

Teoria qualitativa dei sistemi dinamici: attrattori, biforcazioni e caos

Gian Italo Bischi

**DESP - Dipartimento di Economia, Società, Politica
Università di Urbino “Carlo Bo”**

gian.bischi@uniurb.it

<http://www.mdef.it/gian-italo-bischi/>

Poincaré e il re



Henri Poincaré (1854-1912)



Re Oscar II di Svezia (1829-1907)

Weierstrass: "Questo lavoro non si può considerare la soluzione del problema proposto, tuttavia è di tale importanza che la sua pubblicazione inaugurerà una nuova era nella storia della meccanica celeste."

Teoria Qualitativa dei Sistemi Dinamici

Analisi qualitativa e Topologia (geometria dei fogli di gomma): Poincaré (1890)

Equilibri, Stabilità, Oscillazioni stabili, Biforcazioni, Controllo

Scuola russa: Lyapunov ('20), Kolmogorov ('30), Andronov ('50)

Pontriaguine ('60) Arnold, Sinai, Sharkovski, Shilnikov

Stati Uniti: Birkhoff ('30) Smale, Abraham, Yorke

Brasile: Peixoto, Palis, Mora, Viana

Europa: Julia ('20) Fatou ('20), Hadamard ('40), Mira

Teoria delle Singolarità (o catastrofi):

Morse ('30) Whitney ('50), Mather ('60), Thom ('70)

Cibernetica (autoregolazione, feed-back, meccanismi adattivi):

Wiener, J. Von Neumann, dal 1946

Sinergetica (interazione cooperativa, auto-organizzazione,

processi autoalimentati): Hermann Haken, anni '80

Caos deterministico: Lorenz (1963), a Li-Yorke (1975), May (1976),

Mira, Ruelle, Takens

Geometria dei Frattali: Benoit Mandelbrot, anni '80

Sistema Dinamico

Variabili di stato

$$x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)$$

Problema: dato lo stato del sistema in un dato istante, t_0 , quale sarà il suo stato futuro e da quali stati precedenti proviene?

Operatore di evoluzione $x_i(t) = G(t; x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$

Leggi locali di evoluzione

Tempo continuo $t \in \mathbb{R}$: equazioni differenziali

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Tempo discreto $t \in \mathbb{N}$: equazioni alle differenze (mappe iterate, induttive)

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Newton: The fundamental Anagram of Calculus

Dalla seconda lettera di Newton a Leibniz (1667): “The foundations of these operations is evident enough, in fact; but because I cannot proceed with the explanation of it now, I have preferred to conceal it thus: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.



Un piccolo esercizio di crittografia:

*“Data aequatione quotcunque fluentes
quantitae involvente fluxiones invenire
et vice versa”*

Data un'equazione che contiene un numero qualunque di “quantità fluenti” [derivate] trovare le “flussioni” [primitive], e viceversa.

Legge di crescita di una popolazione. Siano $n > 0$ e $m > 0$ i tassi specifici di natalità e mortalità.

Legge di evoluzione:
$$\frac{dx}{dt} = nx - mx = (n - m)x = rx$$

•

$$r = \frac{x}{x} \quad \text{tasso di crescita netto per unità di popolazione}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \text{Equazione differenziale primo ordine lineare}$$

con $x(t_0) = x_0$ cond. iniziale

Soluzione

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$$

Legge esponenziale

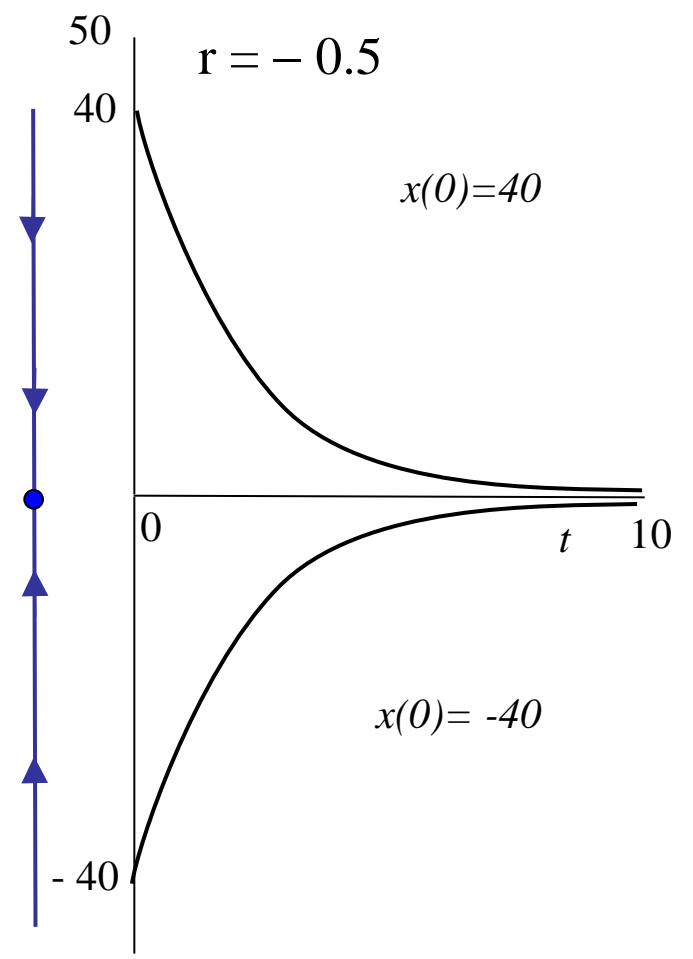
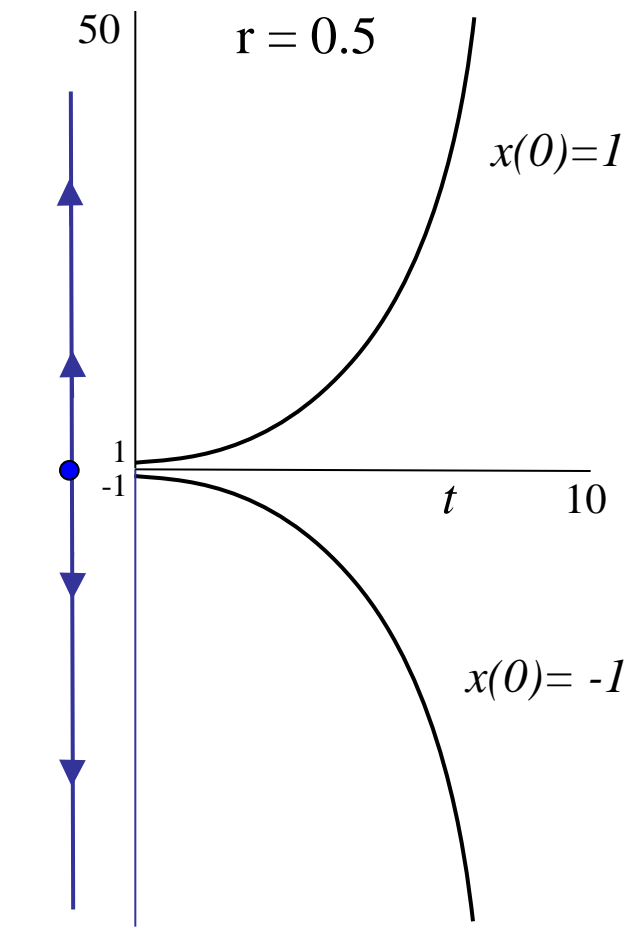
$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \text{con } x(t_0) = x_0$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t r dt \quad \Longrightarrow \quad [\ln(x)]_{x_0}^{x(t)} = r [t]_{t_0}^t$$

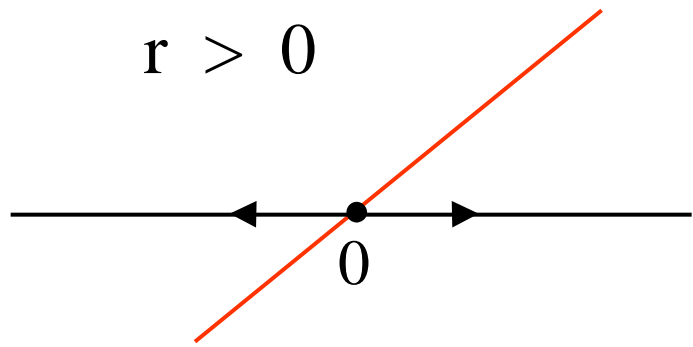
$$\ln x(t) - \ln x_0 = r(t - t_0)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x_0} = r(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t)}{x_0} = e^{r(t-t_0)}$$

$$x(t) = x(0)e^{rt}$$

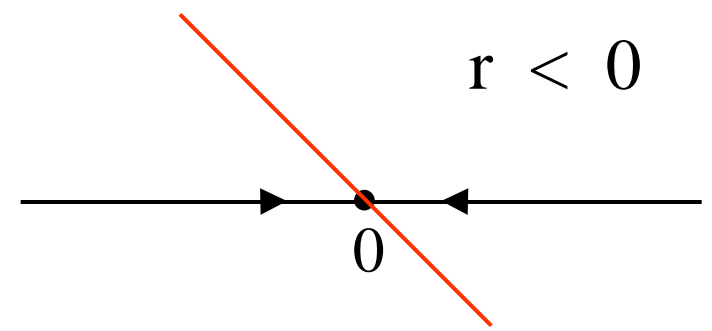


$r > 0$



$$\frac{dx}{dt} = rx$$

$r < 0$



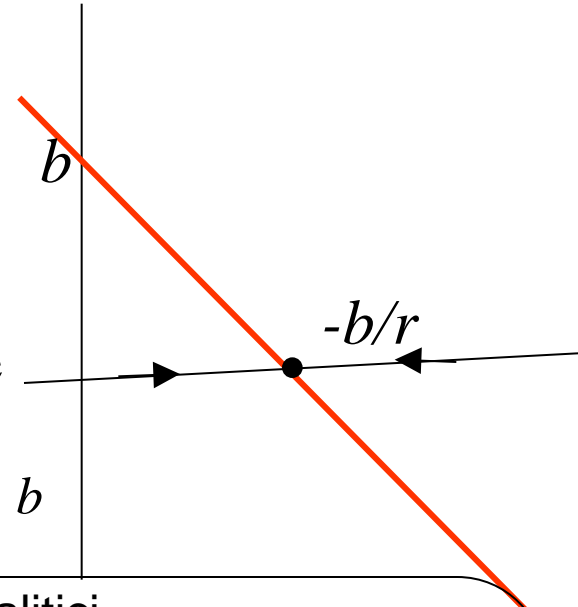
Immigrazione costante $\frac{dx}{dt} = rx + b$

$\frac{dx}{dt} = 0$ per $x = x^* = -\frac{b}{r}$ *Unico equilibrio*

Siano $r < 0$ e $b > 0$.

Allora $x^* > 0$ e $rx + b > 0$ per $x < x^*$

Quindi esiste un unico equilibrio positivo e stabile



Esercizio: studiare cosa succede cambiando segno a r e/o b

Per gli appassionati dei metodi analitici

$\frac{dx}{dt} = rx + b$ con $x(t_0) = x_0$ Cambio di variabile: $X = x + b/r$

$\frac{dX}{dt} = rX$ con $X(t_0) = x_0 + \frac{b}{r}$ Soluzione: $X(t) = \left(x_0 + \frac{b}{r}\right)e^{r(t-t_0)}$

Nella variabile originaria: $x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{r}\right)e^{r(t-t_0)} - \frac{b}{r}$

Malthus (1798) An essay on the principle of population

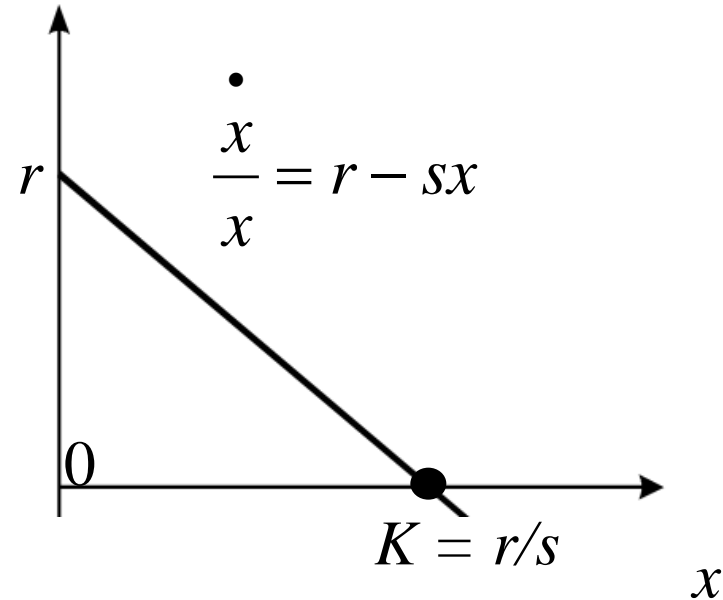
In assenza di limitazioni di cibo o spazio disponibile una popolazione naturale cresce in progressione geometrica.

Popolazione che vive in un ambiente limitato

Altra ipotesi Malthusiana: Al crescere della densità di popolazione cresce la mortalità per mancanza di cibo, spazio...):

Tasso di crescita: $n - m - sx = r - sx$

Allora: $\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$



Il secondo membro dell'equazione di evoluzione diventa una parabola)

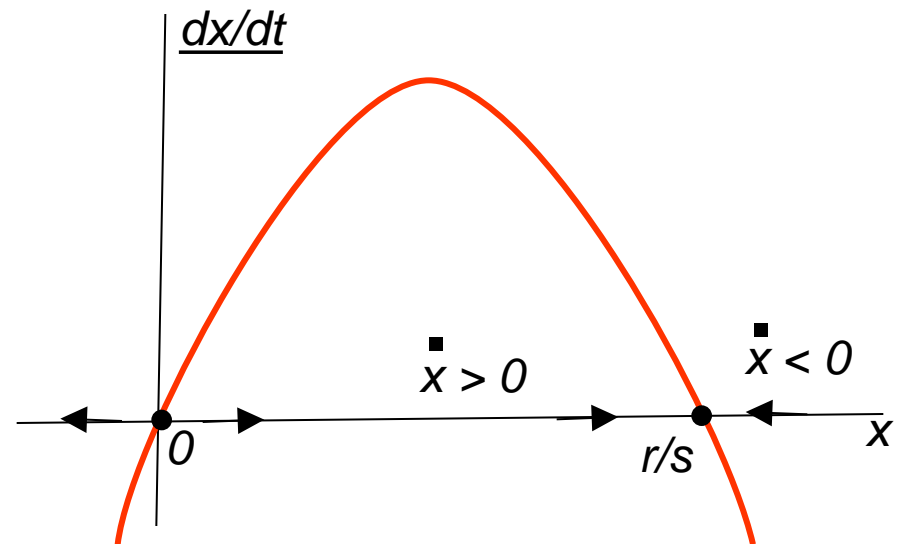
Crescita logistica di una popolazione

$$\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$$

$$(r - sx)x \geq 0 \text{ per } 0 \leq x \leq r/s$$

$x = 0$ equilibrio di estinzione

$x = K = r/s$ equilibrio naturale
(capacità portante)



