marco Andreatta



# LA FORMA DELLE COSE

L'alfabeto della geometria

RACCONTARE LA MATEMATICA

il Mulino

Marco Andreatta

$$A_{\text{sfera}} = 4\pi r^2$$

Archimede, l'arte  
della misura



il Mulino

*Amore e Psiche*

Canova 1787





Platone 427-347 a.C.  
*Menone e Timeo*

# Il Menone, cos'è la virtù e se possa essere insegnata

*.... Anche le opinioni vere, finchè restano, sono cose belle, capaci di realizzare tutto il bene possibile; solo che non acconsentono a rimanere per lungo tempo, e fuggono via dall'anima umana, per cui non hanno un gran significato, a meno che non **s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalità**. Ma proprio in questo compagno Menone, consiste l'anamnesi, quella reminiscenza su cui sopra abbiamo convenuto. Se collegate, esse dapprima divengono **scienza** e, quindi, **cognizioni stabili**. Ecco perché la scienza vale più della retta opinione: **la differenza tra scienza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento**.*

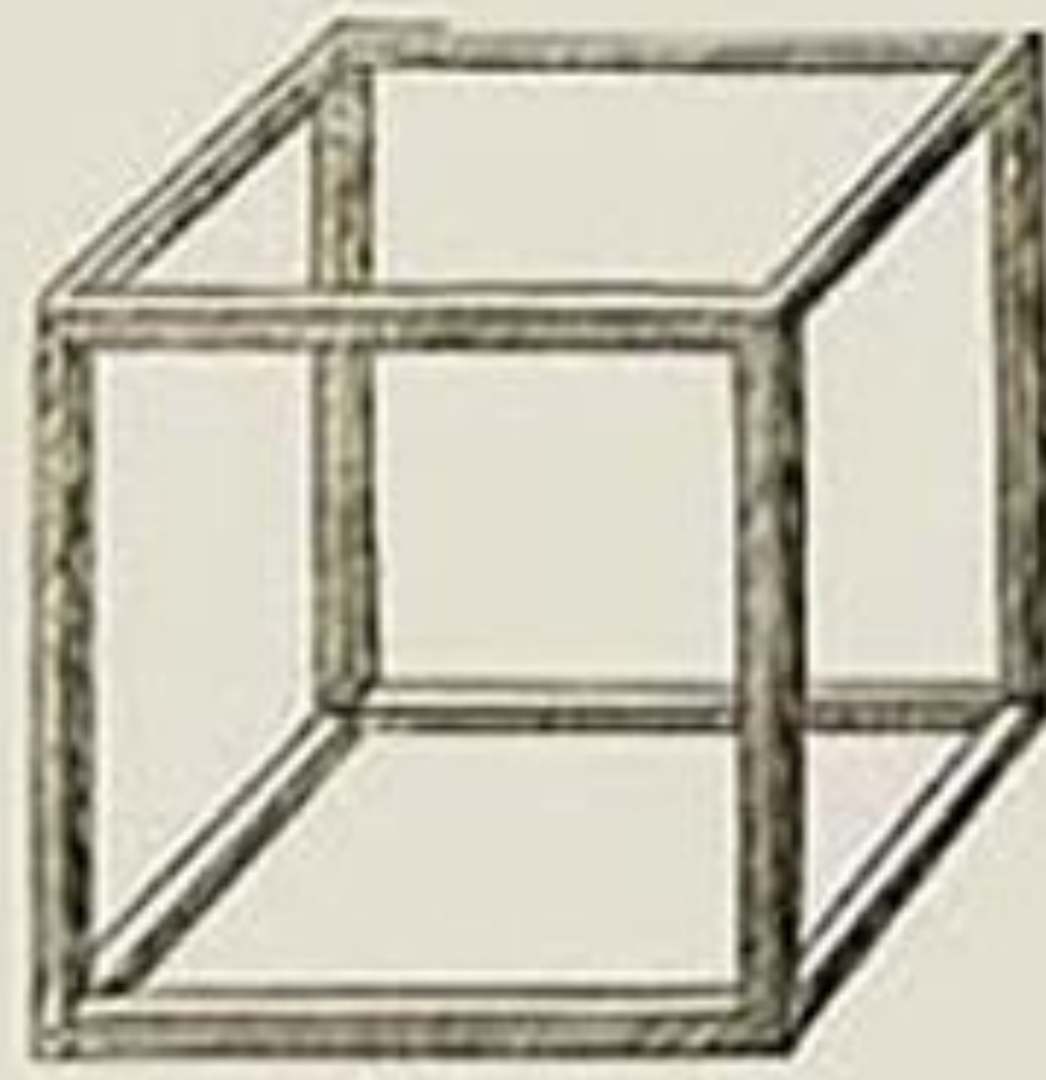
# Menone

*Ma poiché tu, per essere libero, non ti dai cura alcuna di dominar te stesso, e ti prepari anzi a comandare me e comandi, ti asseconderò: non c'è altro da fare! Dobbiamo dunque, sembra, esaminare la "qualità" di una cosa di cui non sappiamo ancora quello "che" essa sia. Se non altro, addolcisci almeno un poco il tuo dominio su di me, e concedimi di esaminare per ipotesi se la virtù sia insegnabile, o cosa sia. E quando dico "per ipotesi", intendo ipotesi nell'uso che spesso ne fanno gli studiosi di geometria, quando qualcuno li interroga, per esempio a proposito di una figura, se questa figura triangolare possa essere iscritta in determinato cerchio, la risposta sarebbe: «Non so ancora se questa figura abbia questa proprietà, ma credo sia di qualche vantaggio alla questione fare un'ipotesi di tal genere ...*

# Timeo



1  
Tetrahedron Frame Yorum



2  
Hexahedron Frame Yorum



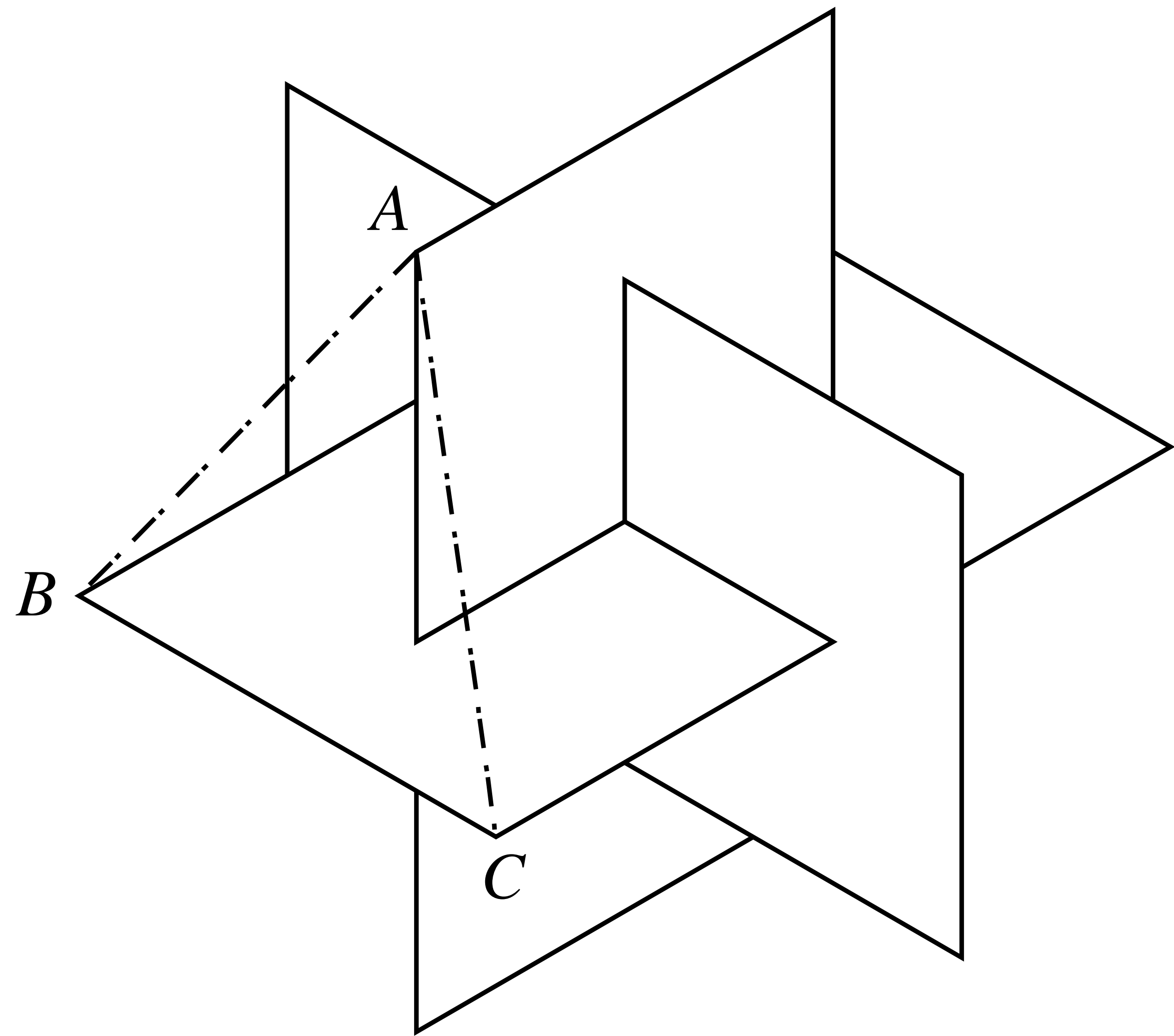
3  
Octahedron Frame Yorum



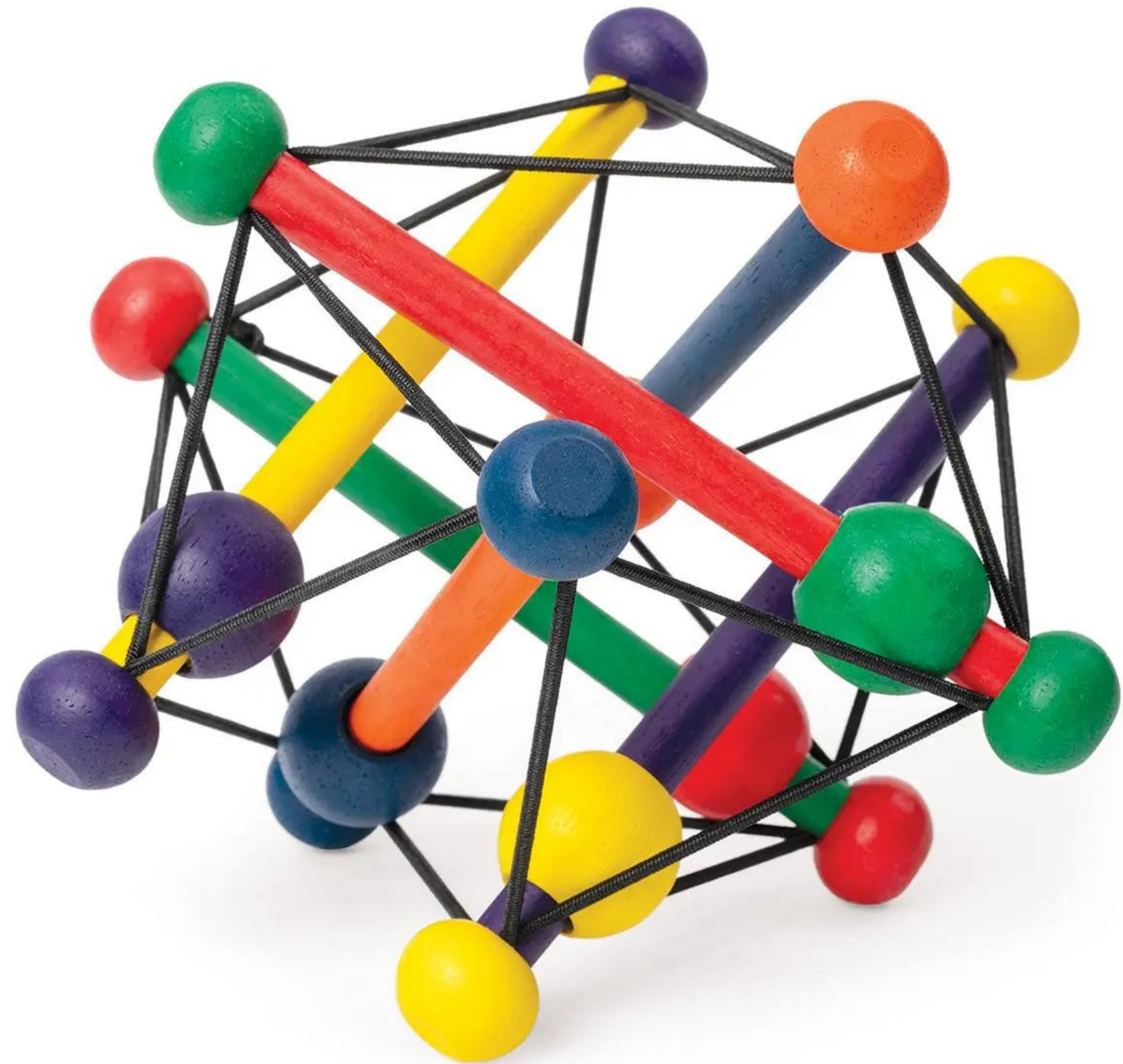
4  
Icosahedron Frame Yorum

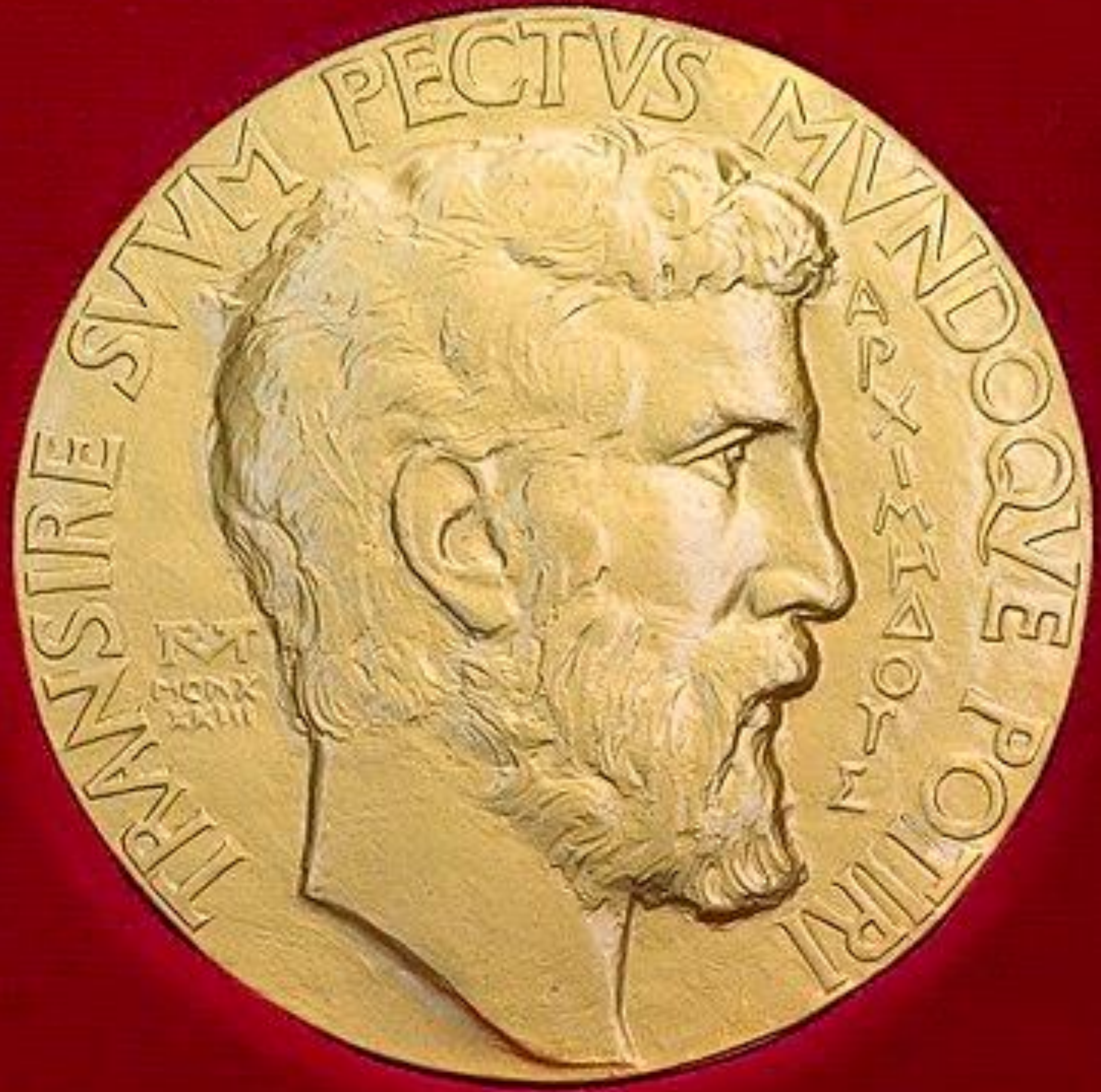


5  
Dodecahedron Frame Yorum









Elevarsi al di sopra di se stessi  
e conquistare il mondo

# ARCHIMEDE

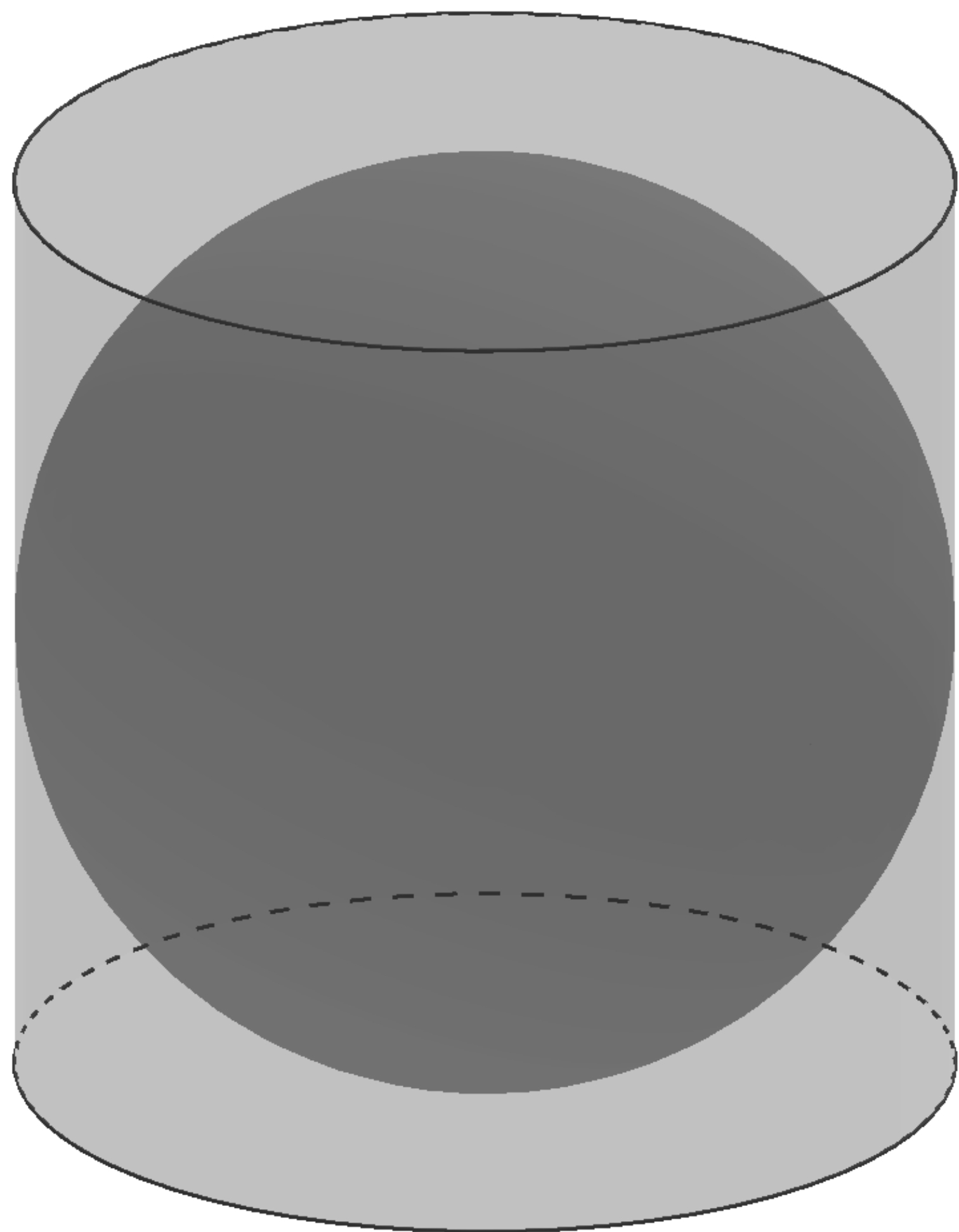


# Sulla Sfera e sul Cilindro

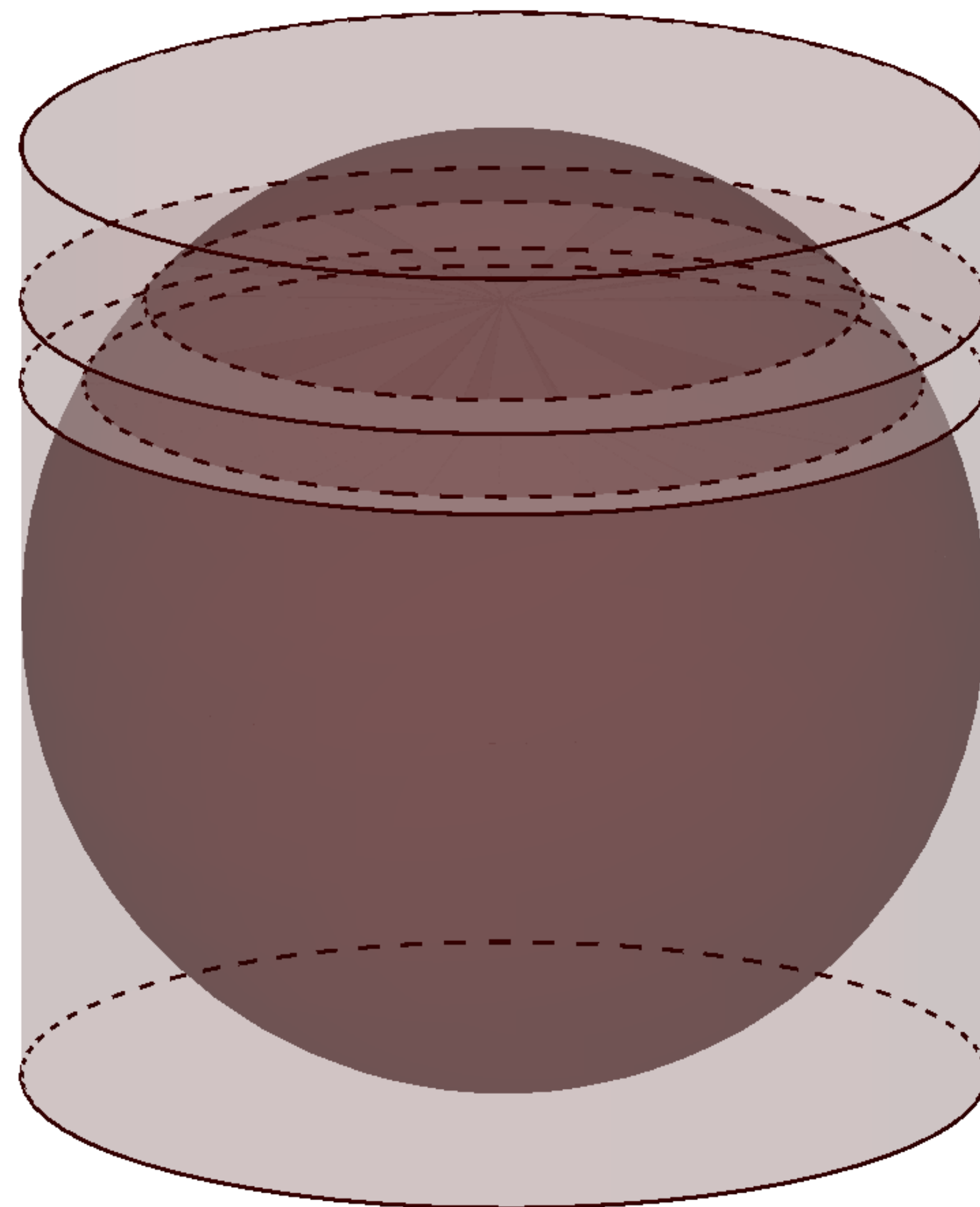
*In seguito, essendomi imbattuto in teoremi degni di considerazione, composi la loro dimostrazione.*

***... che ogni cilindro con base uguale al cerchio massimo di una sfera e altezza uguale al diametro è una volta e mezzo la sfera e la sua superficie totale è anch'essa una volta e mezzo la superficie della sfera....***

*Queste proprietà sono da sempre inerenti alla natura delle figure menzionate, ma sono rimaste ignote a coloro che prima di noi si occuparono di geometria, dal momento che nessuno di essi comprese che esiste **commensurabilità tra queste figure.***



$$A_{\text{sfera}} = 4 \pi r^2$$

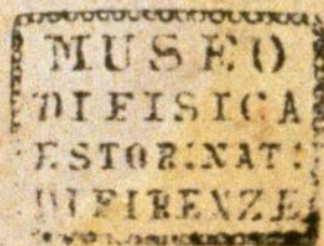


DISCORSI  
E  
DIMOSTRAZIONI  
MATEMATICHE,  
*intorno à due nuove scienze*

Attenenti alla  
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI

*del Signor*  
GALILEO GALILEI LINCEO  
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo  
Grand Duca di Toscana.