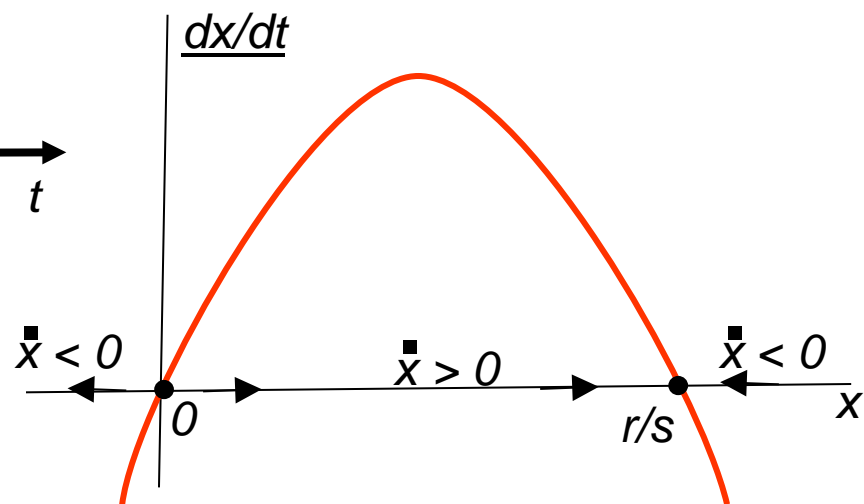
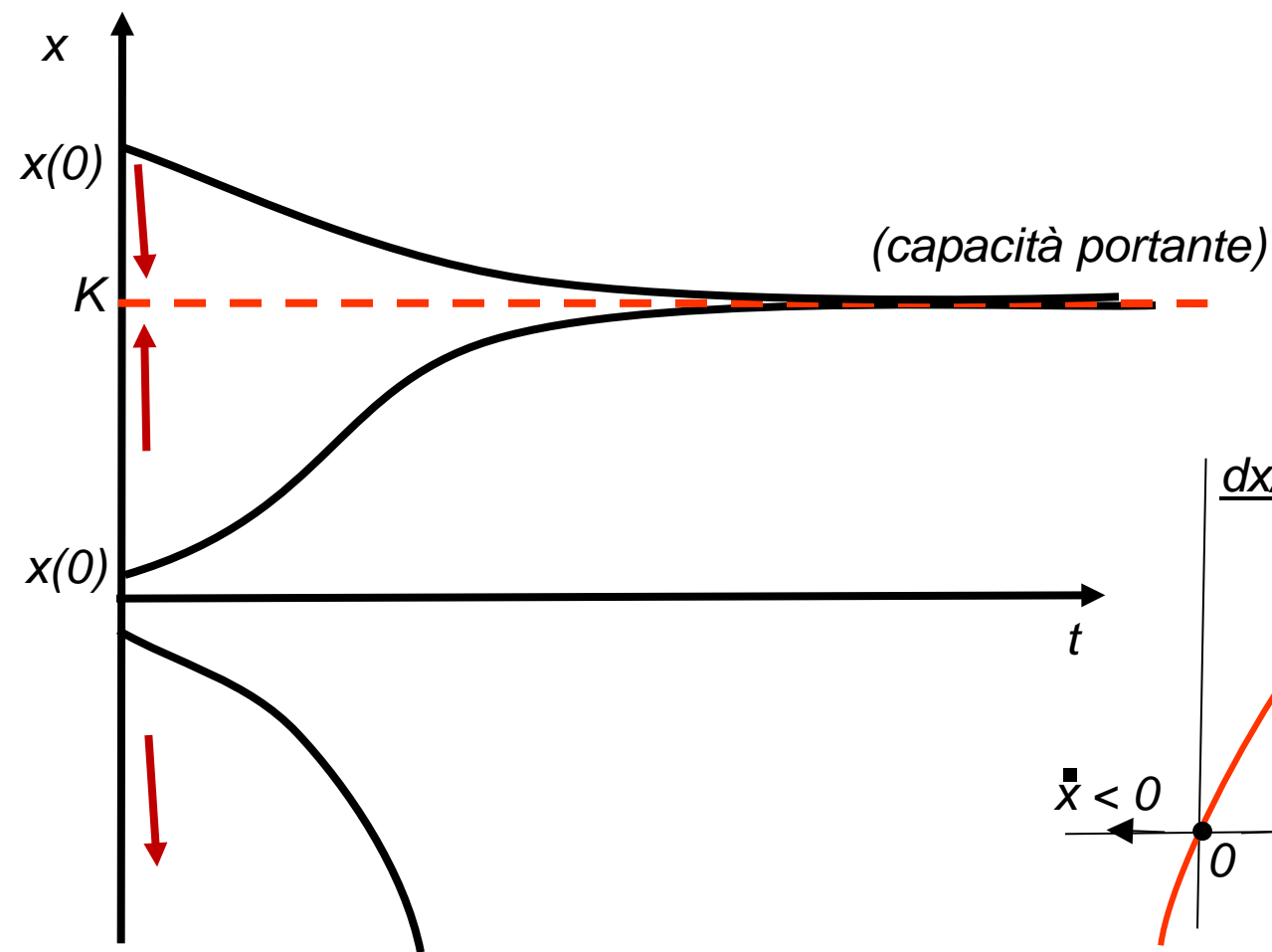
$$\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$$

Se proprio si vuole integrare...

$$\int \frac{dx}{(r - sx)x} = \int dt$$

Soluzione: ...

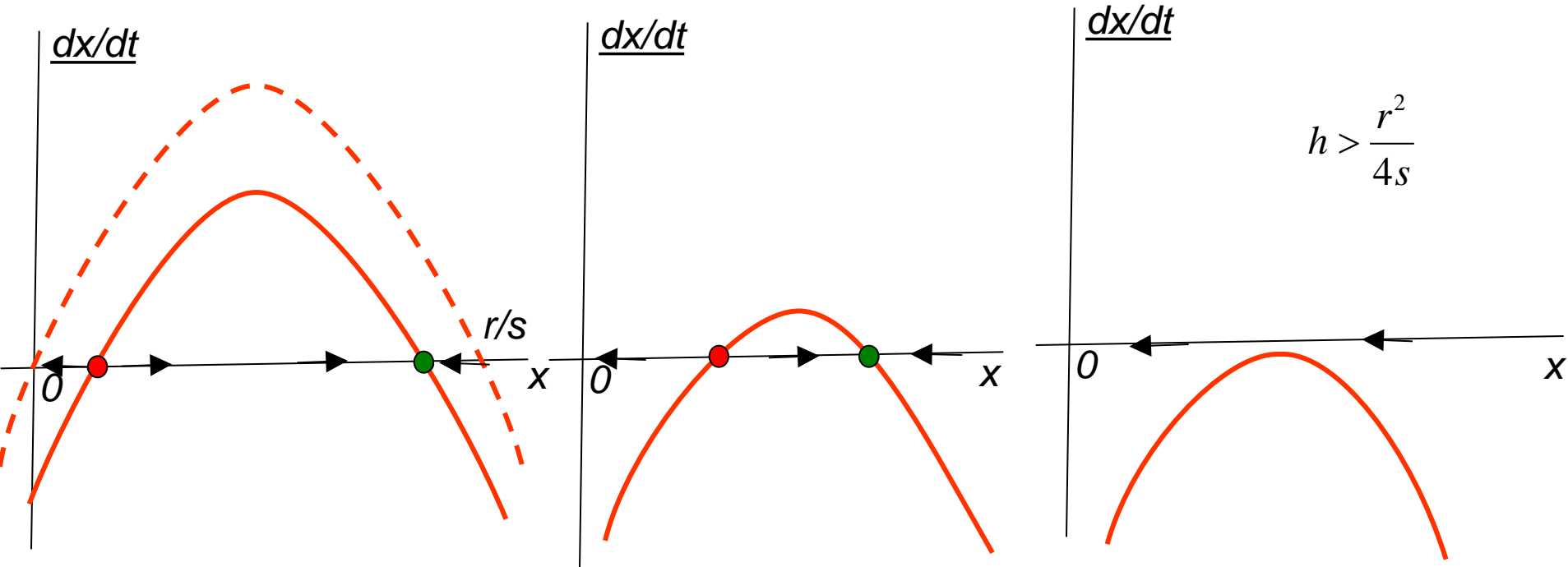
$$x(t) = \frac{rx_0 e^{rt}}{r + sx_0(e^{rt} - 1)}$$



Pesca con imposizione di quote costanti



Prelievo con quote costanti $\dot{x} = (r - sx)x - h$



Due equilibri

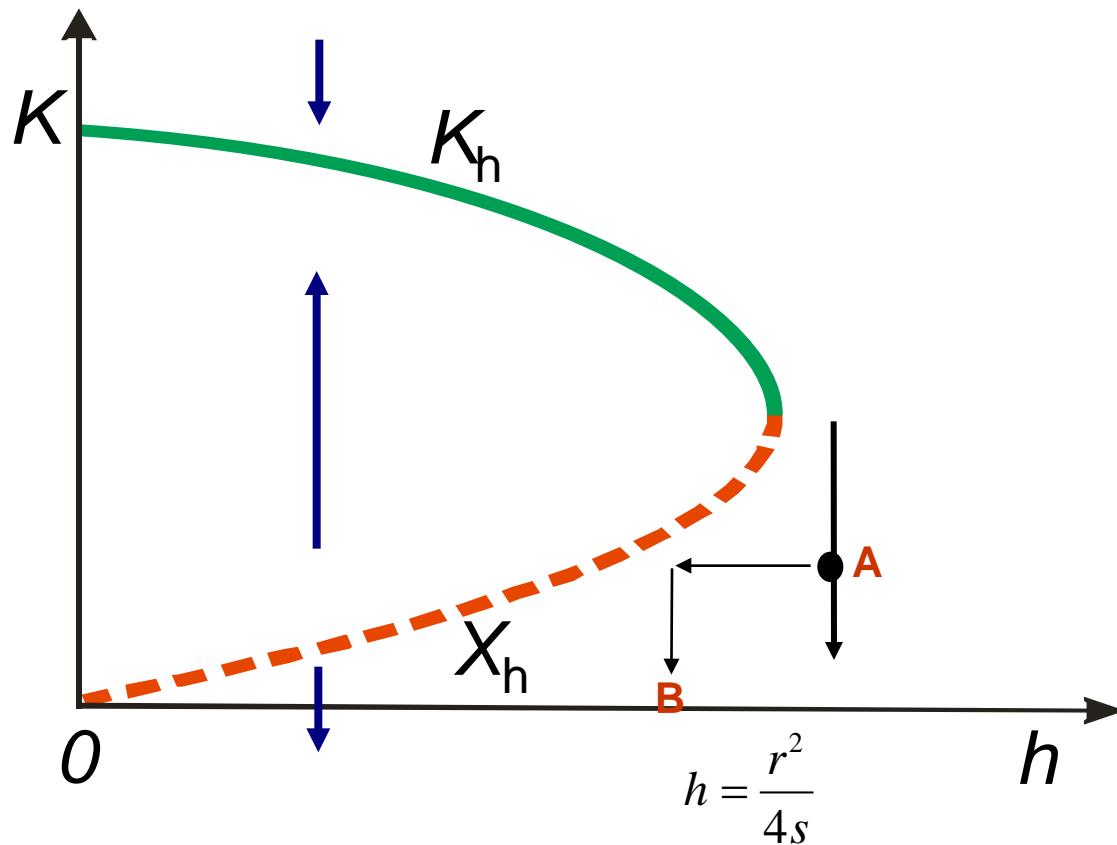
$$X_h = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}$$

Soglia di sopravvivenza

$$K_h = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}$$

Equilibrio stabile

Diagramma di biforcazione



Irreversibilità !

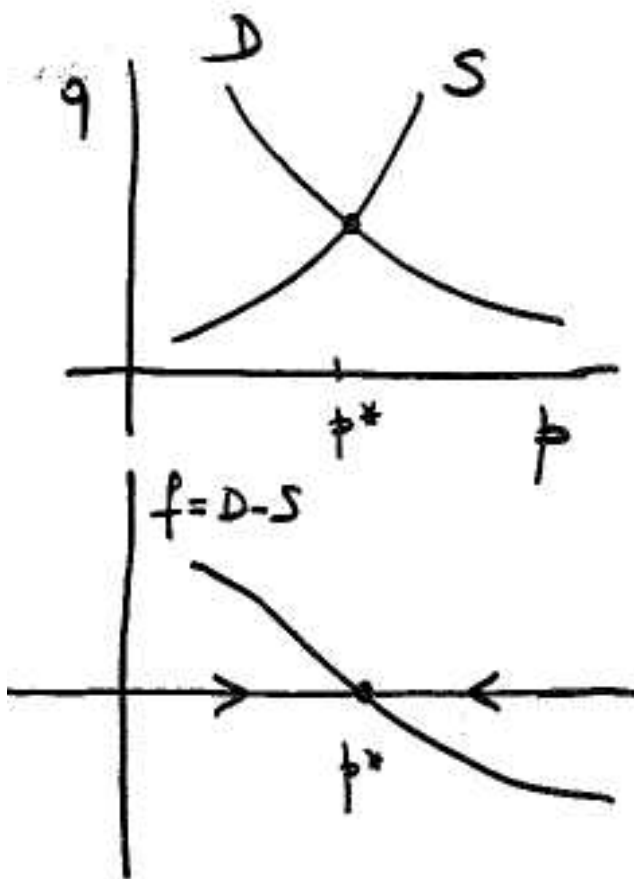
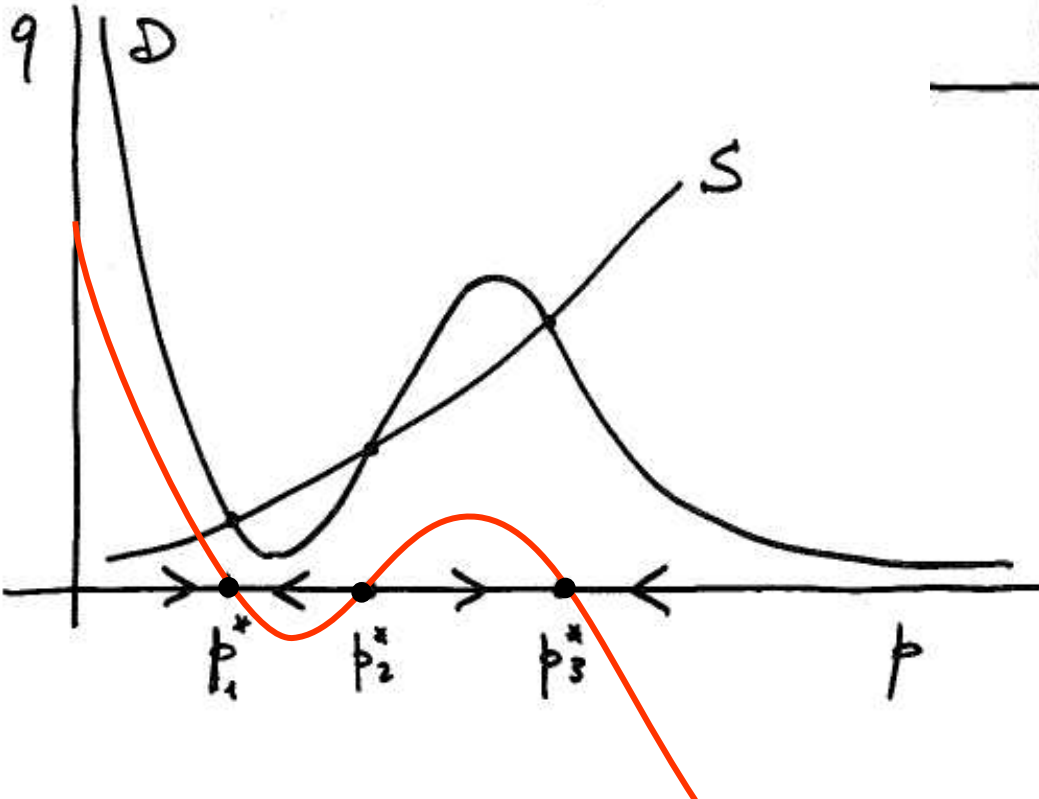
Chi troppo vuole ... non piglia pesci



**Dinamica del prezzo di un prodotto:
dipende da domanda e offerta**

- $$\dot{p} = k[D(p) - S(p)] = f(p)$$

Consumatori snob



Tipico esempio di bistabilità: due equilibri stabili con uno instabile intermedio che fa da spartiacque (separatore dei bacini di attrazione)

E' cruciale il prezzo di partenza

Algoritmo dello studio qualitativo (o topologico) di un sistema dinamico a tempo continuo unidimensionale $\dot{x} = f(x)$

1) Si cercano i punti di equilibrio cercando gli zeri di $f(x)$, cioè risolvendo l'equazione $f(x)=0$

2) In ogni punto di equilibrio x^* si calcola la pendenza (derivata) $f'(x^*)$.