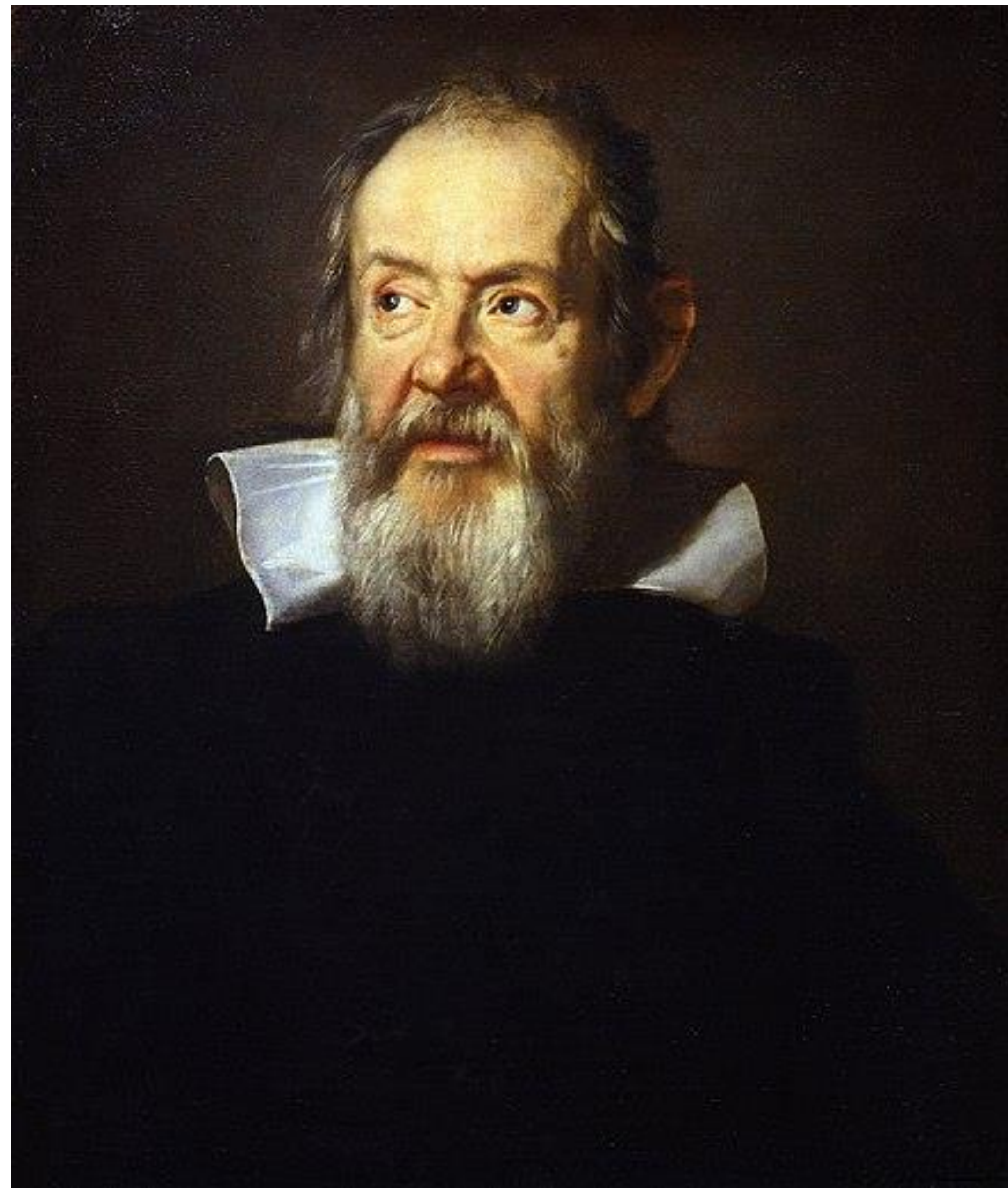
*Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.*



IN LEIDA,  
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

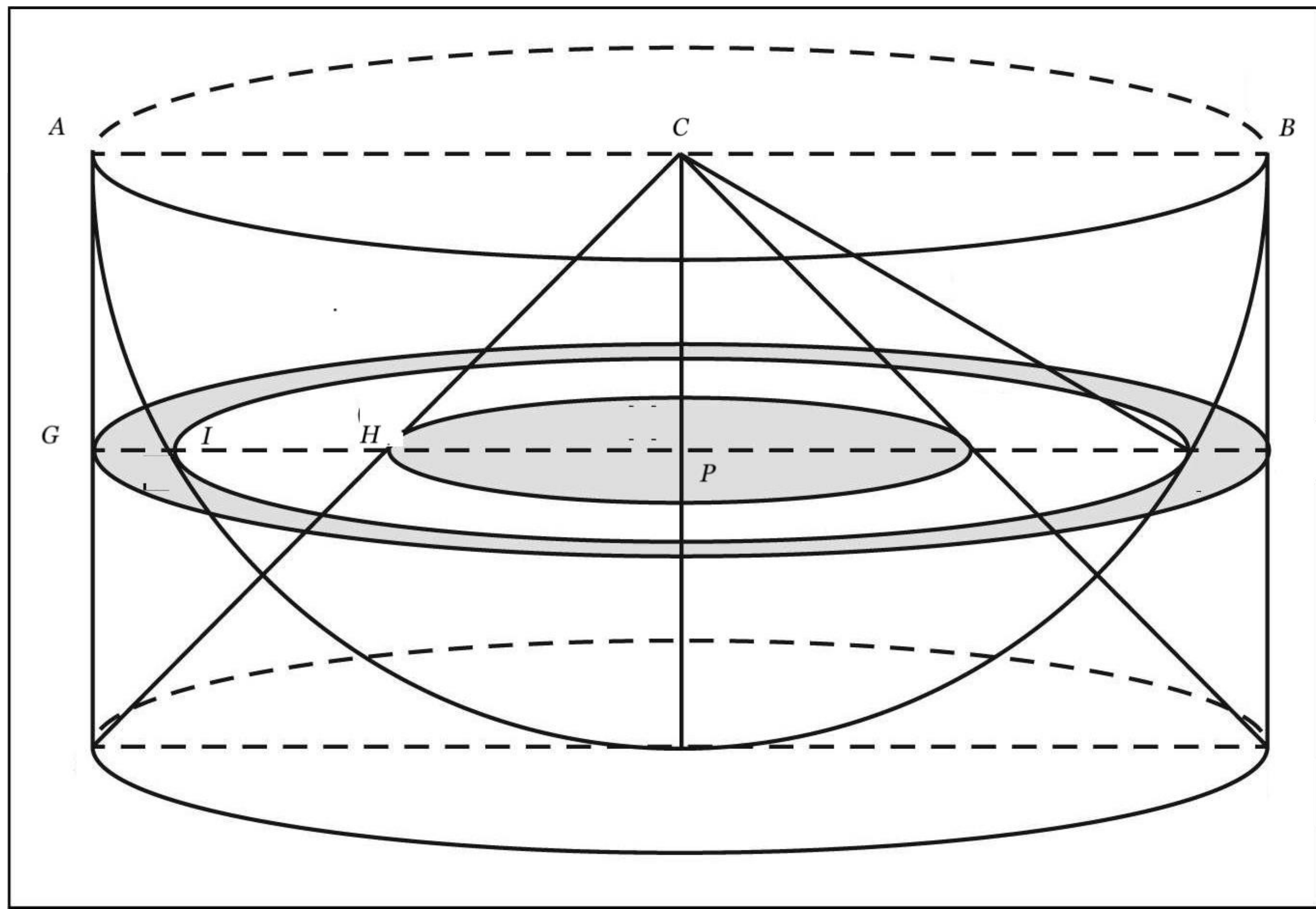
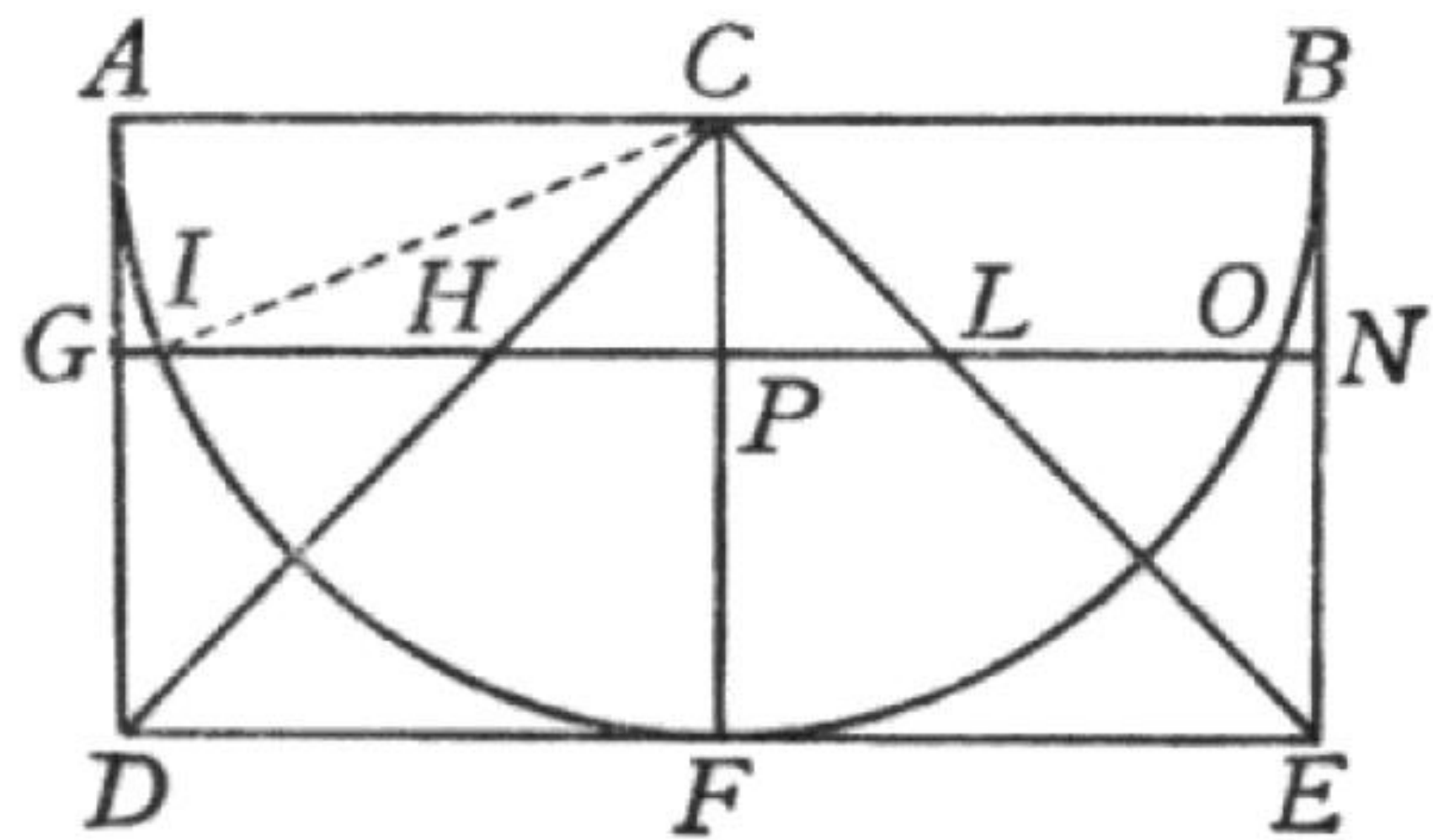
BIBLIOTECA dell'ISTITUTO di FISICA  
dell' UNIVERSITA' - FIRENZE

Inv. 11729 Antico  
783



*Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra **le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate.** Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: **nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate.***

*È stato osservato che i corpi lanciati, ovvero sia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo; però, **che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò** insieme ad altre non poche cose, né meno degne di essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi.*



René Decartes, 1596-1650

*Il Discorso sul Metodo*  
*La Geometrie*







Bernhard Riemann 1826-1866

*il concetto generale di grandezza multiplamente estesa  
**mehrfach ausgedehnter Grössen***

....

*passibile di diverse relazioni metriche  
**verschiedener Massverhältnisse fähig ist***

...

*A seconda che tra questi modi di determinazione vi possa essere  
una transizione dall'uno all'altro continua o no,  
essi costituiranno Varietà (**Mannigfaltigkeit**) continue o discrete*

...

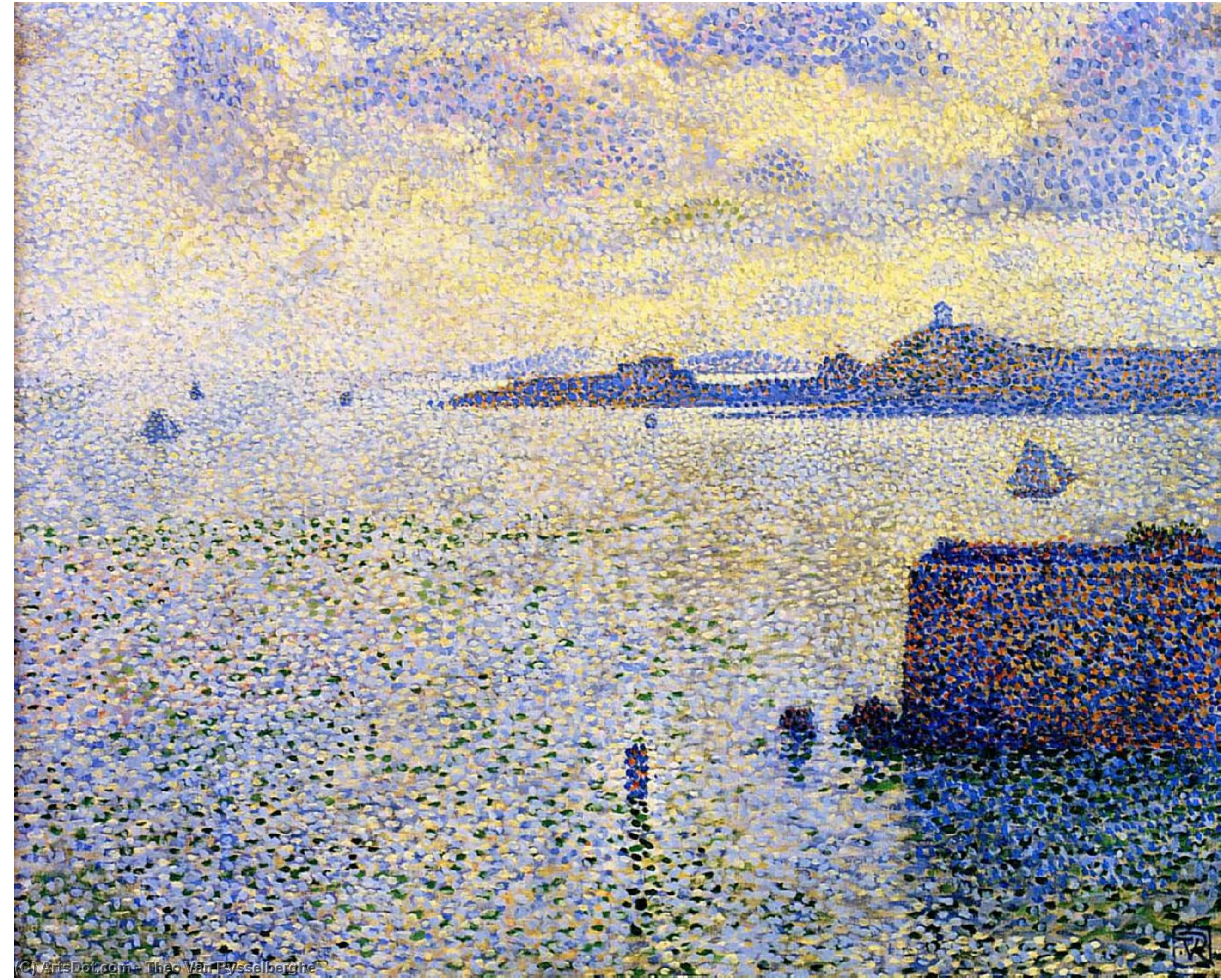
*La metrica è determinata dalla (tensore di) curvatura*

Poesia di Schiller ('700) intitolata **Mannigfaltigkeit**  
nell'uomo etico (**ethischen Menschen**) dev'essersi prima placata la lotta tra  
elementi e impulsi ciechi se si vuole far maturare la molteplicità (**Mannigfaltigkeit**)

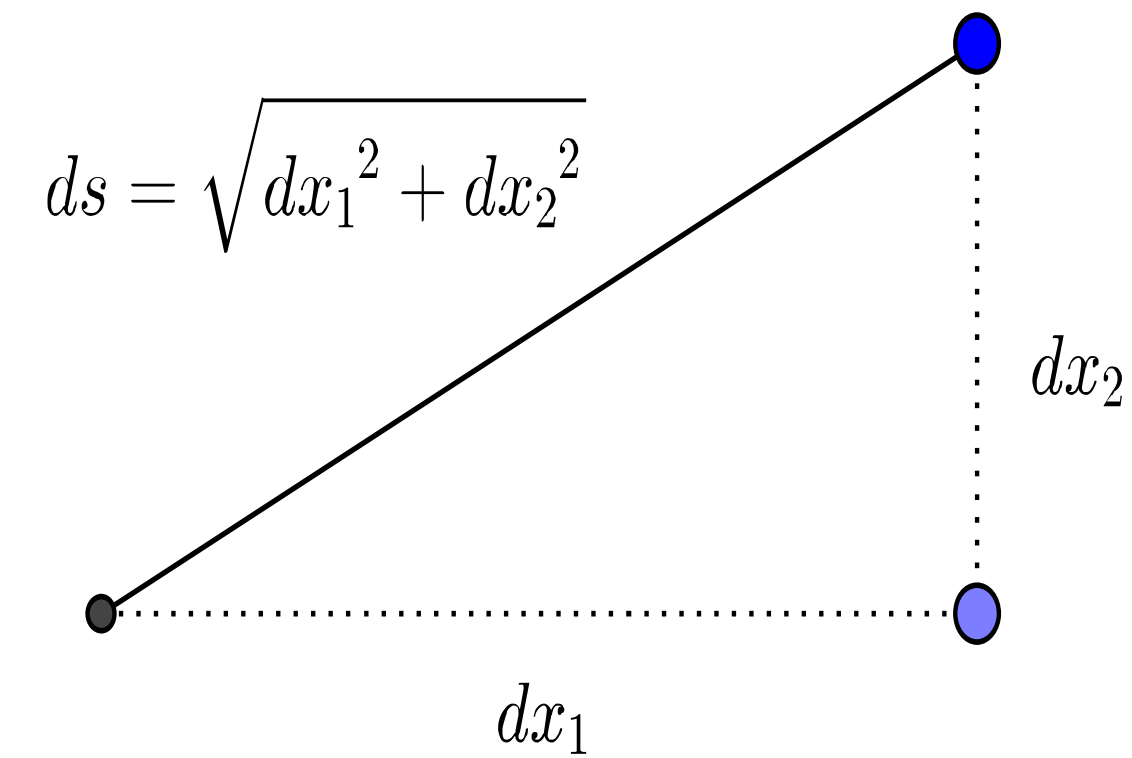
W. Turner 1775-1851



*Puntinismo*  
P. Signac e T. Van Rysselberghe  
1892



**Metrica euclidea**, teorema di Pitagora:  $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$



**Metrica generale**

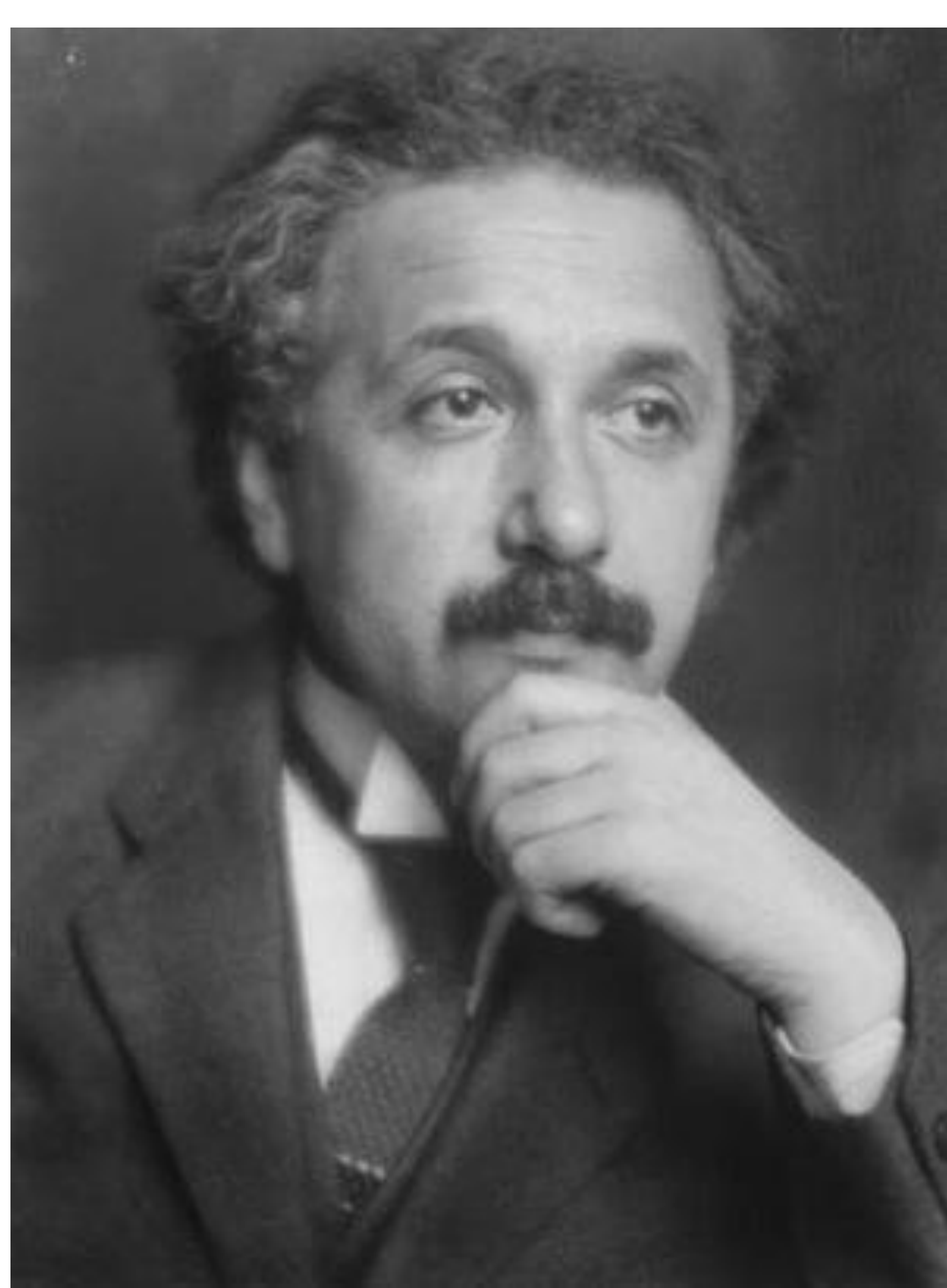
$$g := ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + \cdots + g_{ij}dx_idx_j + \cdots + g_{nn}dx_n^2}$$

*...Da ciò nasce il problema di studiare i dati di fatto più semplici dai quali dedurre le relazioni metriche dello spazio; un problema che per la natura della questione non è completamente determinato; invero si possono dare più sistemi di fatti sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio; il più importante è quello scelto per fondamento da Euclide.*

*Questi fatti sono come tutti i fatti non necessari, ma solo di **certezza empirica**, sono **ipotesi**; si può così studiare la loro probabilità, che entro i limiti dell'osservazione è tuttavia assai grande, e dopo di ciò valutare l'ammissibilità della loro estensione al di là dei confini dell'osservazione sia dal lato dell'incommensurabilmente grande che dal lato dell'incommensurabilmente piccolo.*

*... la questione di cosa siano le basi delle relazioni metriche dello spazio. ... Pertanto la realtà dello Spazio sottostante, le basi delle relazioni metriche, devono essere ricercate fuori di esso, nelle forze vincolanti (**bindenen Kräften**) che agiscono su di esso. ...*

*Questo ci porta nel campo di un'altra scienza, il regno della fisica, nel quale la natura dell'attuale occasione non ci permette di entrare.*



Albert Einstein 1879 - 1955

## l'Equazione di Campo di Einstein (1915):

$$Ric_g - \frac{1}{2} s_g g = 8\pi T$$

$Ric_g$  e  $s_g$  denotano rispettivamente la **curvatura di Ricci** e la **curvatura scalare** della metrica  $g$ ;

$T$  è il **Tensore Energia Impulso**, che contiene tutta l'informazione proveniente dalla fisica, in particolare dalla materia.