Se $f'(x^*) < 0$ allora il punto di equilibrio è stabile (tangente a pendenza negativa, vedi approx. lineare)

Se $f'(x^*) > 0$ allora il punto di equilibrio è instabile (tangente a pendenza positiva, vedi ancora approx. lineare)

Se $f'(x^*) = 0$ l'approx. lineare non ci dà informazioni

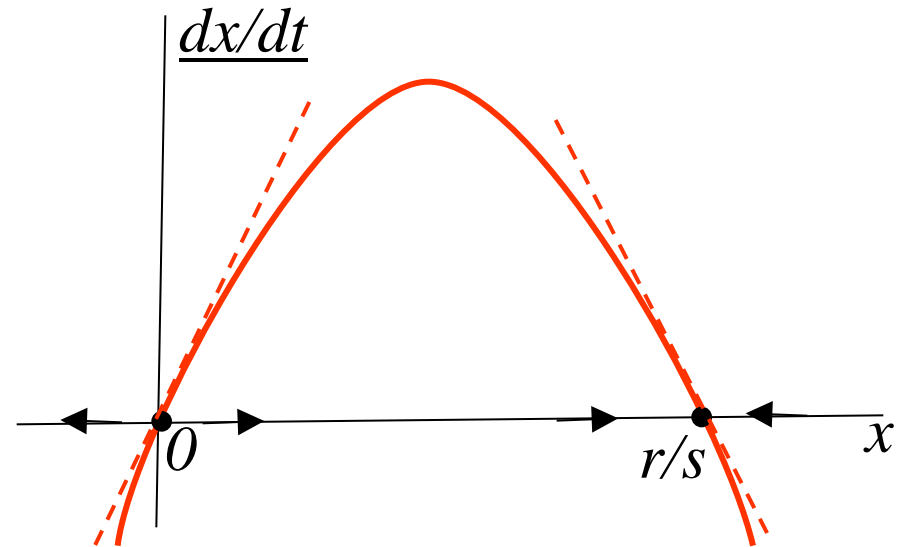
Esempio: la parabola della crescita logistica $\dot{x} = f(x) = x(r - sx)$

$$f(x) = 0 \text{ per } x^* = 0 \text{ e } x^* = r/s$$

$$f'(x) = r - 2sx$$

$$f'(0) = r > 0 \text{ instabile}$$

$$f'(r/s) = -r < 0 \text{ stabile}$$

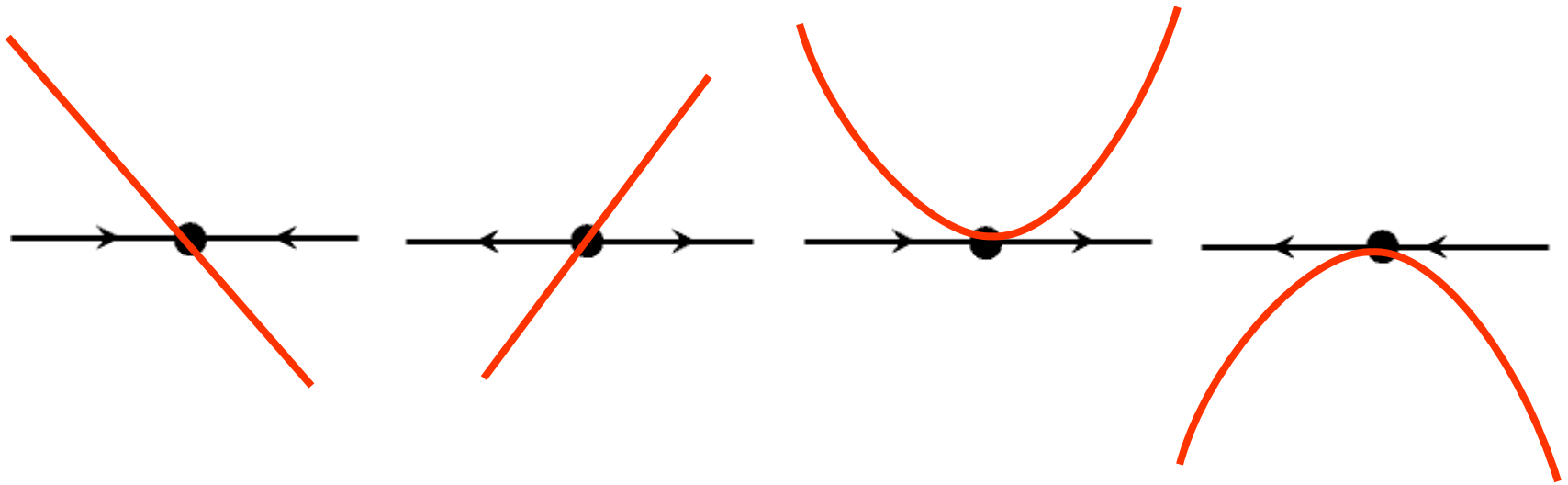


Approx lineare in un intorno del punto fisso

Anche per la velocità di convergenza (ma solo in un intorno)

$$x(t) - x^* = (x(0) - x^*) e^{-f'(x^*) t}$$

$$T_r = -1/f'(x^*)$$

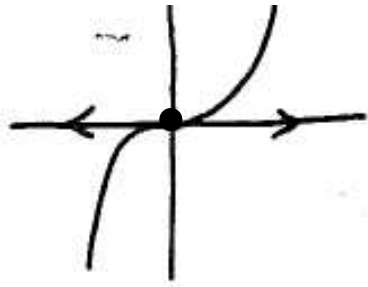


In un intorno di un equilibrio isolato si possono avere solo 4 tipi di diagramma di fase

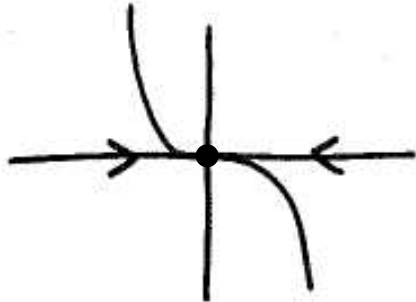
Due sistemi dinamici si dicono equivalenti se hanno lo stesso numero di equilibri e rispettivamente dello stesso tipo

STABILITÀ STRUTTURALE: Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se una piccola modifica nella struttura della equazione di evoluzione (es, la modifica del valore di un parametro) non comporta un cambiamento qualitativo dello scenario dinamico, ovvero lo trasforma in un sistema dinamico equivalente

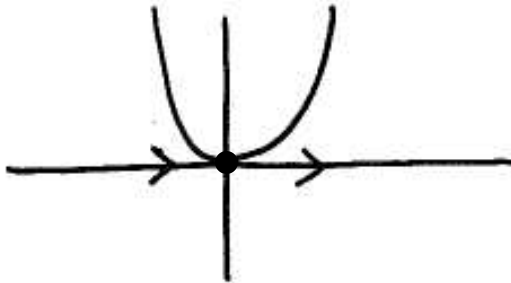
$$\dot{x} = x^3$$



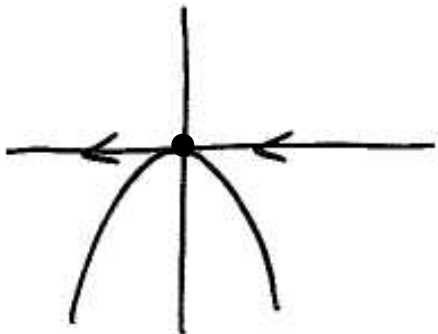
$$\dot{x} = -x^3$$



$$\dot{x} = x^2$$



$$\dot{x} = -x^2$$



Se in un punto di equilibrio x^* di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ si ha $f'(x^*) = 0$ nulla si può concludere sulla sua stabilità. Si tratta di una situazione di instabilità strutturale e una piccola (anche minima) variazione di un parametro può cambiare la classificazione qualitativa del diagramma di fase.

In tutti questi casi abbiamo $x^* = 0$ e $f'(0) = 0$.

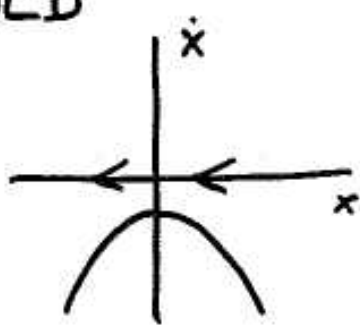
• Biforcazione FOLD

Es. $\dot{x} = \mu - x^2$

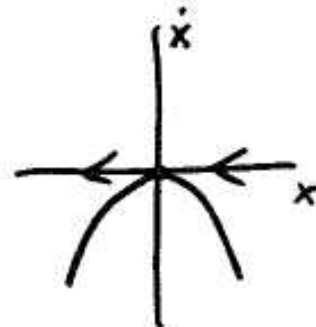
$\lambda(x) = -2x$

$\lambda(\pm\sqrt{\mu}) = \mp 2\sqrt{\mu}$

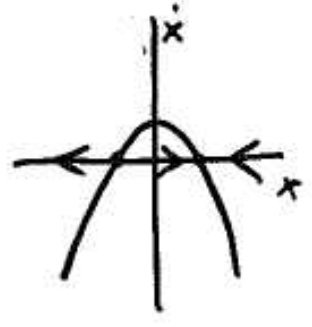
diagramma di
biforcazione



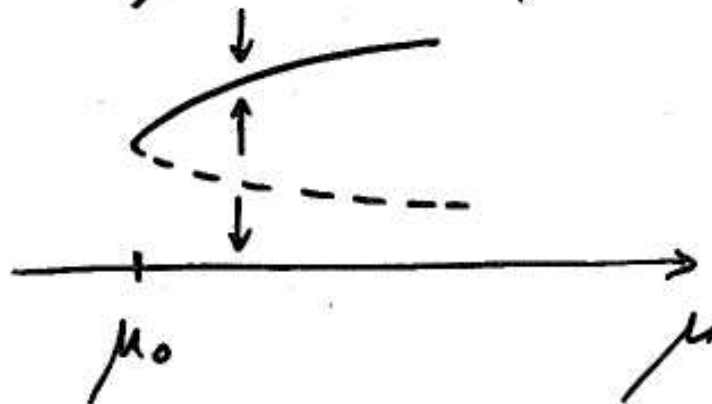
$\mu < 0$



$\mu_0 = 0$



$\mu > 0$



Biforcazione transcritica (cambio di stabilità)

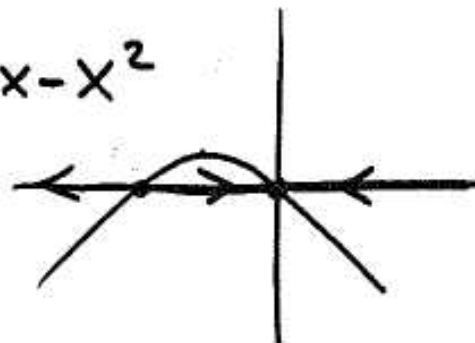
20

Es. $\dot{x} = \mu x - x^2$

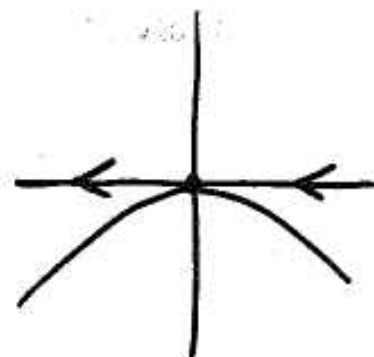
$$\lambda(x) = \mu - 2x$$

$$\lambda(0) = \mu$$

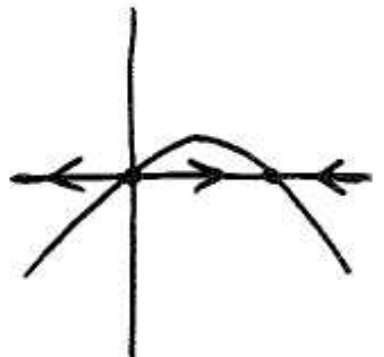
$$\lambda(\mu) = -\mu$$



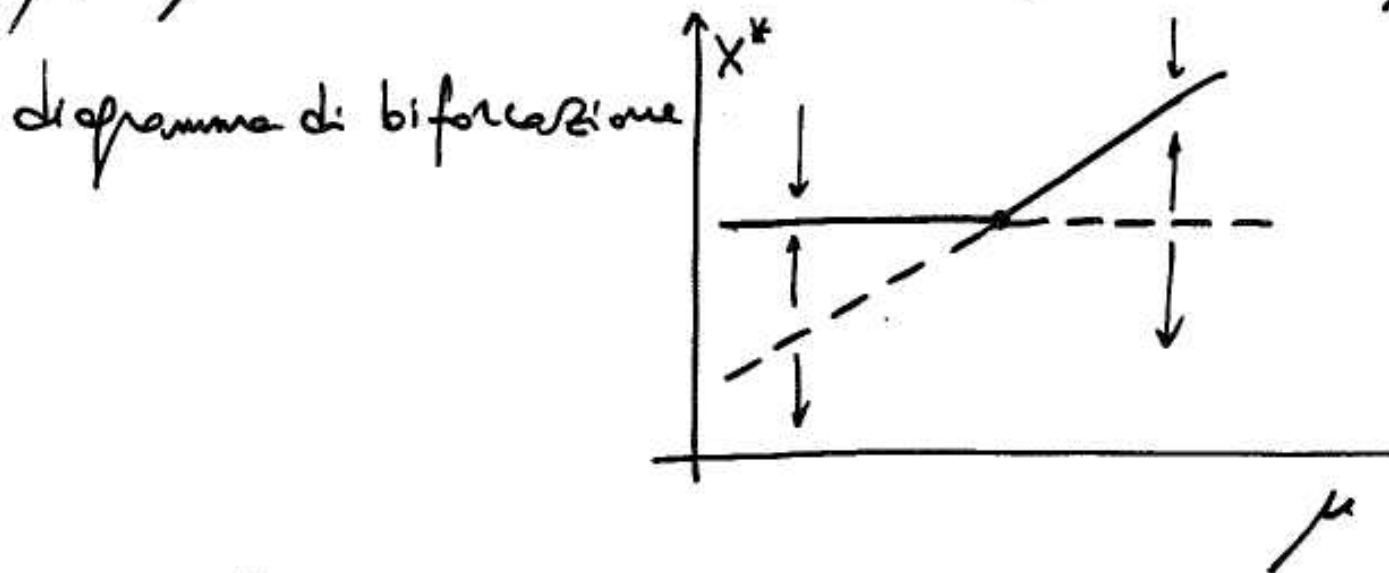
$\mu < 0$



$\mu = \mu_0 = 0$



$\mu > 0$



Biforcazione pitchfork

ES. $\dot{x} = \mu x - x^3$

$\lambda(x) = \mu - 3x^2$

$\lambda(0) = \mu$

$\lambda(\pm\sqrt{\mu}) = -\mu$

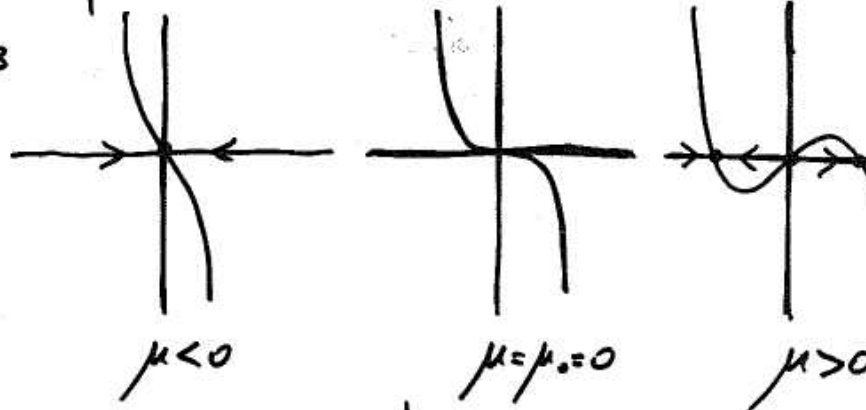
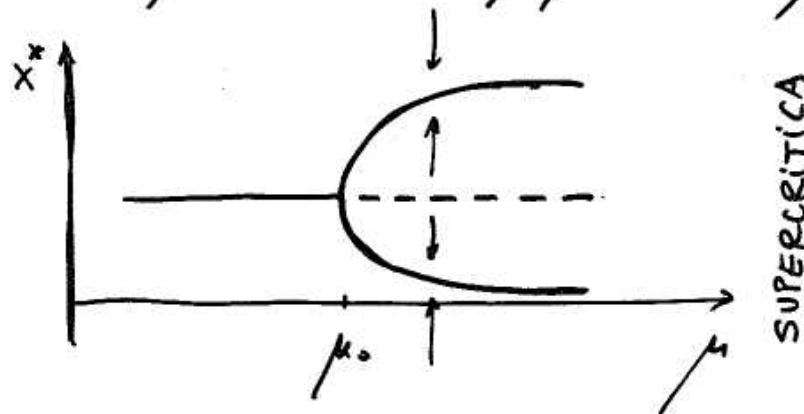
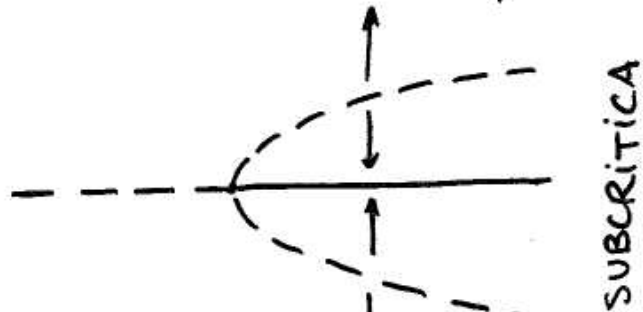


diagramma di
biforcazione



$\dot{x} = x^3 - \mu x$



I punti fissi repulsivi delimitano il bacino di attrazione di quello attrattivo

Con 2 variabili dinamiche

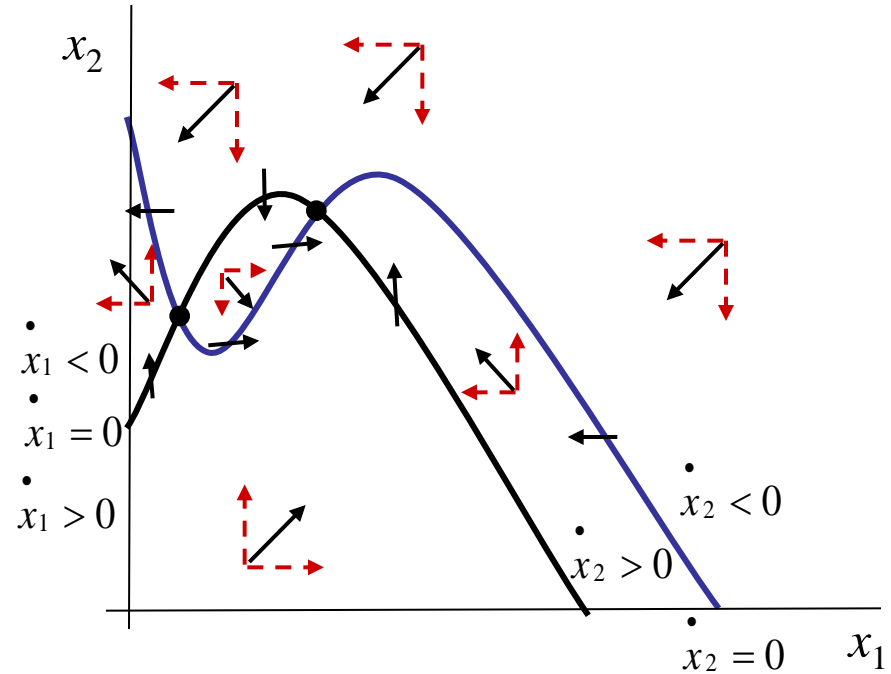
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

con $x_1(0), x_2(0)$ assegnati

Equilibri:
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Segno dei secondi membri

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) \geq 0 \\ f_2(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$



vettori di fase

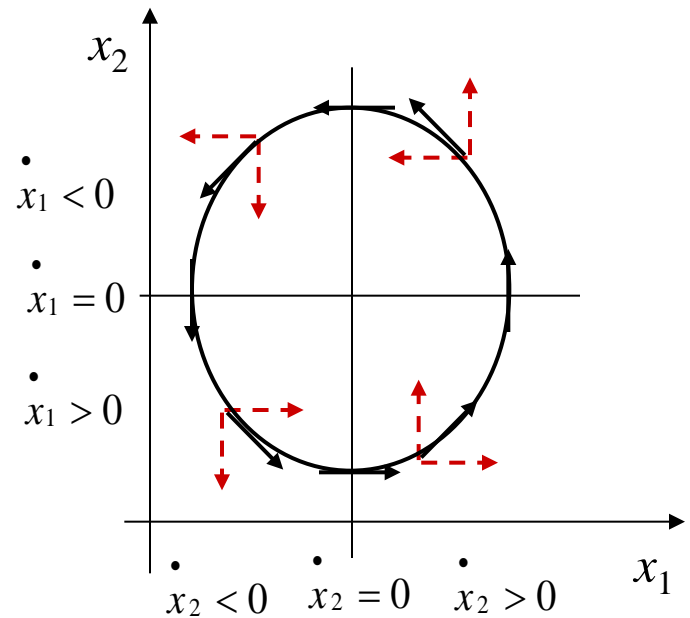
Preda-predatore (Vito Volterra, 1926)

Densità prede x_1 $\dot{x}_1 = r x_1 - b x_1 x_2$

Densità predatori x_2 $\dot{x}_2 = -m x_2 + c x_1 x_2$

$\dot{x}_1 = x_1 (r - b x_2) \geq 0$

$\dot{x}_2 = x_2 (-m + c x_1) \geq 0$



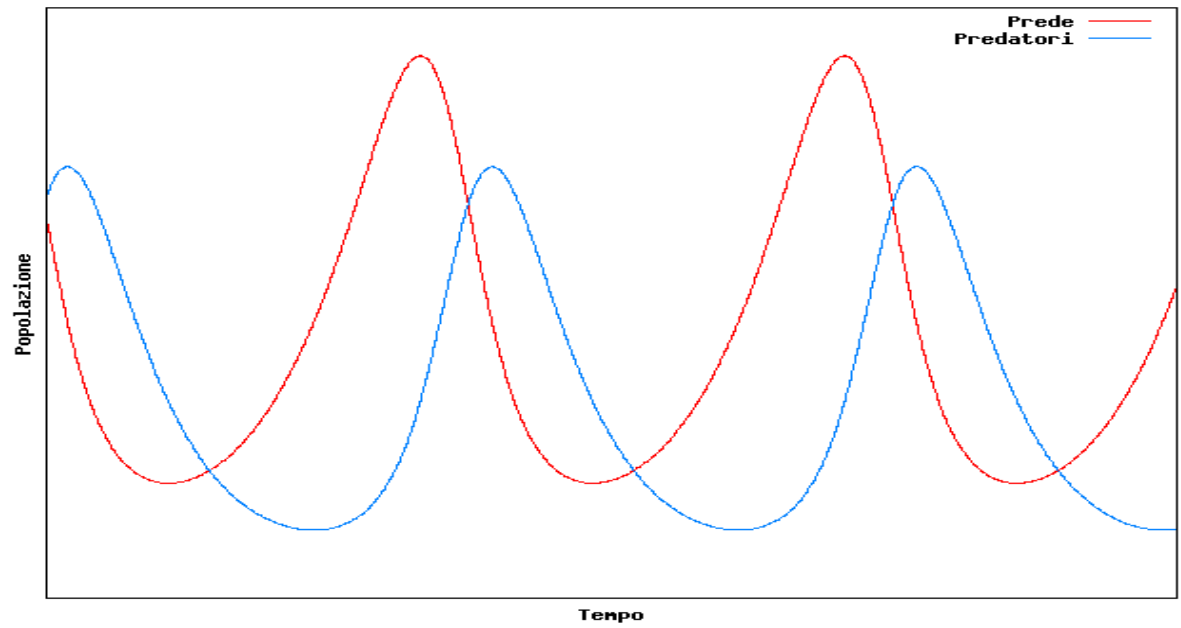
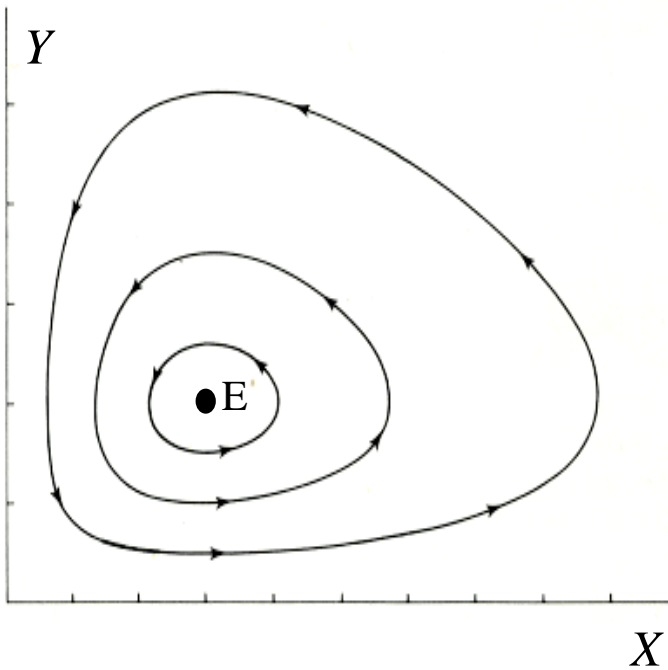
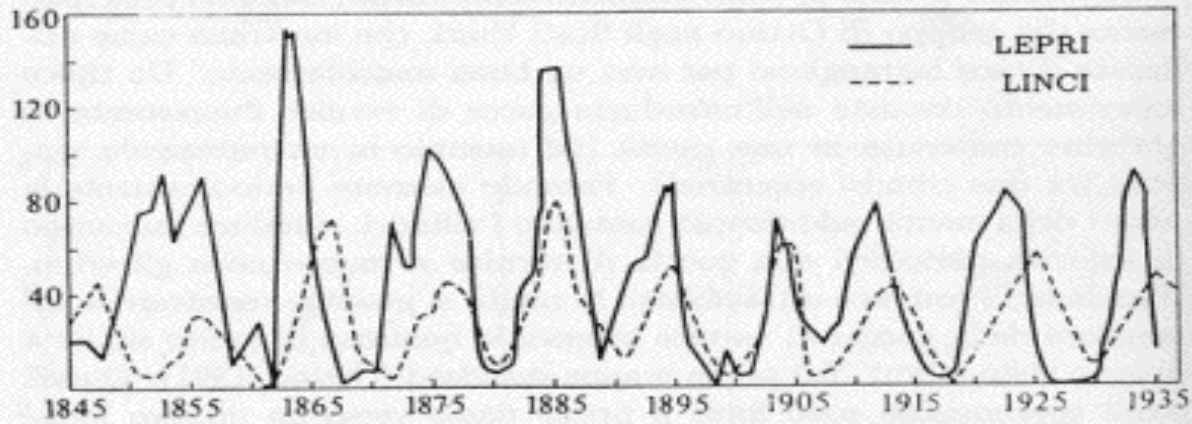


FIGURA 6.6
Andamento temporale del numero di linci e lepri (in migliaia) nelle foreste del Canada nel periodo 1845-1935



Fluttuazioni del numero di lepri e linci canadesi ricostruite in base al numero delle pelli acquistate dalla Compagnia della Baia di Hudson nei diversi anni, da Mac Lulich (1937)

Vito Volterra (1860-1940)

Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che siano mai vissute. Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse

[...]

Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le scienze biologiche e sociali, che è più intensa la curiosità, giacché è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi.

dal discorso inaugurale per l'anno accademico 1901-1902 dell'Università di Roma



Vito Volterra (1860-1940)



"Plasmare dunque concetti in modo da poter introdurre la misura; misurare quindi; dedurre poi delle leggi; risalire da esse ad ipotesi; dedurre da queste, mercé l'analisi, una scienza di enti ideali sì, ma rigorosamente logica; confrontare poscia con la realtà; rigettare o trasformare, man mano che nascono contraddizioni tra i risultati del calcolo ed il mondo reale, le ipotesi fondamentali che han già servito; e giungere così a divinare fatti e analogie nuove, o dallo stato presente arrivare ad argomentare quale fu il passato e che cosa sarà l'avvenire; ecco, nei più brevi termini possibili, riassunto il nascere e l'evolversi di una scienza avente carattere matematico."

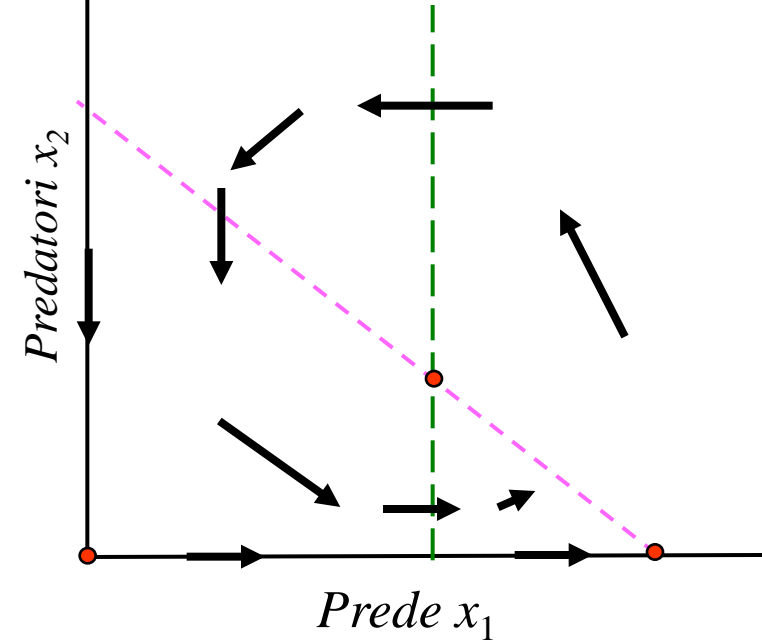
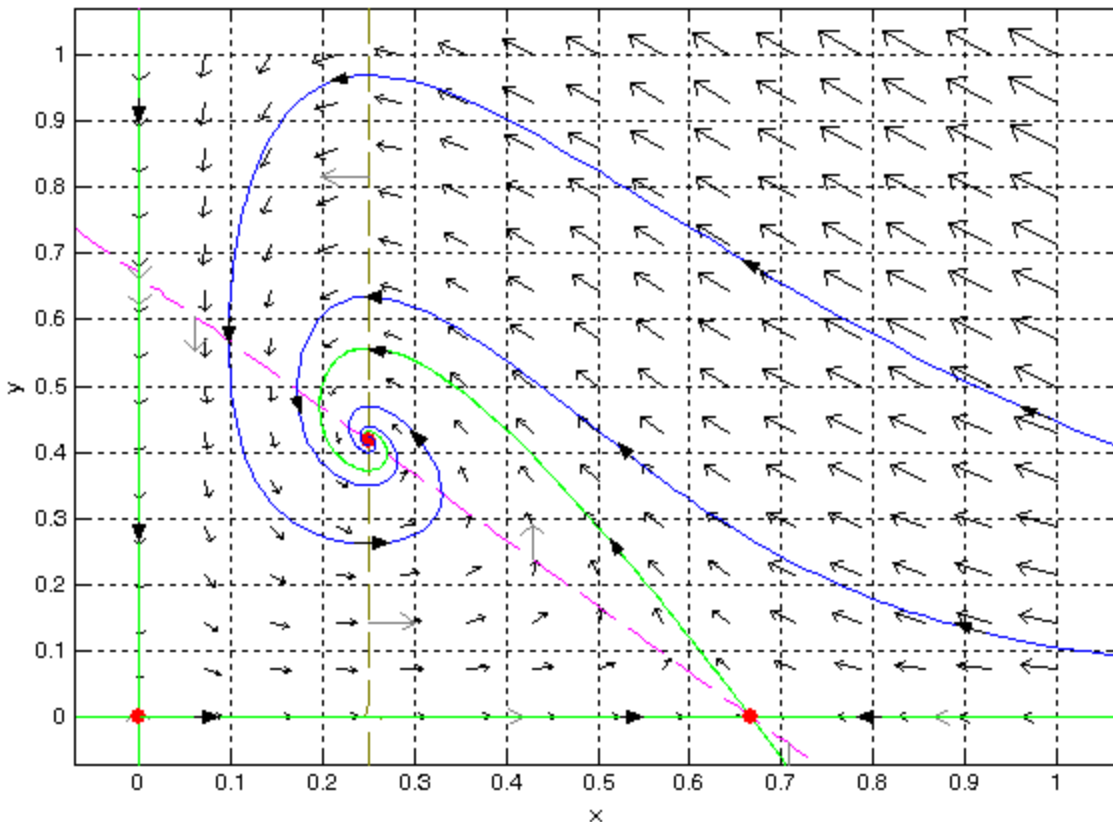
Vito Volterra, Saggi Scientifici, Zanichelli Bologna
1920