Einstein descrive l'equazione come un monumento composto da ***marmo pregiato*** (la parte sinistra che riguarda la geometria) e da ***legno scadente*** (la parte destra che riguarda la materia).



Felice Casorati  
1835-1890



Eugenio Beltrami  
1835-1900

*- Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*

*- Teoria Fondamentale degli Spazi di Curvatura Costante*

Eugenio Beltrami, Giornale di Matematiche e Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1868.

*In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.*

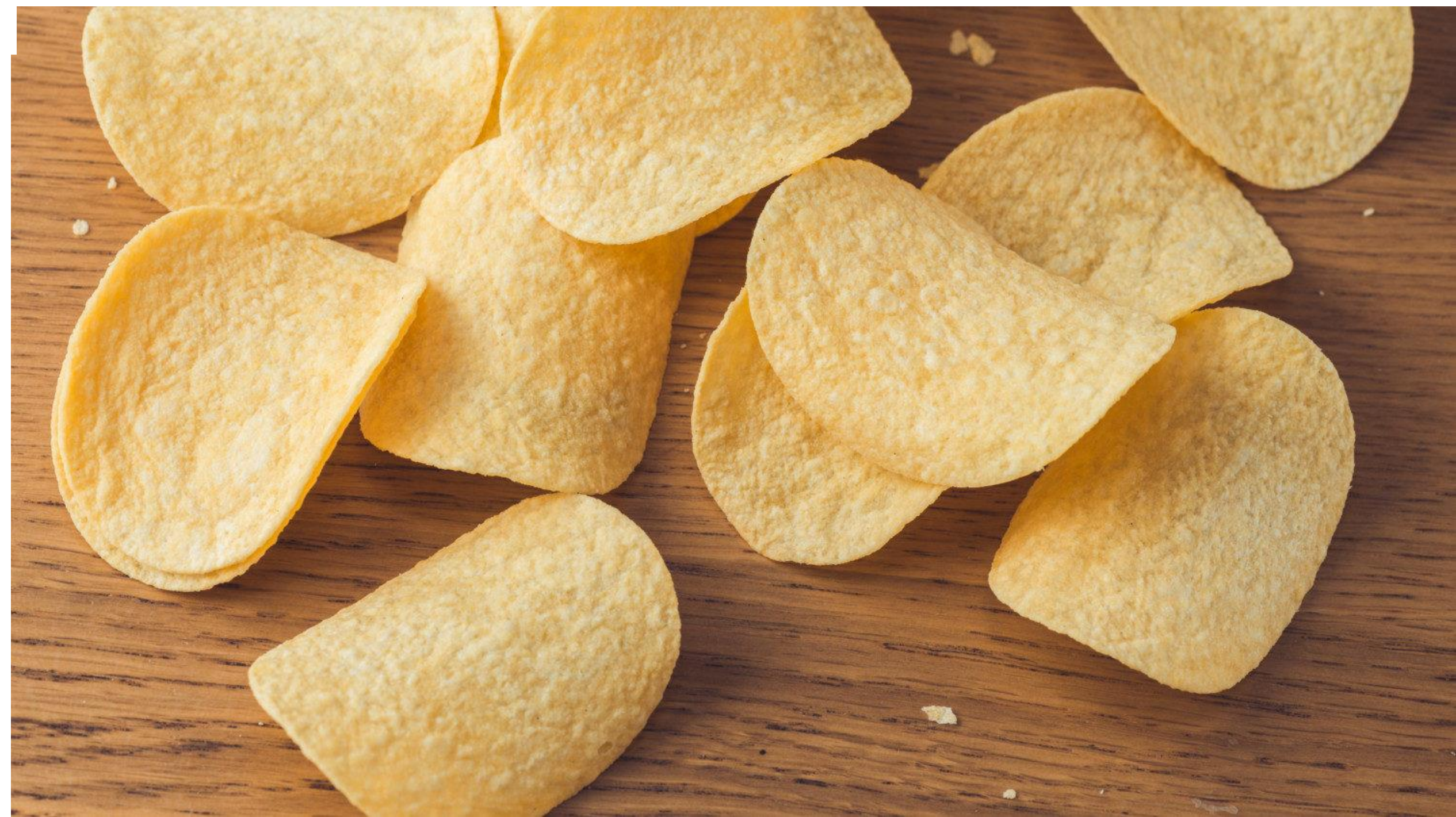
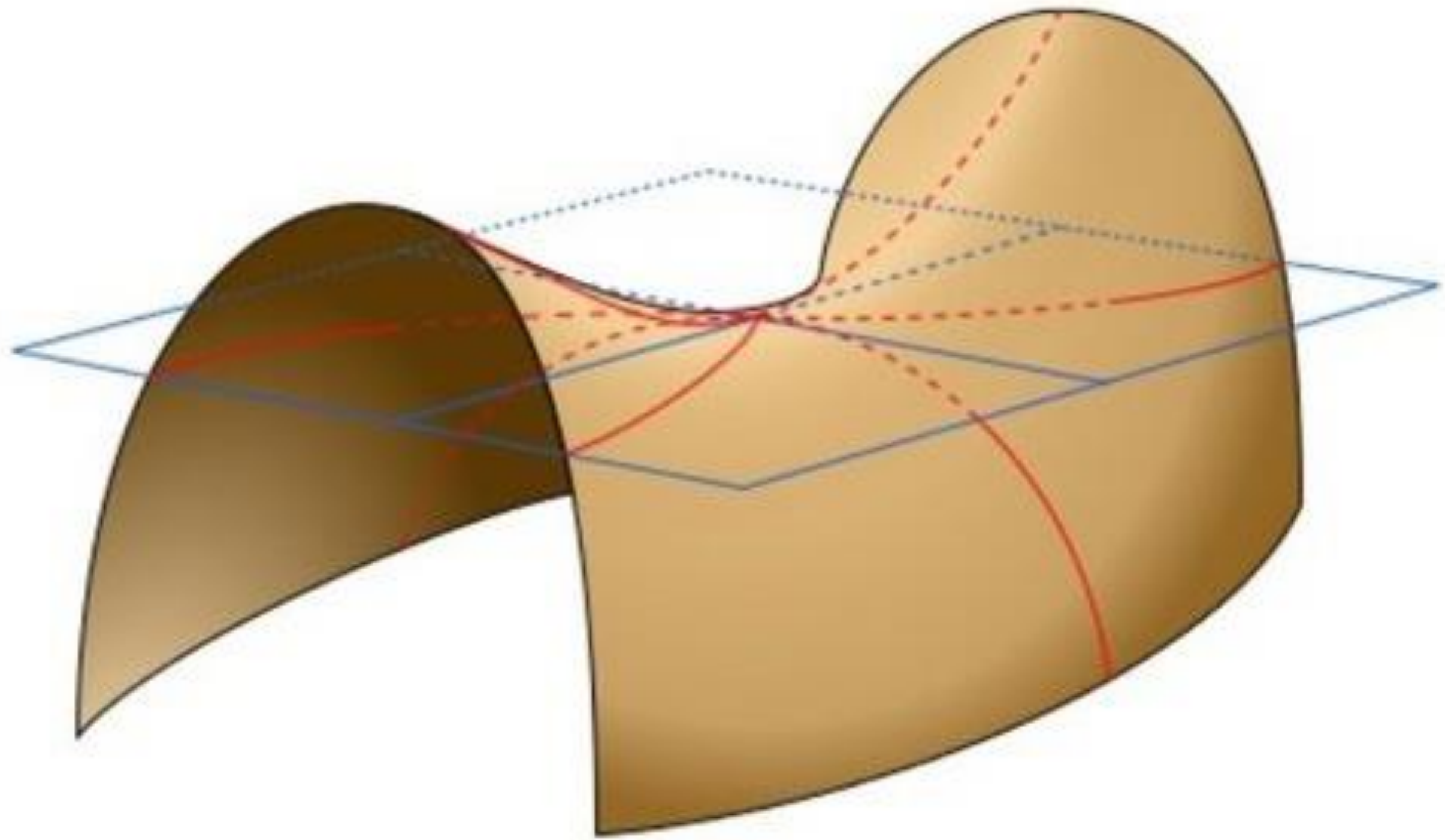
*...Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principi si incontrano non di rado nella storia dello scibile.*