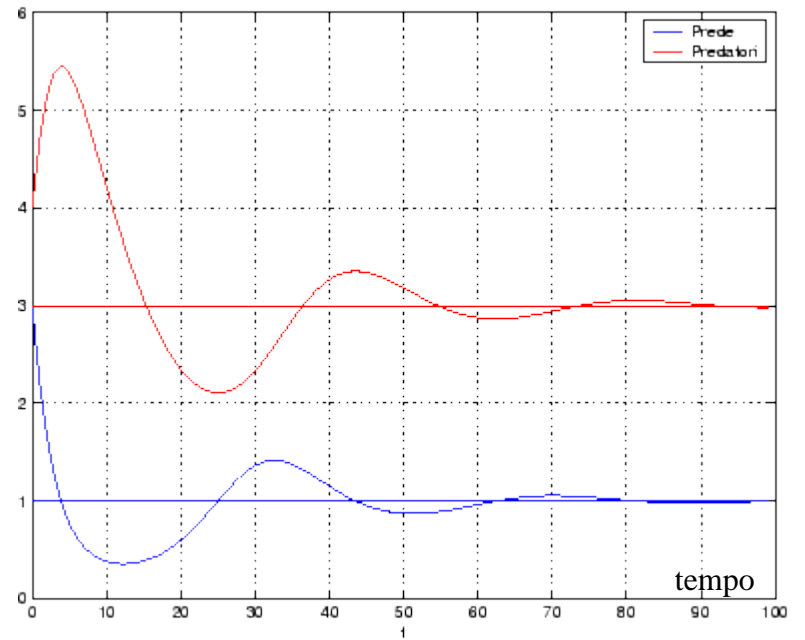
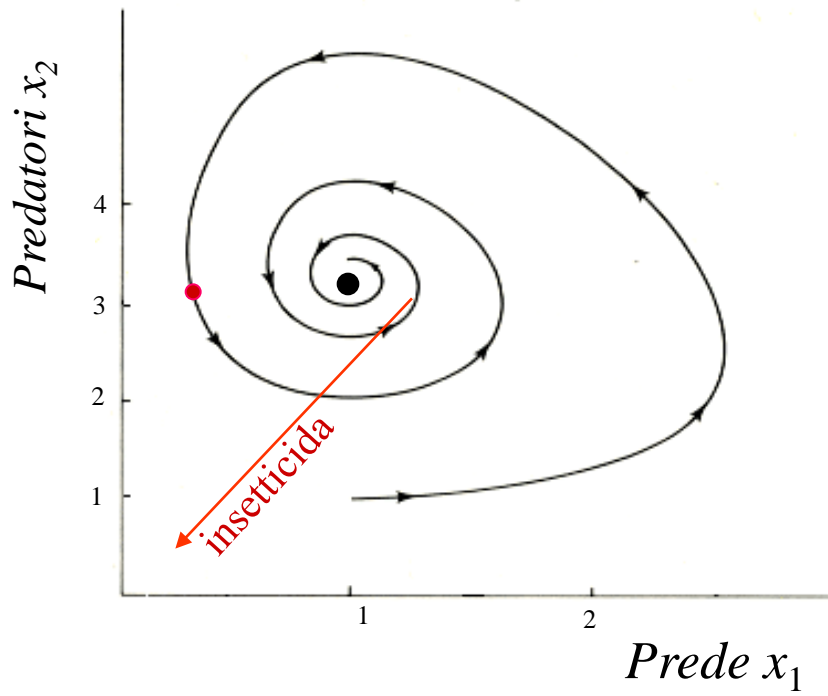
Crescita logistica della preda

- $x_1' = r x_1 - s x_1^2 - x_1 x_2 = x_1(r - s x_1 - b x_2)$
- $x_2' = -m x_2 + c x_1 x_2 = x_2(-m + c x_1)$

$$x' = 2x - 3xy + \alpha x^2$$
$$y' = 4xy - y$$

alpha = -3

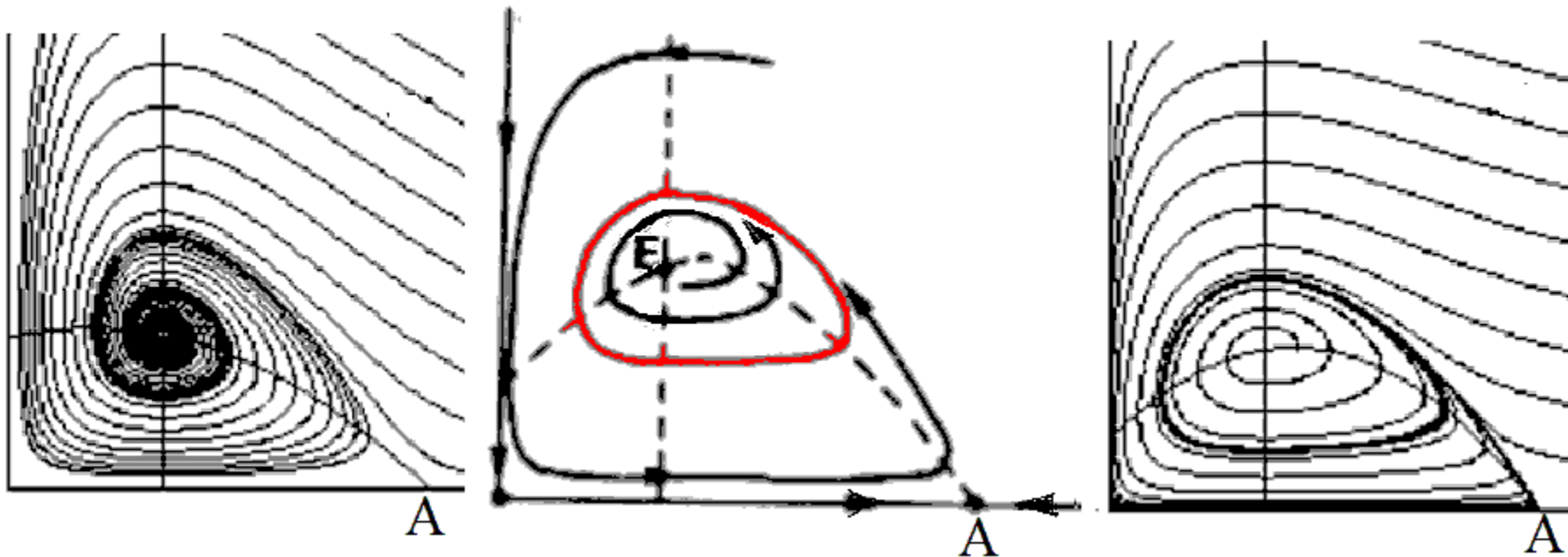




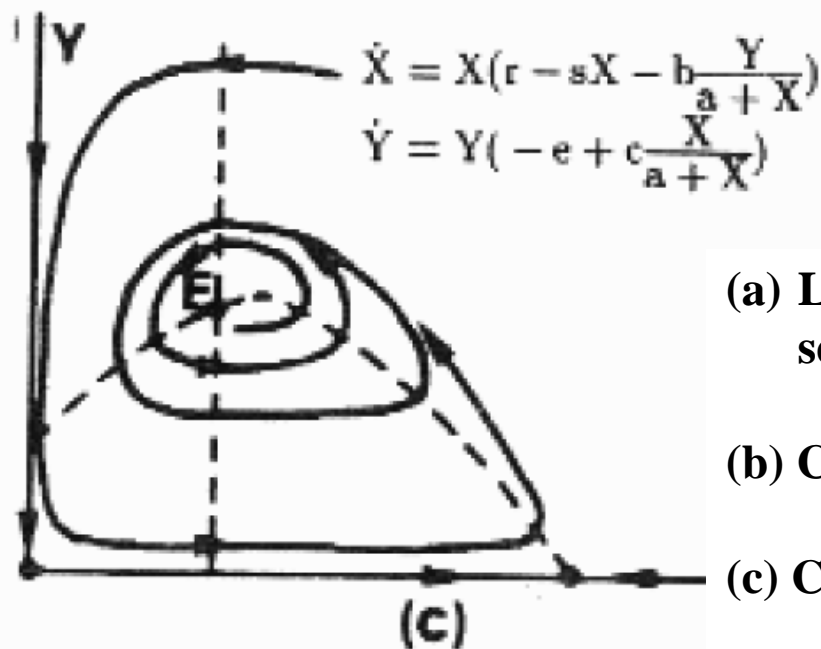
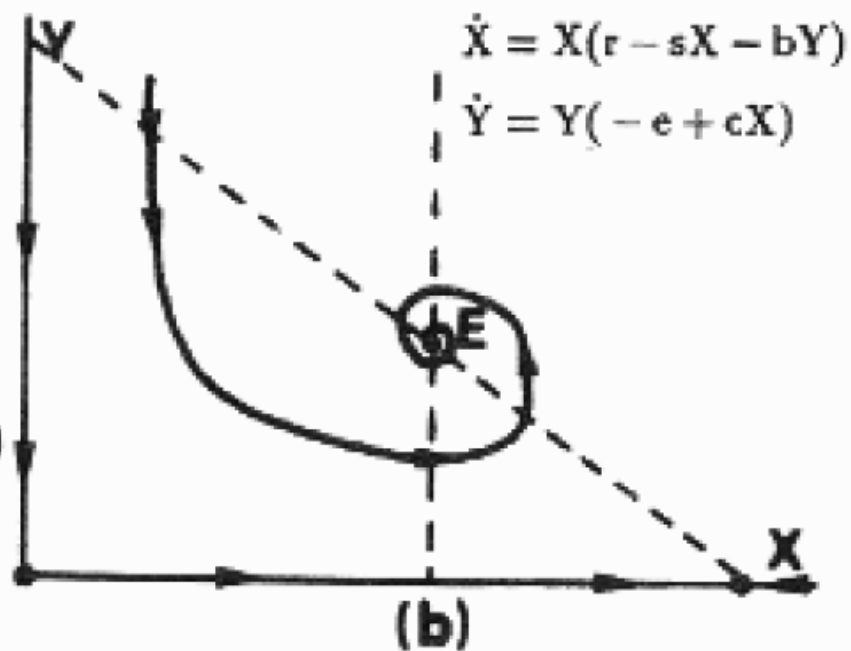
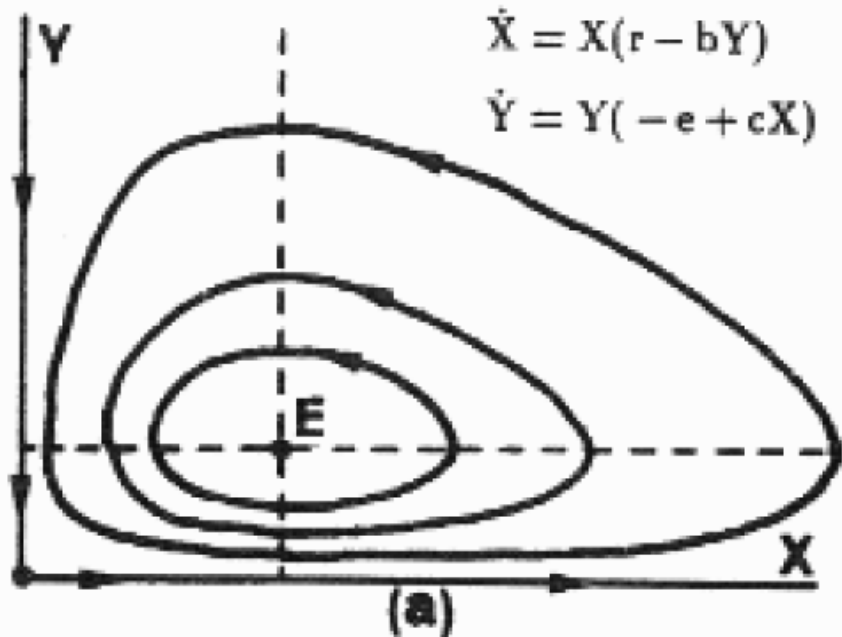
Sazietà del predatore

$$\bullet \quad \dot{x}_1 = rx_1 - sx_1^2 - \frac{bx_1}{a+x_1}x_2 = x_1 \left(r - sx_1 - \frac{bx_2}{a+x_1} \right)$$

$$\bullet \quad \dot{x}_2 = -mx_2 + \frac{cx_1}{a+x_1}x_2 = x_2 \left(-m + \frac{cx_1}{a+x_1} \right)$$



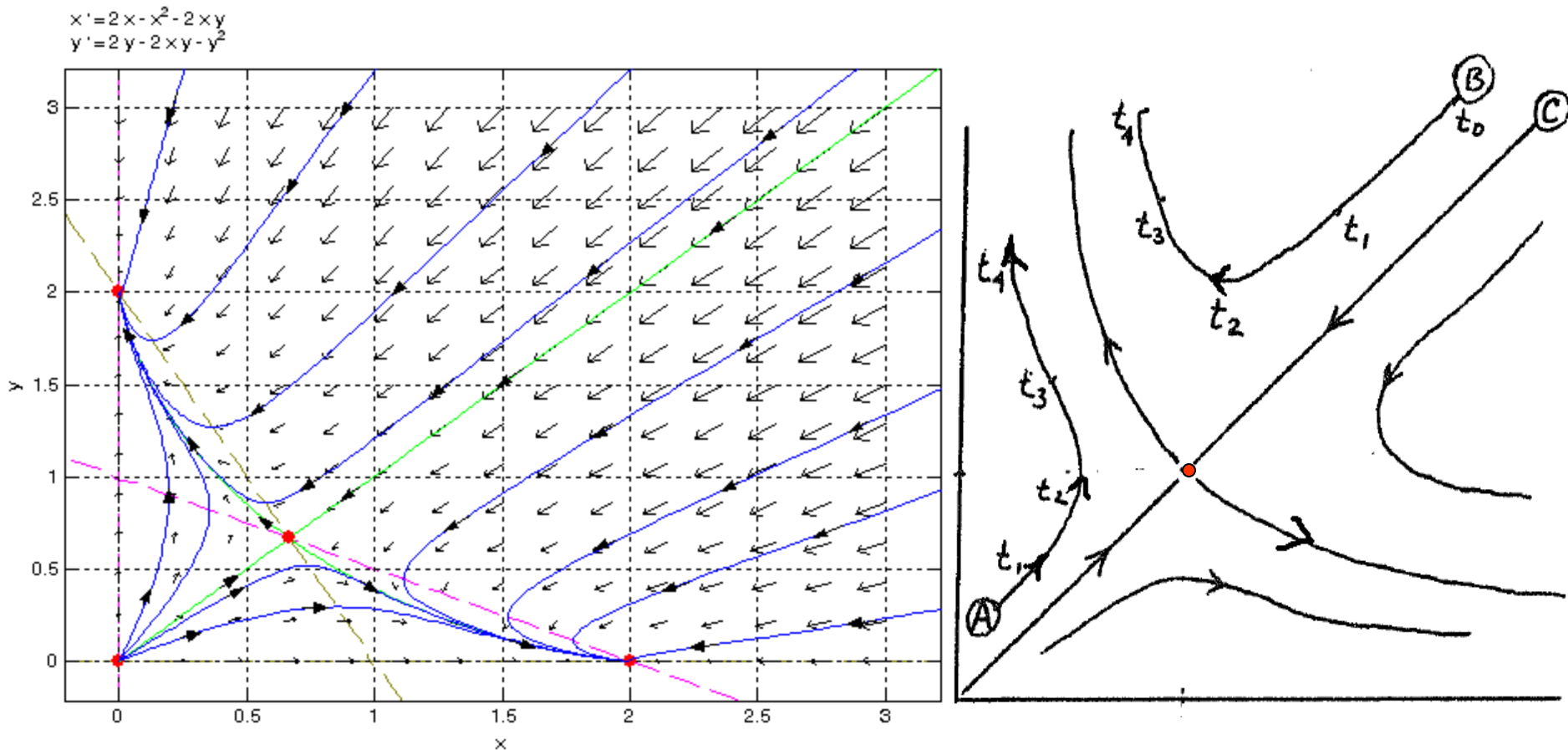
Ciclo limite attrattivo



- (a) Lotka-Volterra senza classico senza smorzatore per la preda
- (b) Con smorzatore per la preda
- (c) Con saturazione dell'appetito

Competizione fra due specie

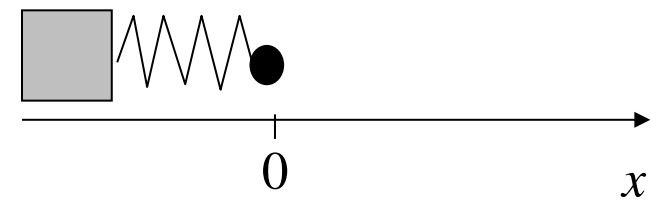
- $x_1' = r_1 x_1 - s_1 x_1^2 - \alpha_{12} x_1 x_2 = x_1 (r_1 - s_1 x_1 - \alpha_{12} x_2)$
- $x_2' = r_2 x_2 - s_2 x_2^2 - \alpha_{12} x_1 x_2 = x_2 (r_2 - s_2 x_2 - \alpha_{12} x_1)$



Principio d'esclusione competitiva (Gause, 1934)

*Ponendo in colture separate le due specie, e rinnovando periodicamente il terreno, si ottennero curve di accrescimento approssimativamente sigmoidali con il conseguimento d'uno stato stazionario. Ponendo le due specie insieme in uno stesso terreno di coltura si vide che mentre *Paramecium aurelia* manteneva ancora un accrescimento logistico, la popolazione di *Paramecium caudatum*, dopo un certo numero di giorni (circa 8), cominciò a diminuire fino a scomparire del tutto. Da ciò si può dedurre che una delle due specie è riuscita a competere meglio per le risorse causando l'estinzione di quella concorrente.*

Oscillatore armonico



$$m \ddot{x} = -kx$$

$$c.i. x(0) = A;$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

soluzione

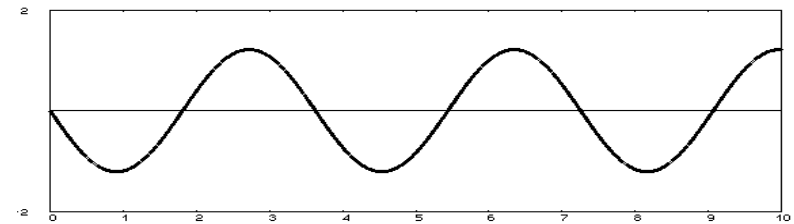
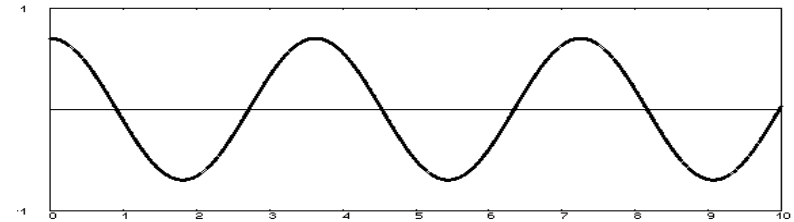
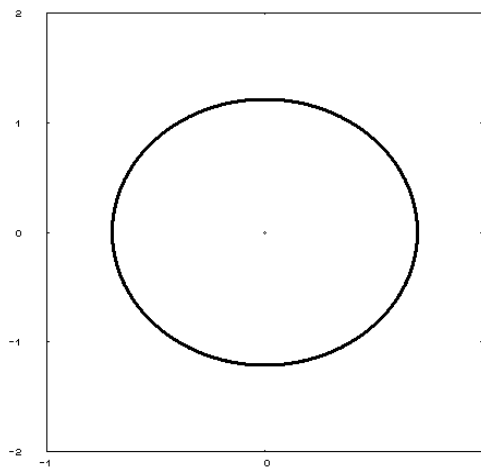
$$x(t) = A \cos \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sistema equivalente

$$x_1 = x; \quad x_2 = \dot{x}$$

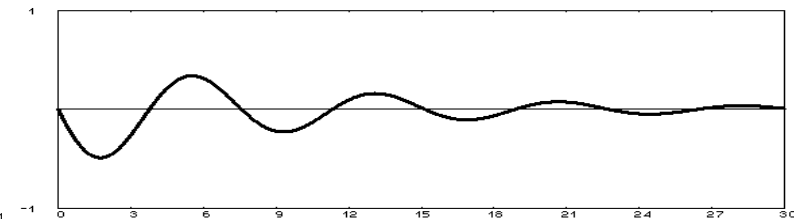
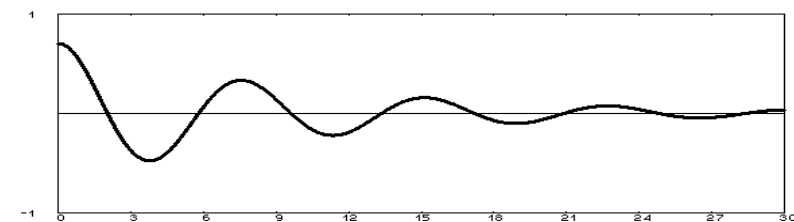
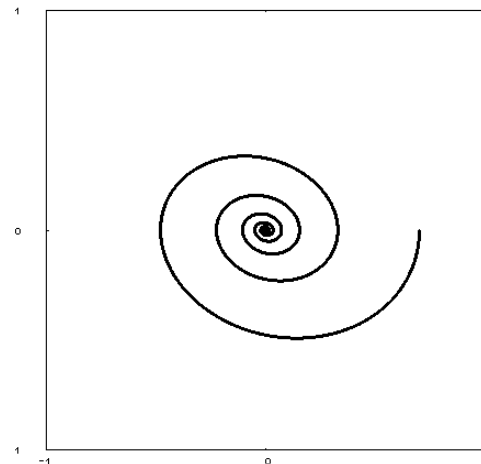
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{cases}$$

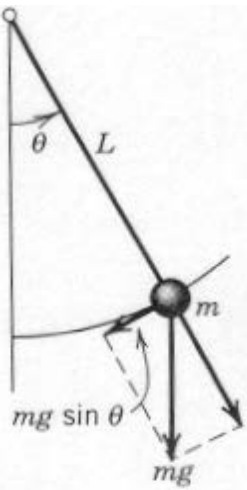
$$c.i. x_1(0) = A \quad x_2(0) = 0$$



Con attrito $-\eta \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{\eta}{m} x_2 \end{cases}$$





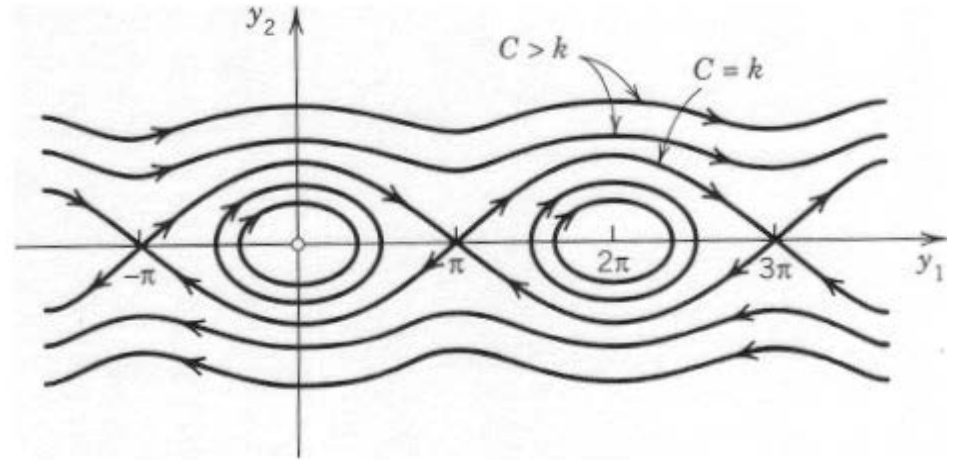
Pendolo $l \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad \theta(0) = \theta_0; \quad \dot{\theta}(0) = 0$

E' un oscillatore armonico per $\sin \theta \cong \theta$

Altrimenti:

$$x_1 = \theta; \quad x_2 = \dot{\theta}$$

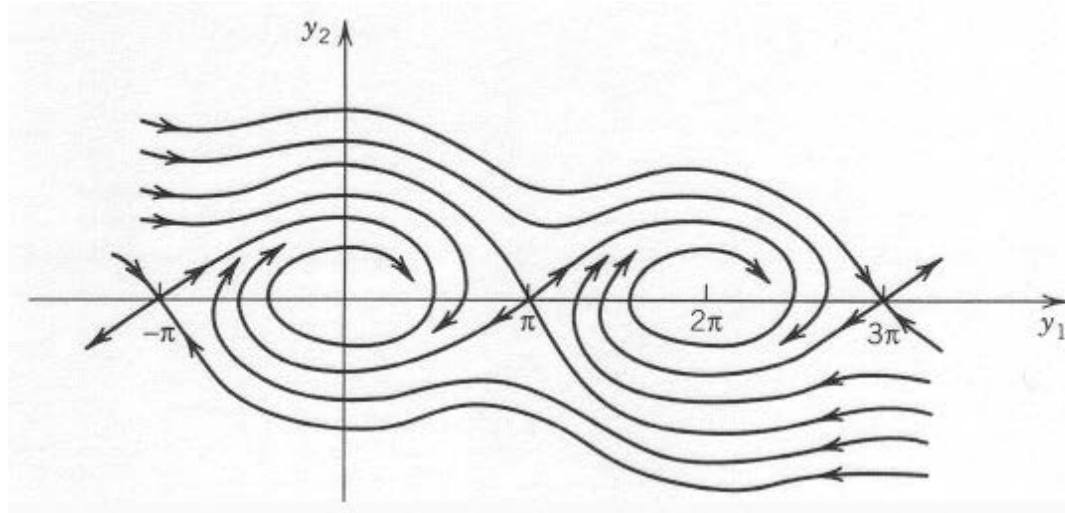
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$



Introducendo attrito viscoso, cioè un termine proporzionale alla velocità

angolare: $l \ddot{\theta} = -k \dot{\theta} - g \sin \theta$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{l} x_2 \end{cases}$$



Il pendolo ideale consiste di un filo sottilissimo, incapace di resistenza a flessione e torsione, di lunghezza L , cui è attaccata una massa al suo baricentro. Per la sfera il baricentro è il centro, per un corpo umano è un punto a 0.65 della sua altezza, misurato dai piedi. Se l'impiccato è alto m. 1.70 il baricentro è a m. 1.10 dai suoi piedi e la lunghezza L comprende questa lunghezza. Cioè, se la testa fino al collo è lunga m. 0.30, il baricentro è a $1.70 - 1.10 = 0.60$ m. dalla testa e a $0.60 - 0.30 =$ m. 0.30 dal collo dell'impiccato.

Il periodo di piccole oscillazioni del pendolo, determinato da Huygens, è dato da:

$$T \text{ (secondi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \quad (1)$$

dove L è in metri, $\pi = 3.1415927\dots$ e $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$. Ne risulta che la (1) dà:

$$T = \frac{2 \cdot 3.1415927}{\sqrt{9.8}} \sqrt{L} = 2.00709 \sqrt{L}$$

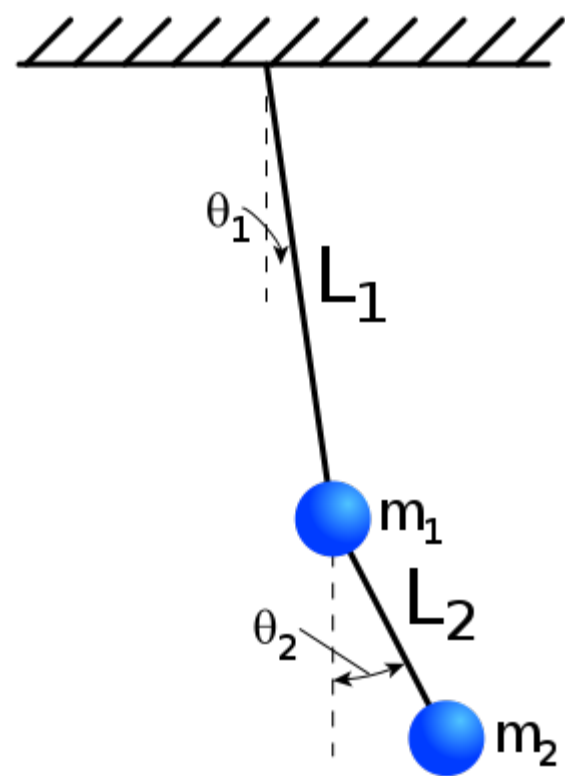
cioè pressapoco:

$$T = 2\sqrt{L} \quad (2)$$

Nota bene: T è indipendente dal peso dell'impiccato (uguaglianza degli uomini davanti a Dio)...

Un doppio pendolo con due masse attaccato allo stesso filo... Se sposti A, A oscilla e dopo un po' si ferma e oscilla B. Se i pendoli accoppiati hanno masse o lunghezze diverse, l'energia passa dall'uno all'altro ma i tempi di queste oscillazioni dell'energia non sono uguali... Questo vagolare dell'energia avviene anche se invece di cominciare a far oscillare A liberamente dopo averlo spostato, seguiti a spostarlo periodicamente con una forza. Cioè se il vento soffia a raffiche sull'impiccato in anti-sintonia, dopo un po' l'impiccato non si muove e la forza oscilla come se fosse imperniata sull'impiccato.

(Da una lettera privata di Mario Salvadori, Columbia University, 1984)



Argento vivo (2013) di Marco Malvaldi (1974-)

Un pendolo è un oggetto il cui comportamento è molto facile da prevedere. Un qualsiasi peso attaccato in fondo a un filo (o distribuito lungo un'asta la cui estremità superiore sia fissata a un perno) non potrà fare altro quando perturbato dal suo stato di equilibrio, se non oscillare da una parte all'altra, smorzando mano a mano l'ampiezza del proprio moto [...]. Un pendolo semplice, dicevamo, ha un comportamento semplice e lineare: ma se in fondo al primo pendolo ne attaccate un secondo, se in fondo ad un'asta che pende ne incardinate una seconda e poi, dopo aver sollevato il tutto, lo lasciate cadere, la semplicità di cui parlavamo prima potete scordarvela. Un doppio pendolo, nonostante la sua apparente semplicità, è quello che in fisica si definisce "sistema caotico": ovvero un sistema che, se si cambiano anche in modo infinitesimale le condizioni di partenza, esibisce comportamenti completamente differenti fra loro, e non prevedibili sulla base delle condizioni iniziali. Basta alzare uno dei due perni un filino di più, o di meno, e la traiettoria che tratterà il nostro pendolo potrebbe non assomigliare minimamente a quelle precedenti.

Da un punto di vista fisico, un giocatore di golf è un doppio pendolo: una prima asta (le braccia fino al gomito) su cui è incernierata una seconda asta (le braccia dal gomito al polso, le mani e la mazza). Un sistema, quindi, che per minime variazioni delle condizioni iniziali esibisce comportamenti assolutamente caotici.

Questa breve digressione di fisica classica, oltre a far vedere che l'autore è una persona di una certa qual cultura, ci aiuta a comprendere per quale motivo, mentre si incamminava verso la club house, Giacomo Mancini fosse incazzato nero.