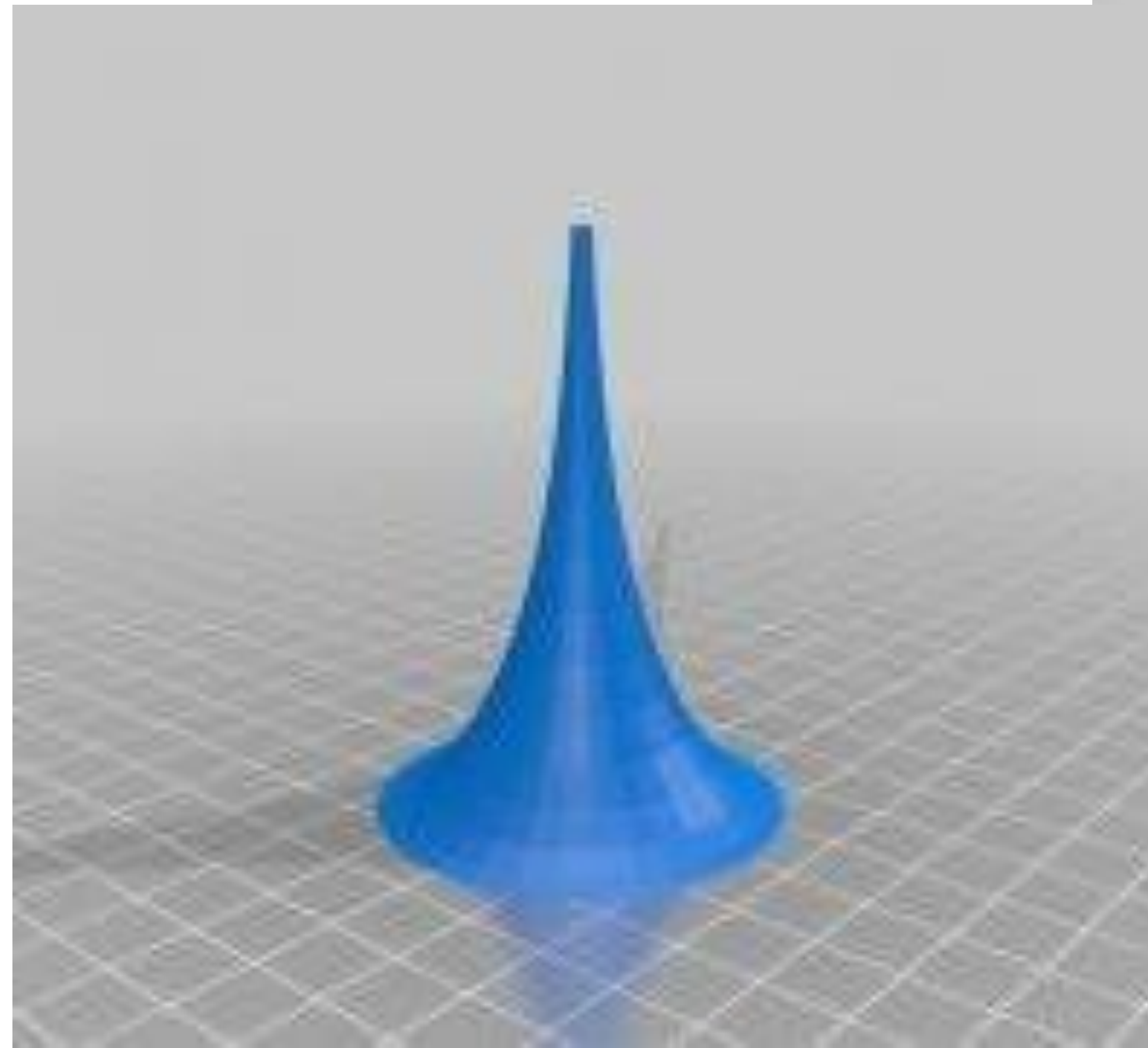
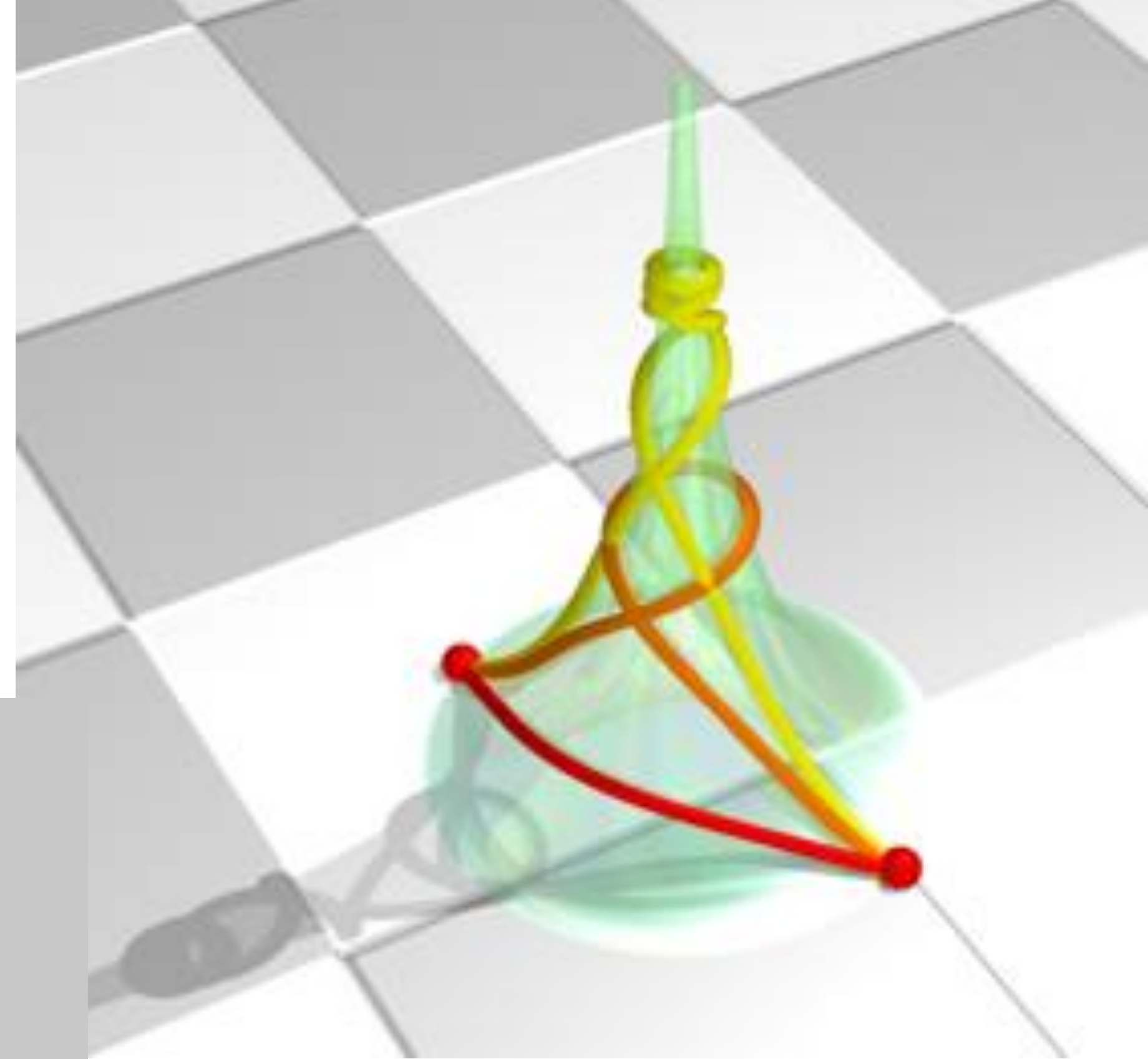
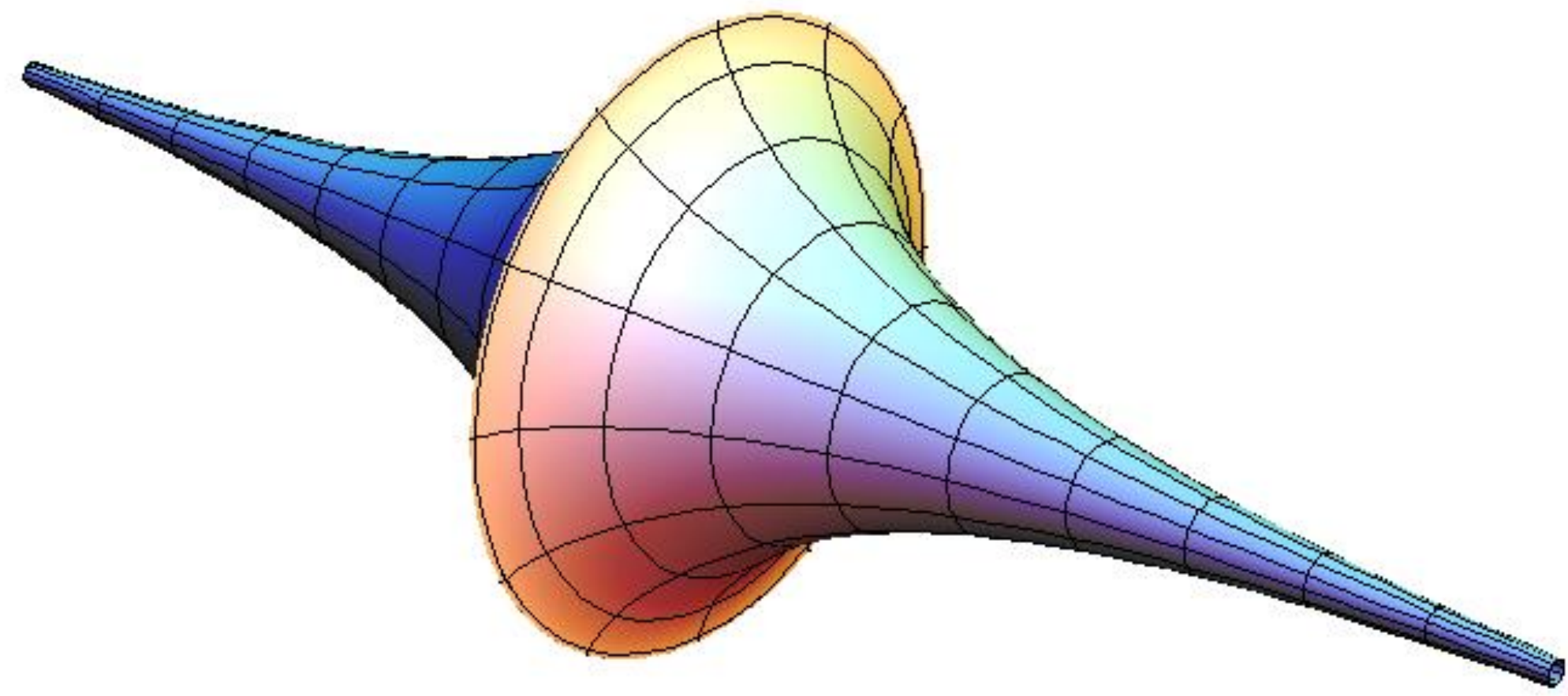
*alcuni principii tracciati da RIEMANN nell'insigne suo lavoro postumo, non ha guari ....*

*Spero che le mie ricerche possano aiutare l'intelligenza di alcune parti di questo profondo lavoro.*

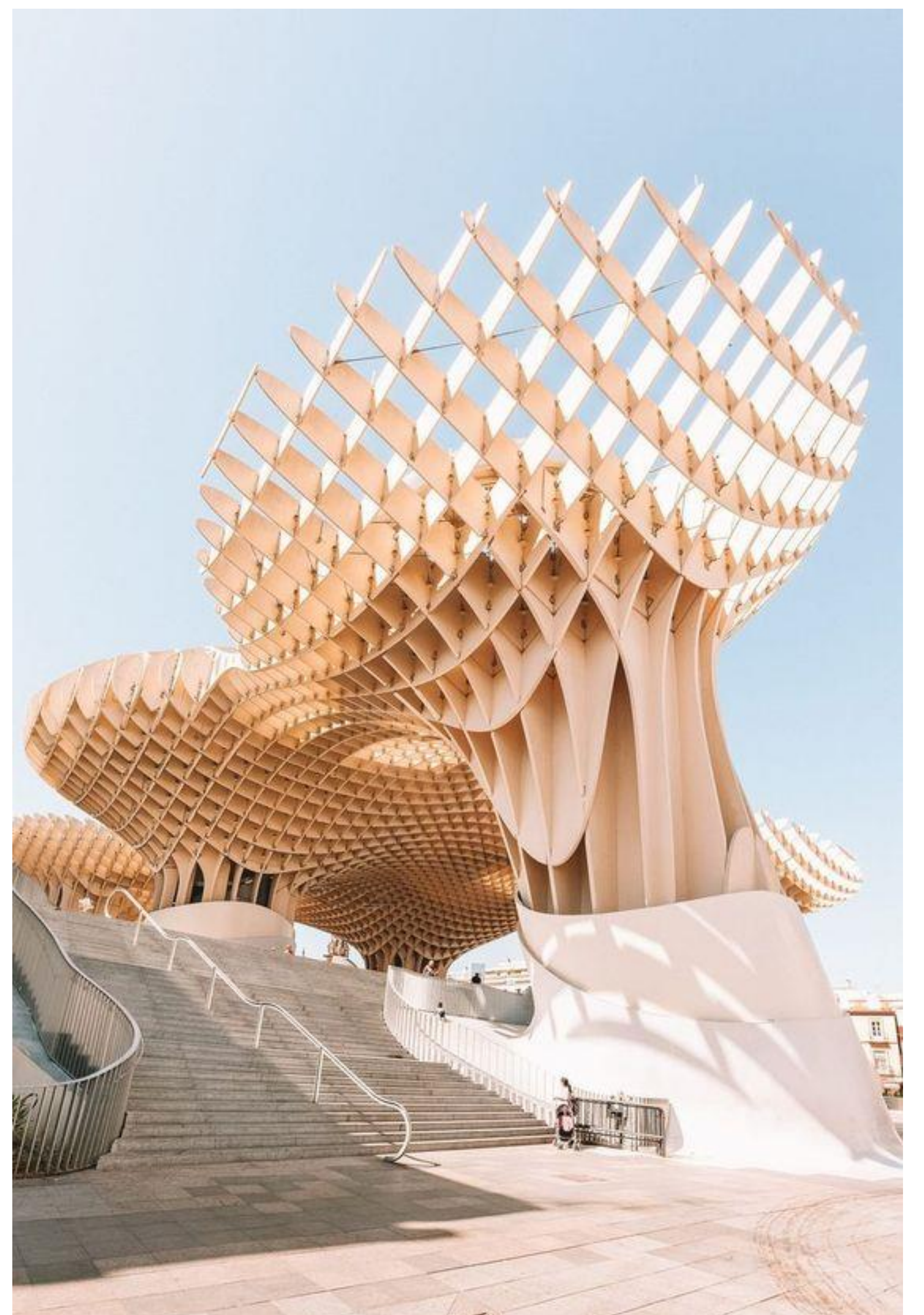
*...Per evitare circonlocuzioni ci permettiamo di denominare **pseudosferiche** le superficie di curvatura costante negativa*







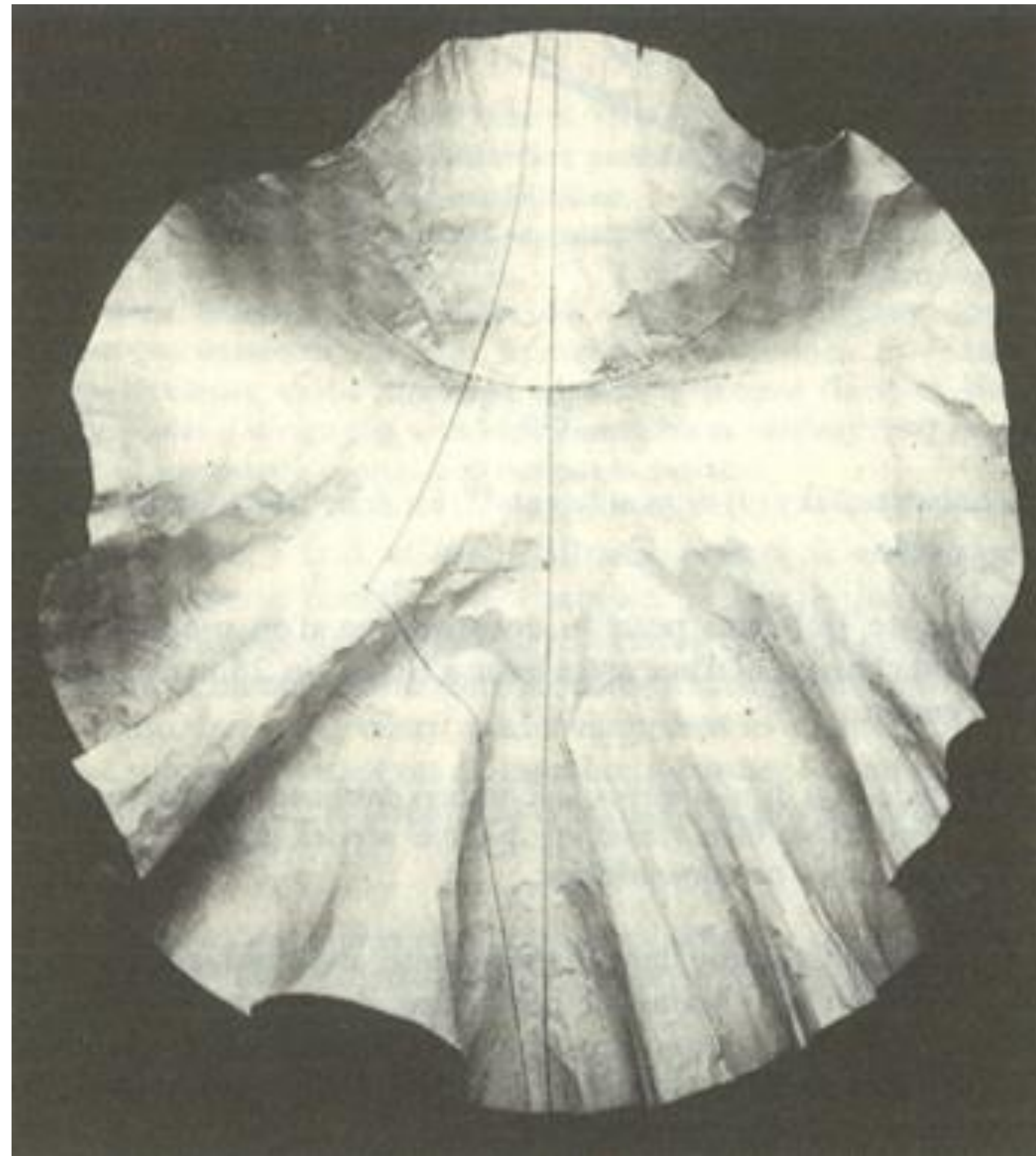
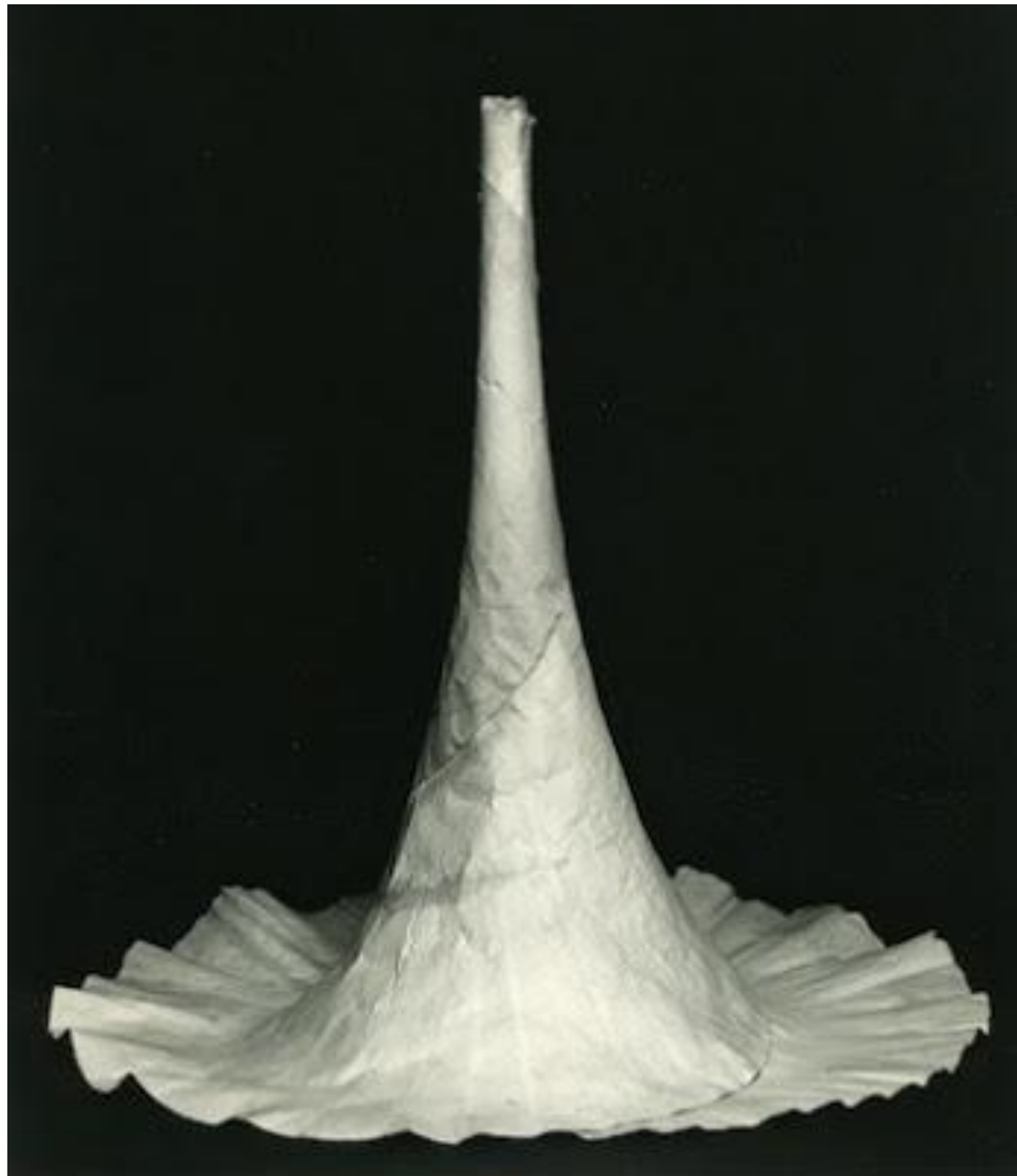
Pseudosfera



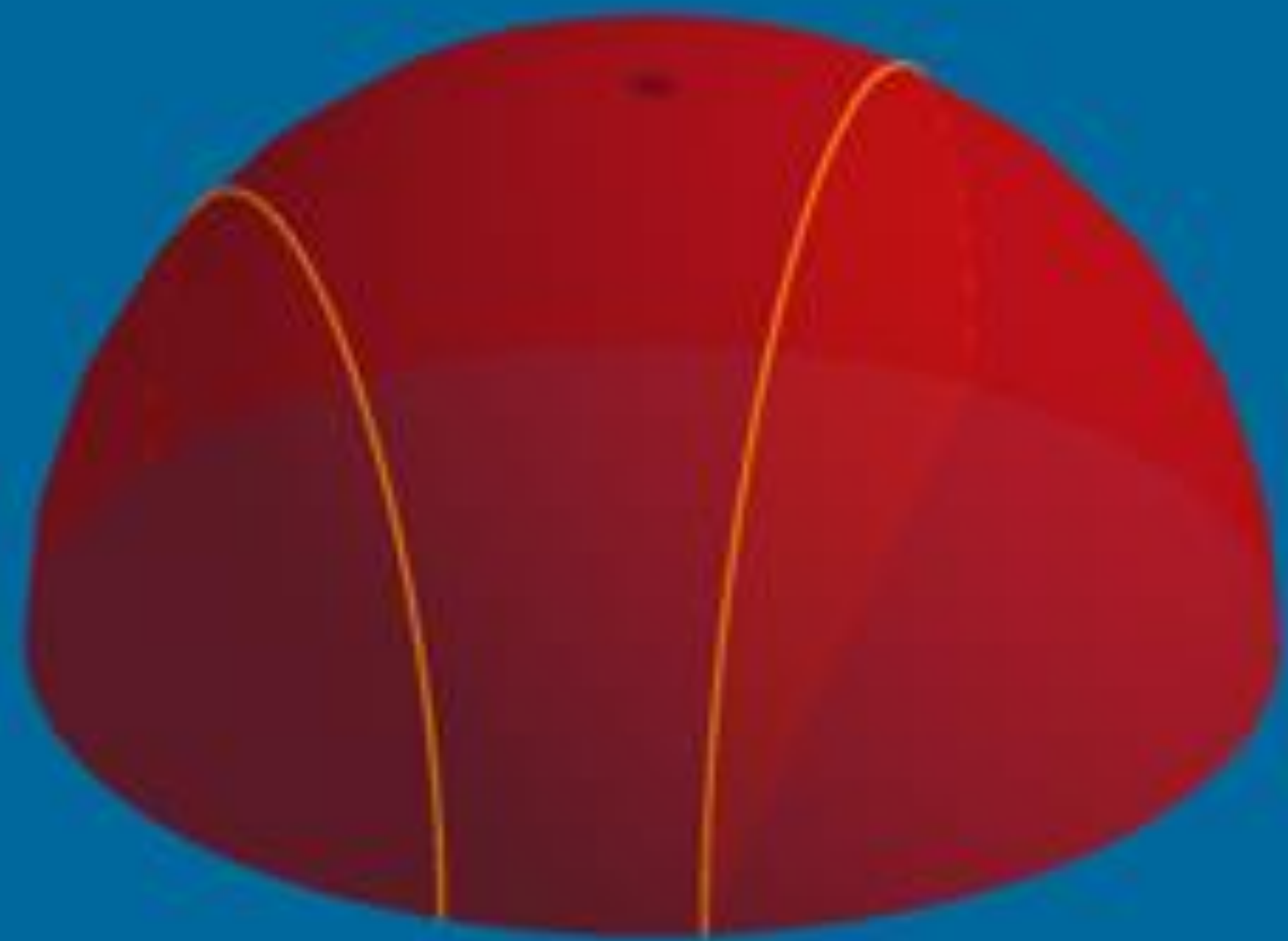
Il modello iperbolico di Beltrami non può essere realizzato nell'usuale spazio tridimensionale euclideo  
(Hilbert 1901)