Dato un S.D.
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad \text{con } x_1(0), x_2(0) \text{ assegnati}$$

Equilibri:
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Stabilità di ciascun equilibrio

Sia (p, q) un equilibrio, dette $X_1 = x_1 - p$, $X_2 = x_2 - q$ si introduce l'approssimazione lineare in un intorno dell'equilibrio calcolando in esso le 4 derivate parziali: $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{(p,q)}$ (Matrice Jacobiana)

Approx. lineare
$$\begin{cases} \frac{dX_1(t)}{dt} = a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dX_1(t)}{dt} = a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) \end{cases}$$

Sol. di prova $X_1 = w_1 e^{\lambda t}$ $X_2 = w_2 e^{\lambda t}$

$$\cancel{\lambda w_1 e^{\lambda t}} = a_{11} \cancel{w_1 e^{\lambda t}} + a_{12} w_2 e^{\lambda t}$$

Sostituisco:

$$\cancel{\lambda w_2 e^{\lambda t}} = a_{21} \cancel{w_1 e^{\lambda t}} + a_{22} w_2 e^{\lambda t}$$

$$(a_{11} - \lambda)w_1 + a_{12}w_2 = 0$$

Sistema lineare omogeneo con parametro
(equazione agli autovalori)

$$a_{21}w_1 + (a_{22} - \lambda)w_2 = 0$$

Ha soluzioni non nulle se $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$

cioè $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$ $\lambda^2 - Tr\lambda + Det = 0$

(1) Due radici λ_1, λ_2 (autovalori) reali distinte con corrispondenti autovettori \underline{v}_1 e \underline{v}_2

$Tr^2 - 4Det > 0$

Soluzione generale:

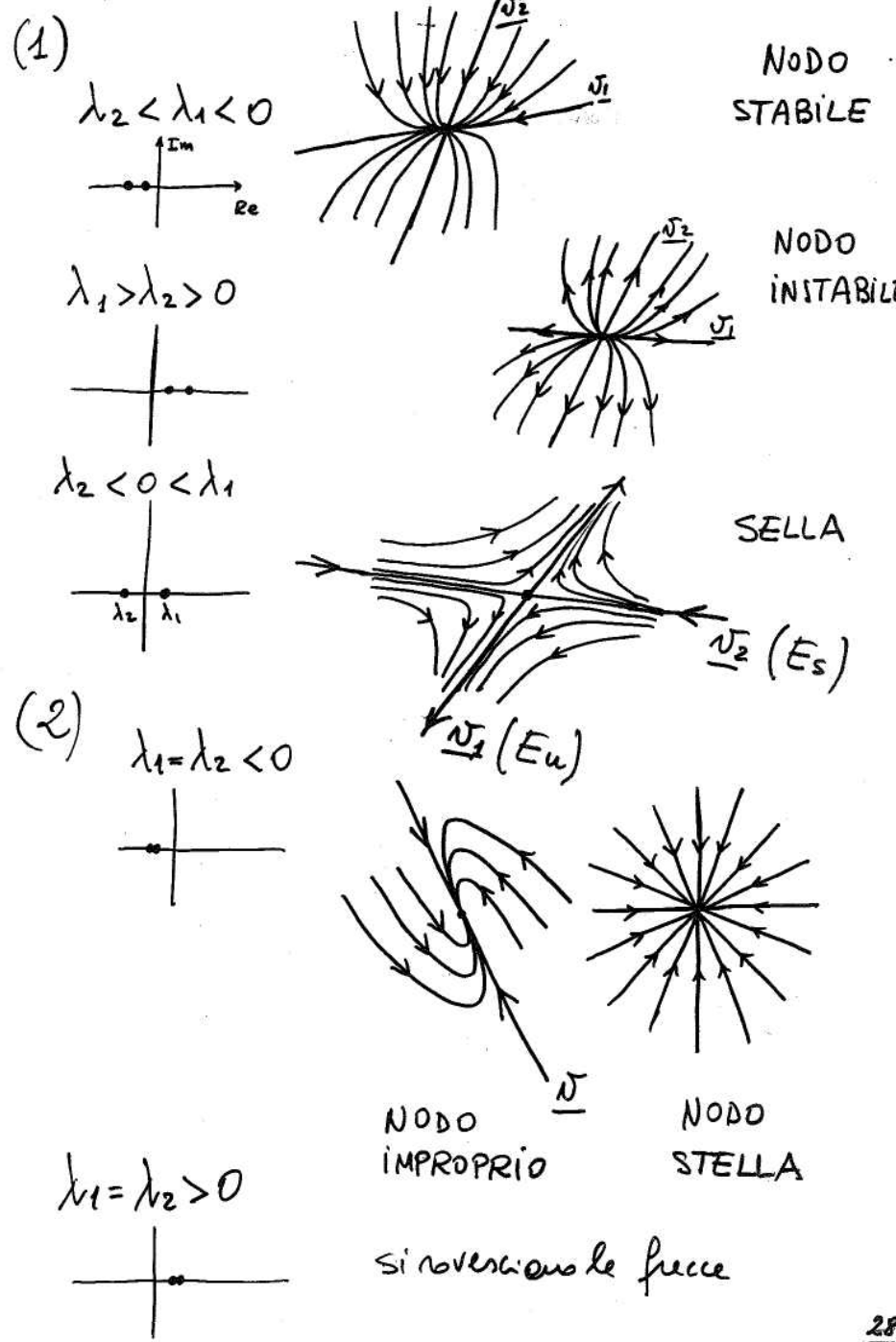
$X(t) = C_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

(2) Due radici $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda$ reali coincidenti

$Tr^2 - 4Det = 0$

Soluzione generale:

$X(t) = \underline{v} (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$



(3) Due radici λ_1, λ_2 (autovalori) complesse coniugate: $\text{Tr}^2 - 4\text{Det} < 0$
 $\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$

Soluzione generale:

2 soluzioni complesse:

$$y_1 = \underline{v}_1 e^{(a+ib)t} = \underline{v}_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$y_2 = \underline{v}_2 e^{(a-ib)t} = \underline{v}_2 e^{at} (\cos bt - i \sin bt)$$

Ma ogni combinazione lineare è soluzione, in particolare:

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \text{Re} \underline{v}_1 \cdot e^{at} \cos bt$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \text{Im} \underline{v}_1 \cdot e^{at} \sin bt$$

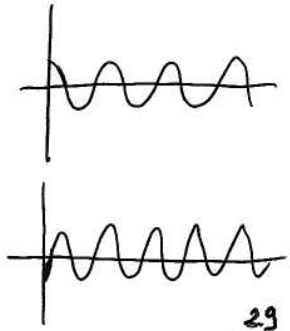
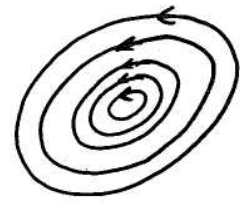
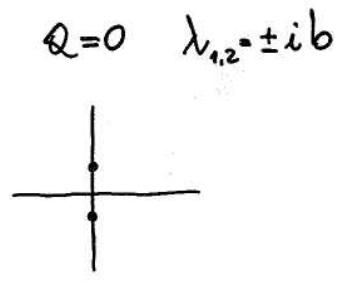
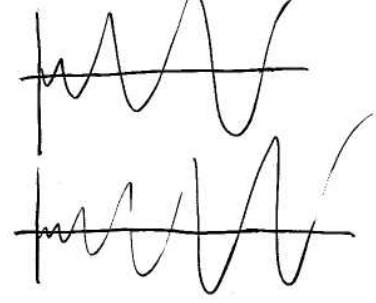
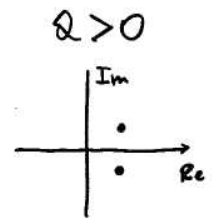
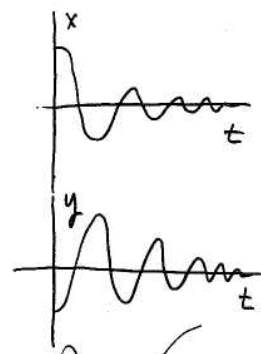
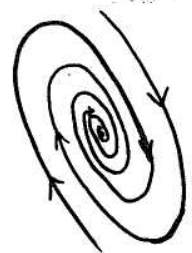
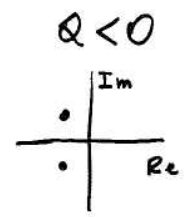
soluzioni particolari reali indipendenti

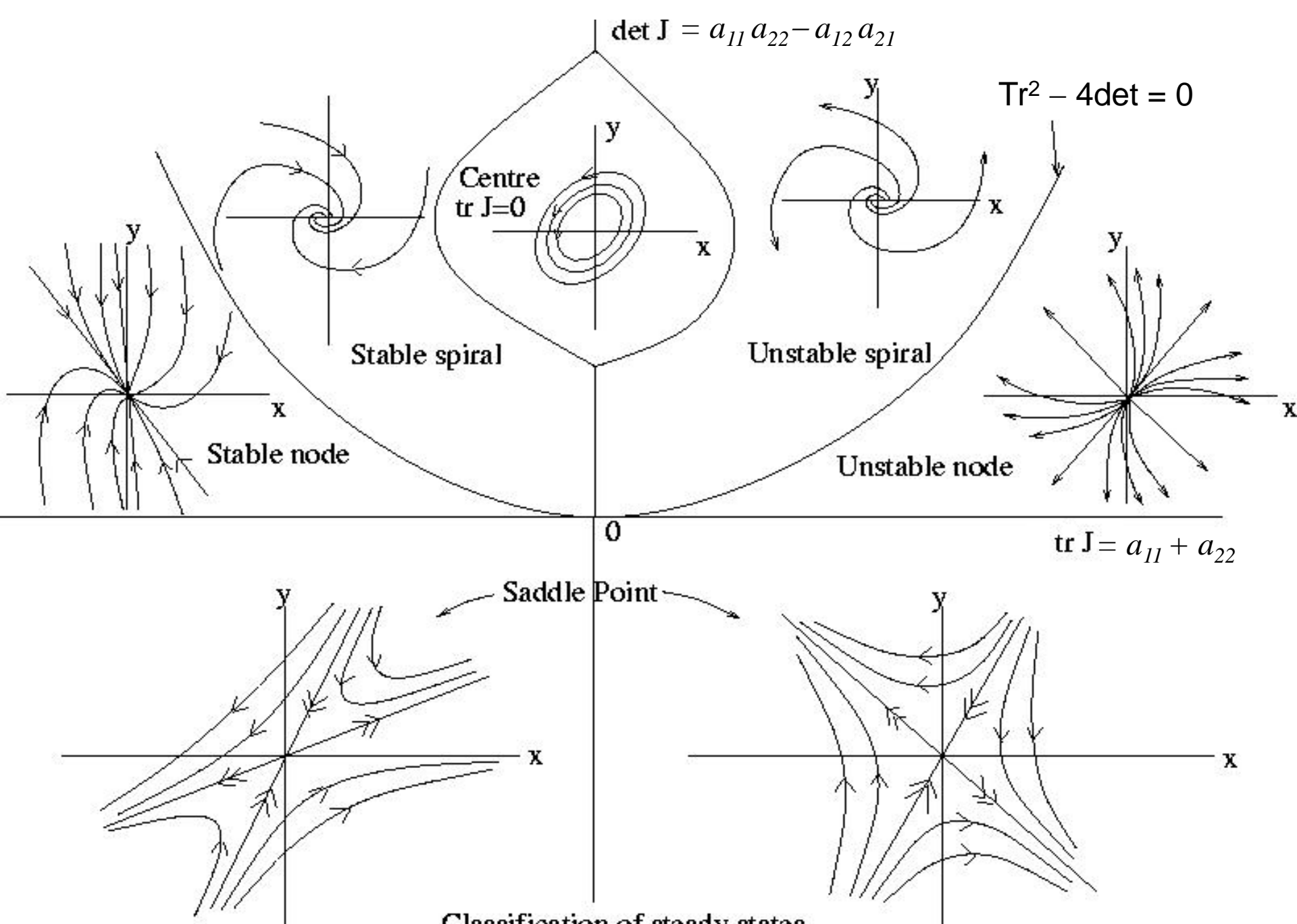
Soluzione generale:

$$\underline{x}(t) = e^{at} (c_1 \underline{u}_1 \cos bt + c_2 \underline{u}_2 \sin bt)$$

con c_1, c_2 da determinare in base alle 2 c.i. in $t=0$

(3) $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ oscillazioni, finalmente!





Classification of steady states of a 2-D linear system

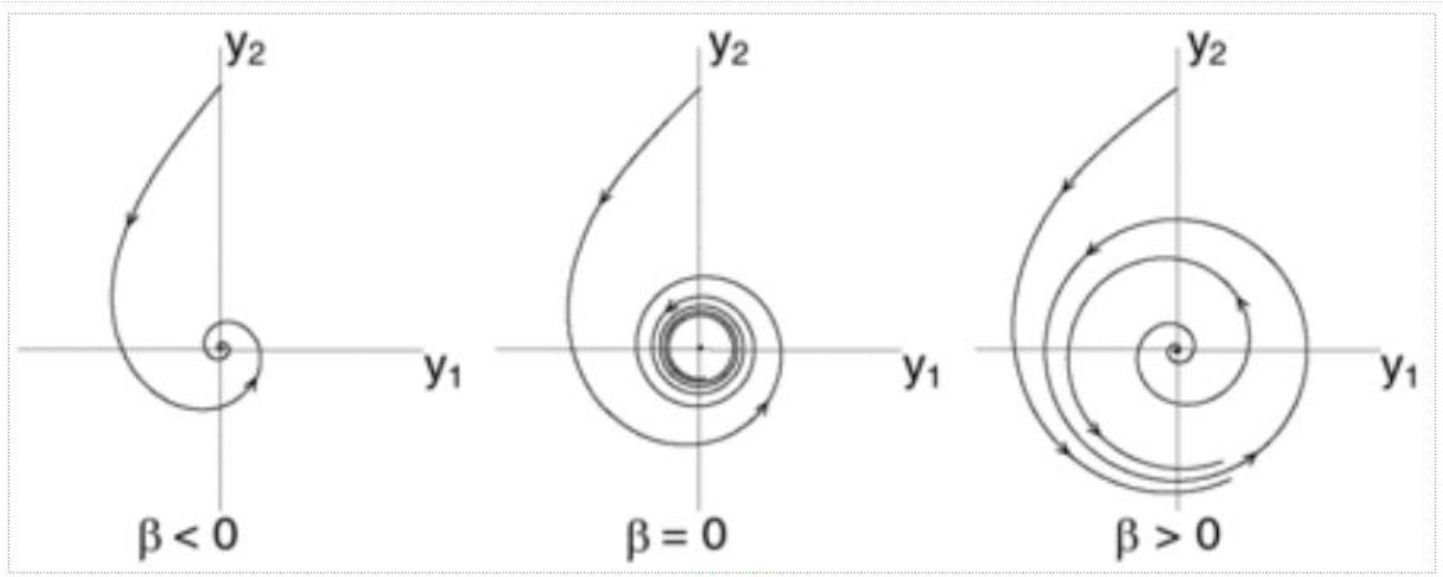


Figure 1: Supercritical Andronov-Hopf bifurcation in the plane.