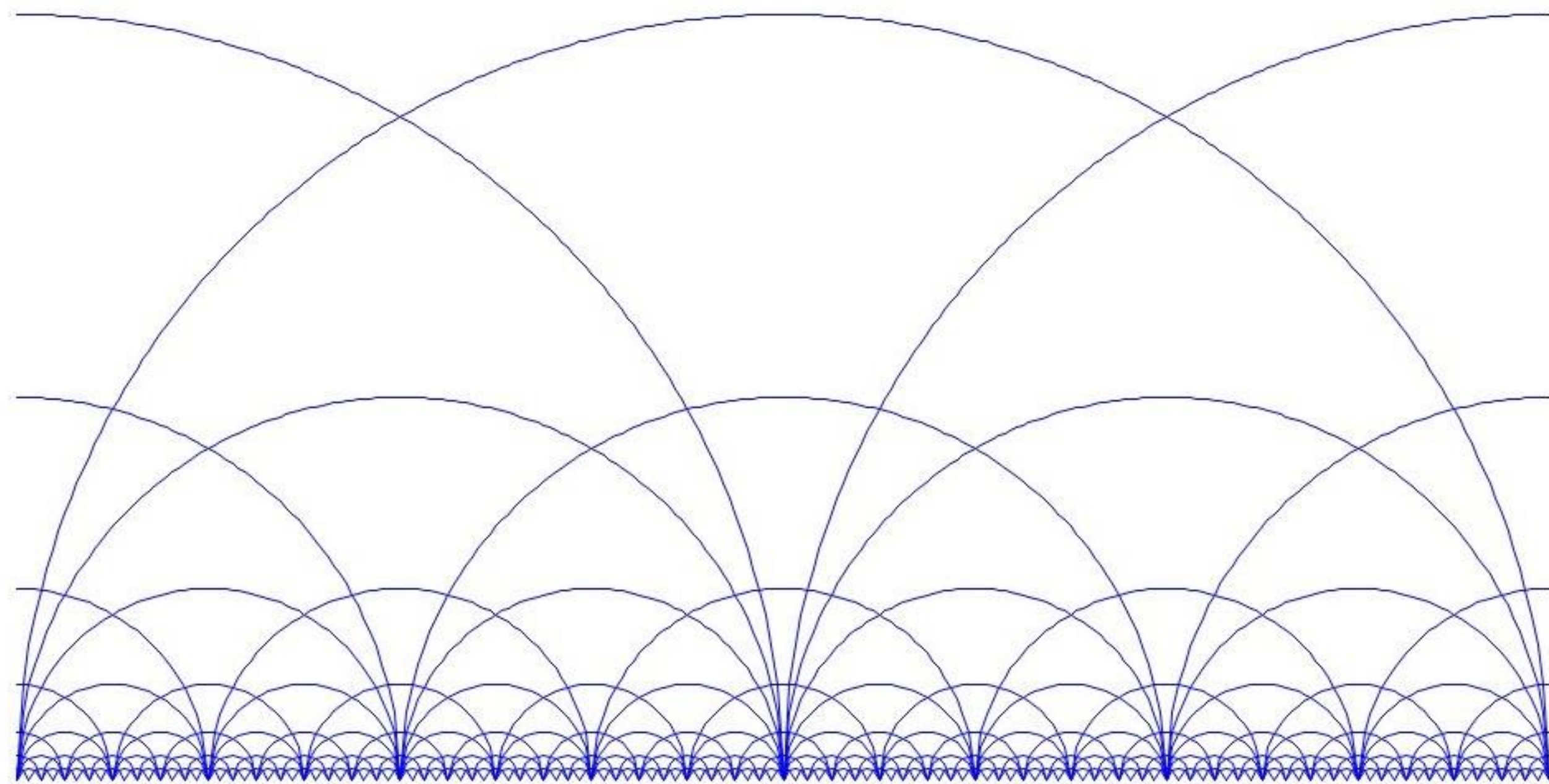
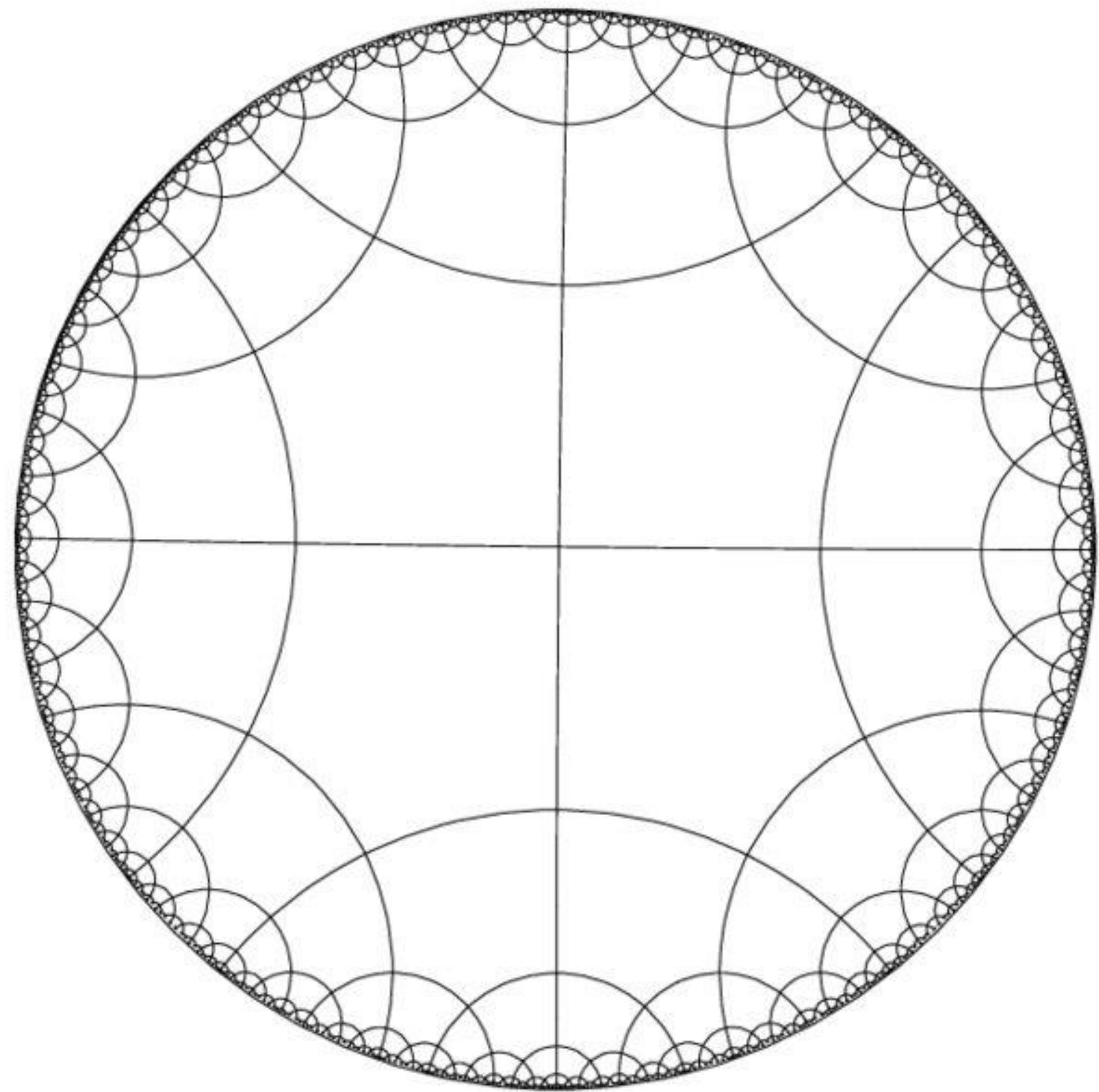
Lo si può realizzare (immergere) in uno spazio euclideo di dimensione 5,  
non è noto se può stare in dimensione 4

Pseudosfera in Carta  
Beltrami - Casorati  
Dipartimento di Matematica di Pavia





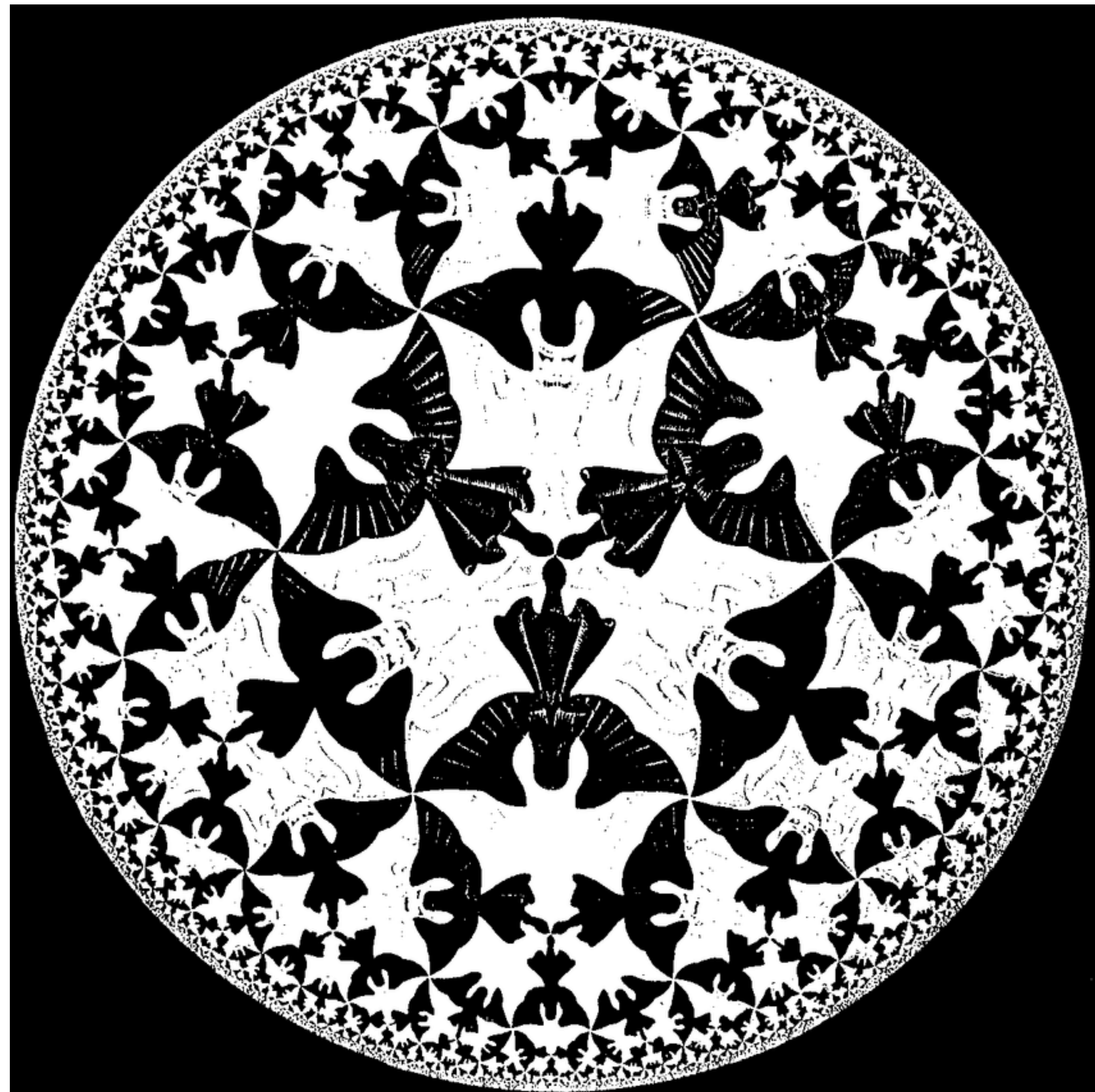


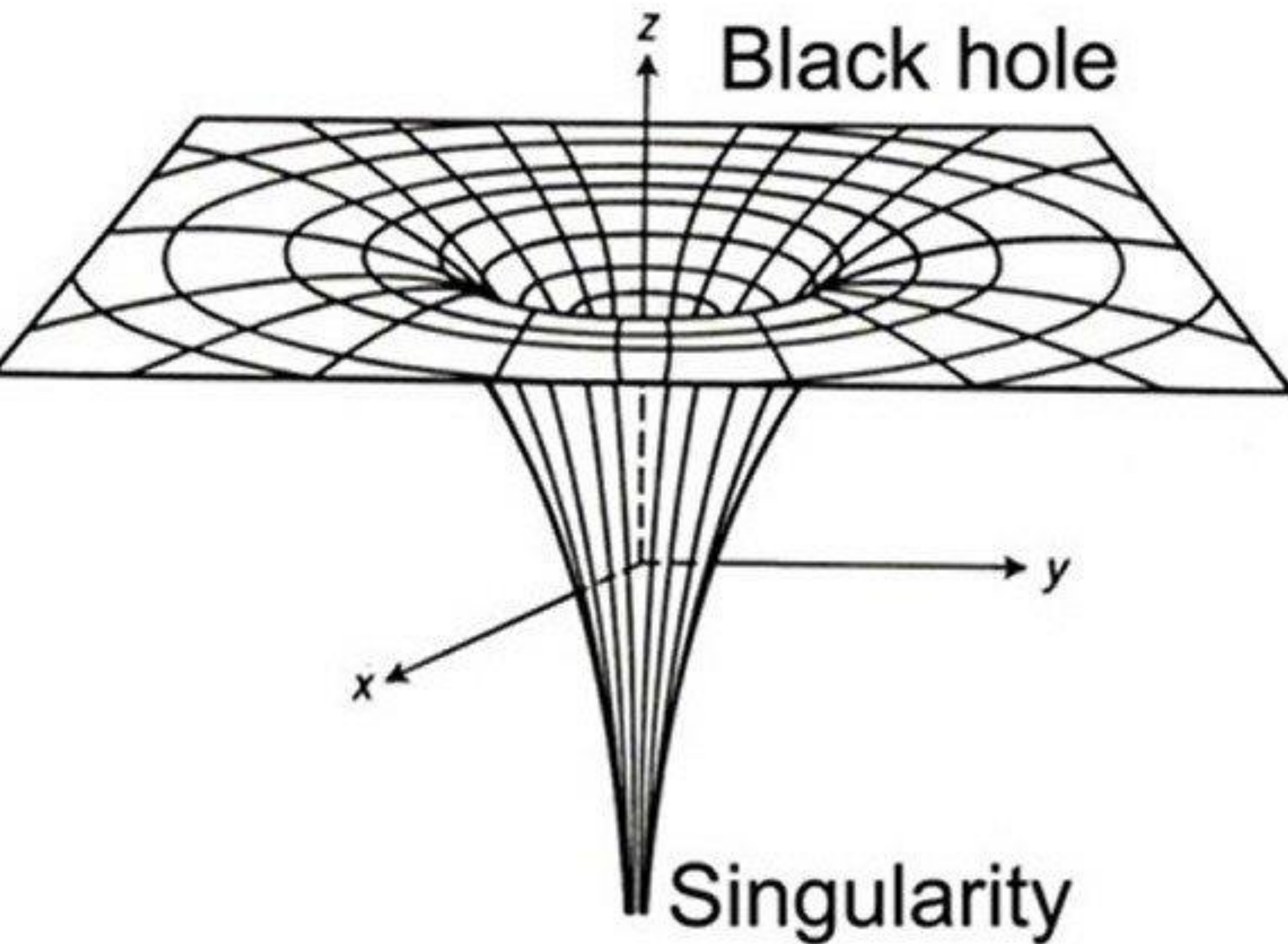






M.C. Escher  
Cerchi limite III e IV  
1959 - 1960





**Teorema delle singolarità  
o dell'incompletezza delle  
geodetiche**

**R. Penrose - S.Hawking**

Kurt Gödel  
1906 – 1978

Teorema di Incompletezza (1931)