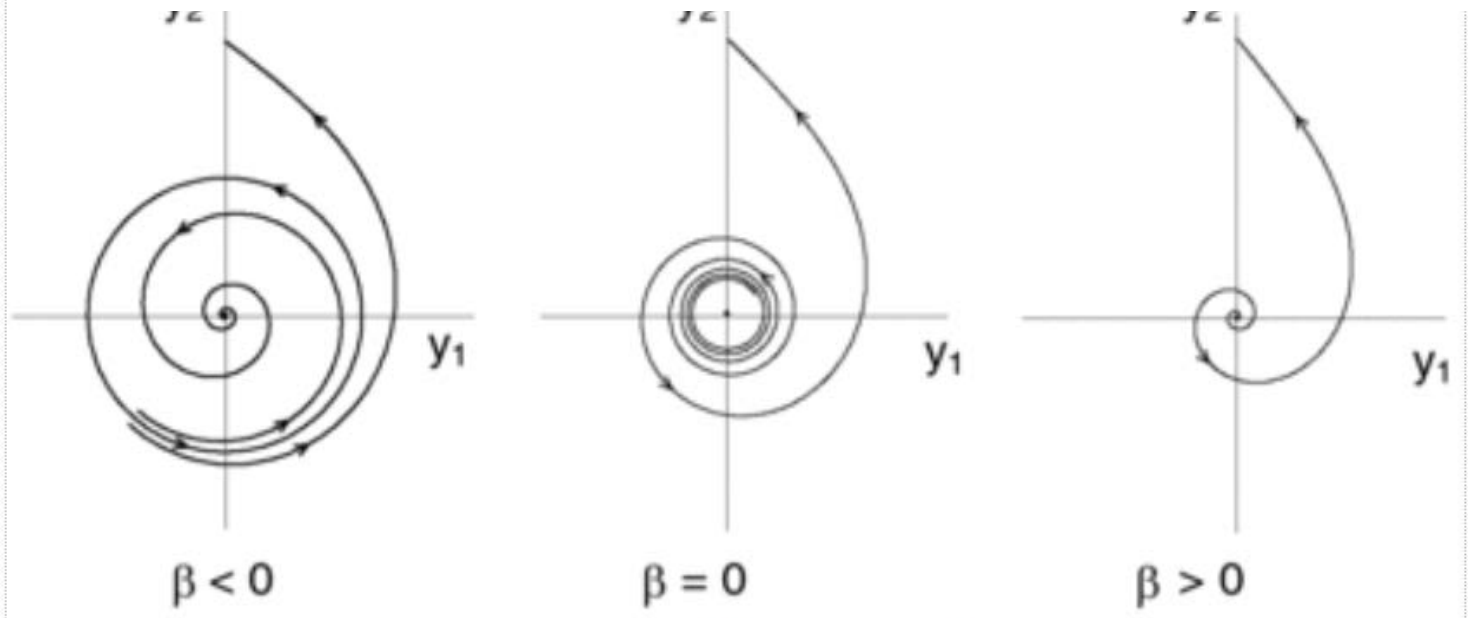
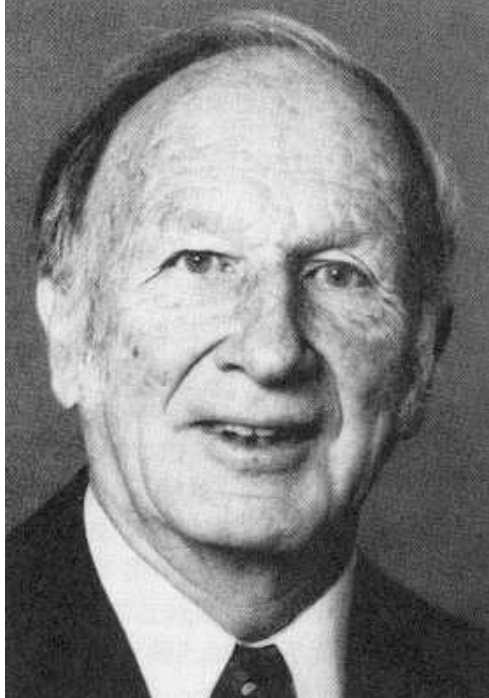
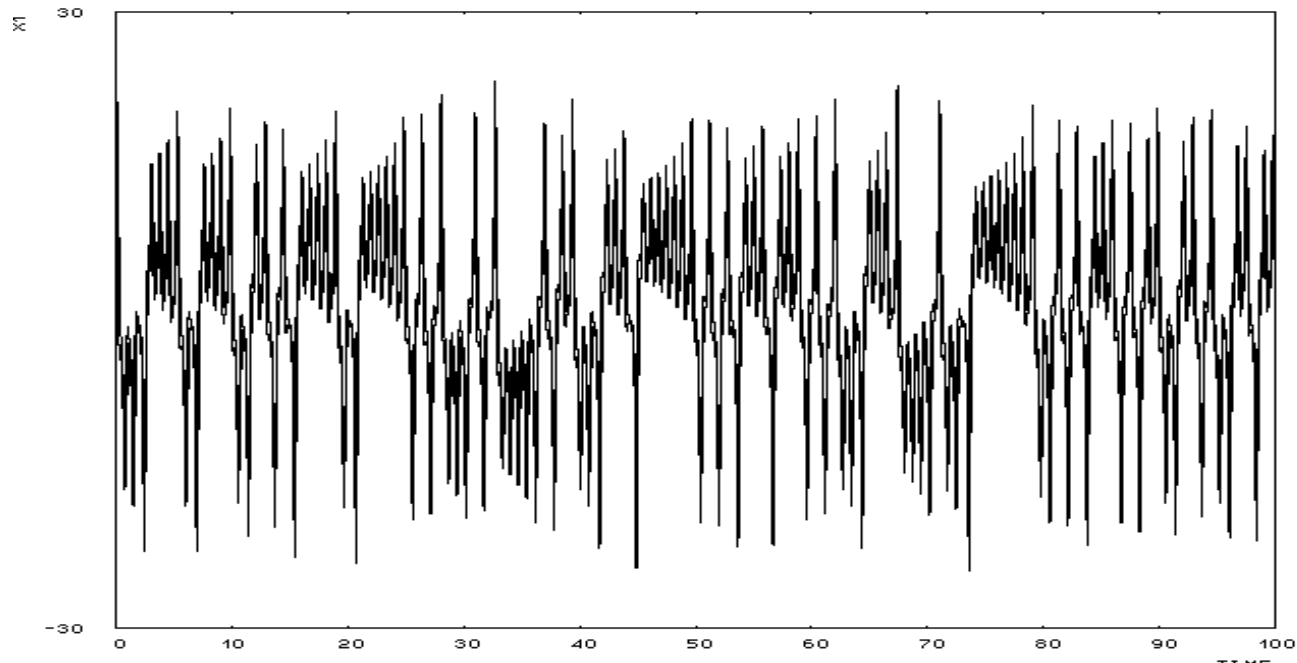


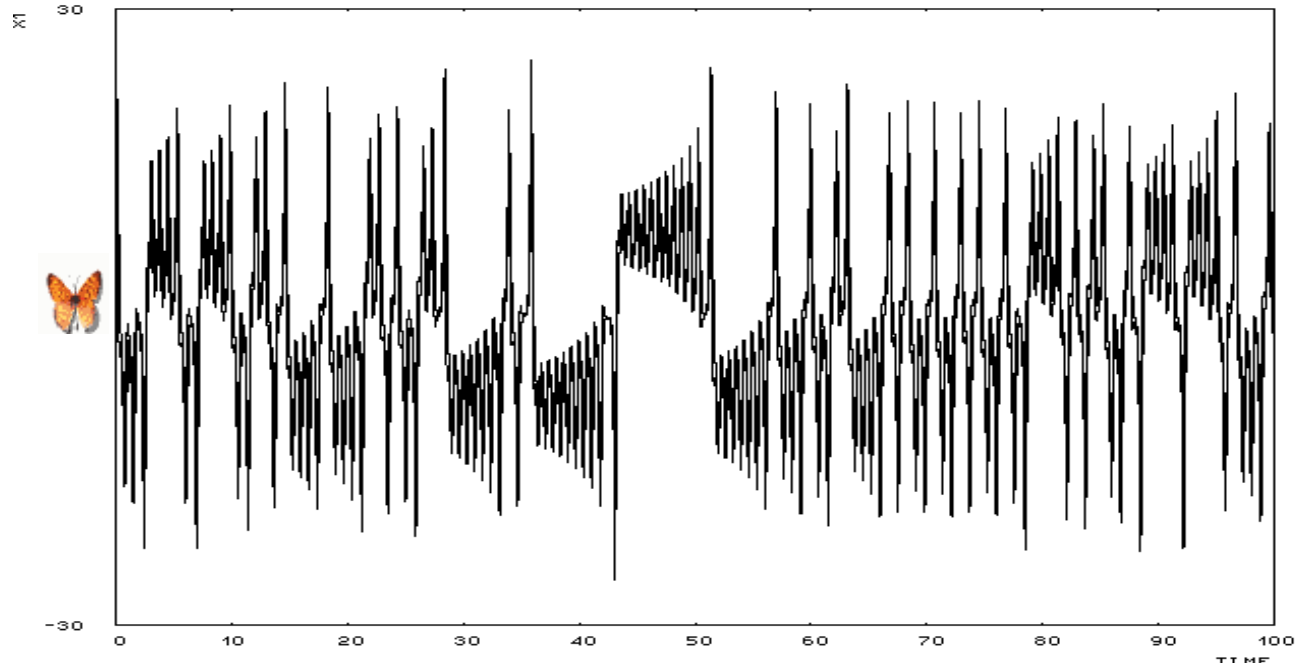
Figure 2: Subcritical Andronov-Hopf bifurcation in the plane.



Modello di Lorenz
sigma= 10 B= 2.666667 R= 28 c.i. X1o= 10 X2o= 10 X3o= 10



Modello di Lorenz
sigma= 10 B= 2.666667 R= 28 c.i. X1o= 10 X2o= 10 X3o= 9.99999



Edward Lorenz (1917-2008)

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

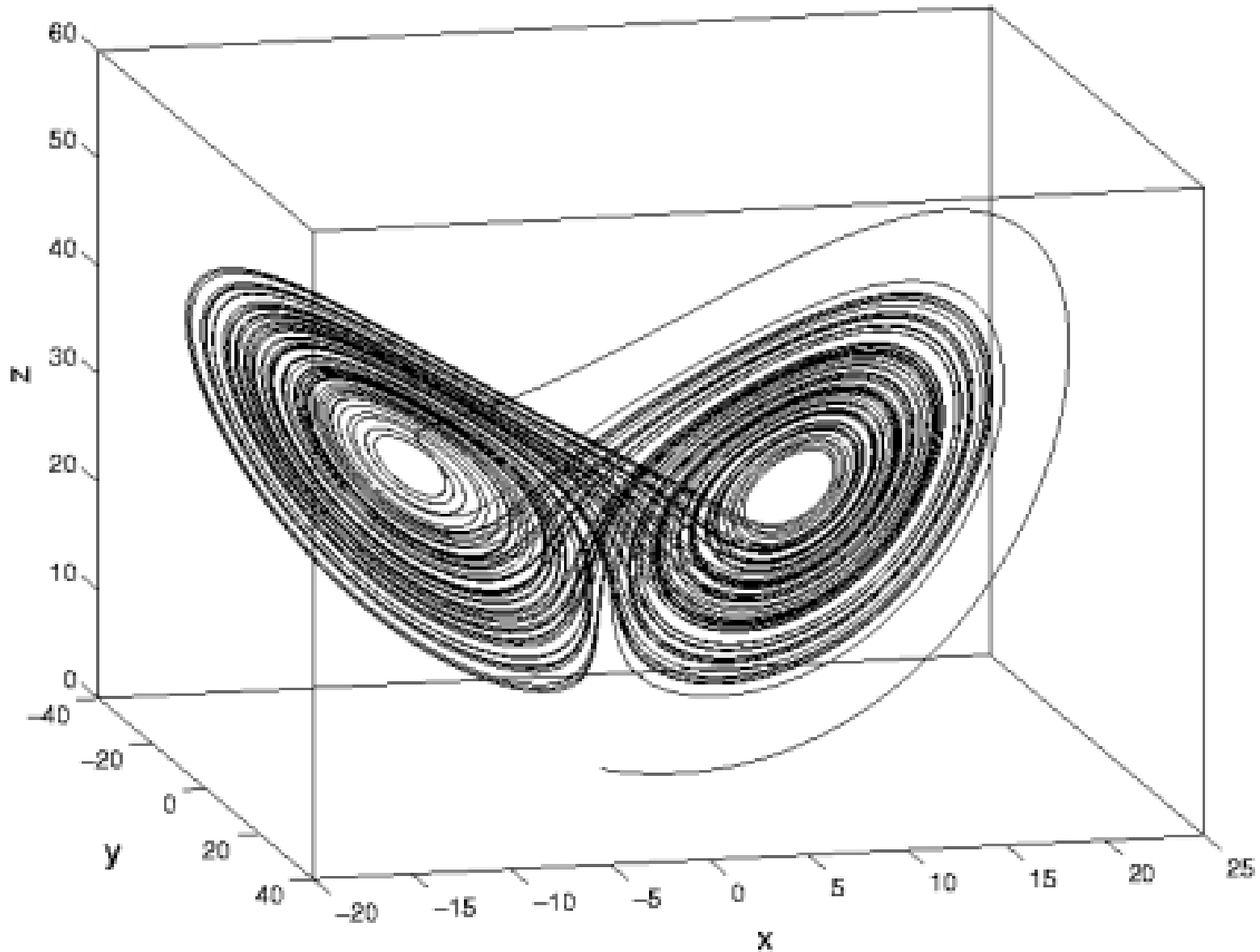
$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$



Lorenz (1963) "Deterministic non-periodic flow" Journal of the Atmospheric Sciences,.

Lorenz (1972) "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"
Articolo presentato al 139° meeting dell' American Association for the Advancement of Science.



Nel 1776 Laplace scriveva :

“Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all’istante precedente e se noi immaginassimo un’intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro”



Pierre-Simon Laplace
1749-1827

Vediamo allora che ogni cosa procede in modo matematico - cioè infallibilmente - nel mondo intero, in modo che se qualcuno avesse una sufficiente capacità di conoscere a fondo le cose, e avesse abbastanza intelligenza e memoria per considerare tutte le circostanze e tenerne conto, questi potrebbe essere un profeta e potrebbe vedere il futuro nel presente come in uno specchio



Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646 -1716

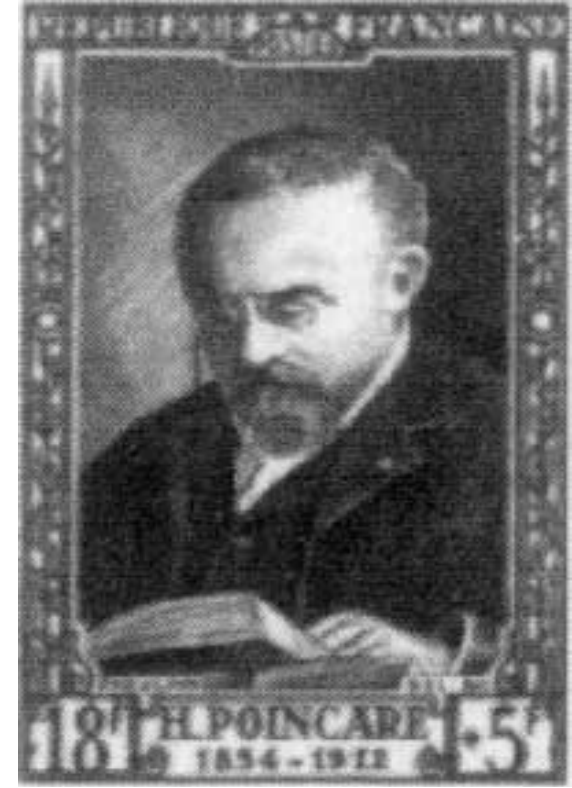
Henry Poincaré (1903)

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo.

Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.

Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.

Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali..



Henry Poincaré, 1854-1912

Caos Deterministico: un ossimoro

deterministico : regolare, prevedibile

fenomeni ordinati e pianificabili

caos : assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità.

Il concetto di caos deterministico spezza questa dicotomia:

modelli matematici *deterministici non lineari* possono generare andamenti quasi indistinguibili da processi aleatori, ed estremamente sensibili a piccole perturbazioni



review article

Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

Modello di May: Popolazione con stagioni riproduttive.

Supponiamo che in ogni “periodo” si riproduca una frazione r di insetti e ne muoia una frazione m . Nell’anno successivo la popolazione è

$$N(t+1) = N(t) + rN(t) - mN(t) = (1 + r - m)N(t)$$

Con la solita ipotesi che il tasso di mortalità m aumenti al crescere della popolazione, ad esempio

$$m = sN(t)$$

La legge di evoluzione diventa di secondo grado:

$$N(t+1) = (1 + r)N(t) - sN(t)^2$$

Con il cambio di variabile: $N = \frac{1+r}{s}x$ si ottiene la forma standard

$$x(t+1) = ax(t)[1 - x(t)] \quad \text{dove } a = (1+r)$$

Robert May, 1976

“Appello evangelico per l’introduzione di queste equazioni alle differenze semplici in corsi elementari di matematica, cosicchè l’intuizione degli studenti possa essere arricchita vedendo le cose bizzarre che succedono con semplici equazioni non lineari. [...]”.

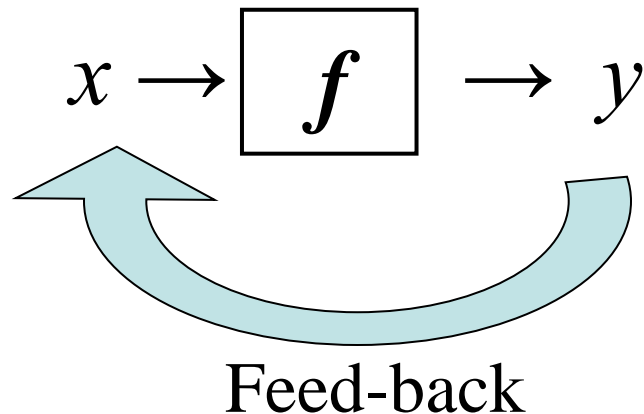
“Io vorrei sollecitare che sia presentata [l’equazione logistica] presto nell’educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non richieda un corso elementare di matematica.

Tale studio potrebbe in generale arricchire l’intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche.”

Sistemi dinamici a tempo discreto

Assegnato x_0 , la successione degli stati (traiettoria) si ottiene per induzione: $x_{t+1} = f(x_t) \quad t = 0, 1, \dots$

Concetto di funzione $y = f(x)$



Funzione composta (con se stessa)

Legge di evoluzione ottenuta mediante l'iterazione (applicazione ripetuta) di una funzione, che dallo stato al tempo t permette di calcolare lo stato al tempo successivo, $t+1$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1)$$

Per induzione, ossia iterando la f ...

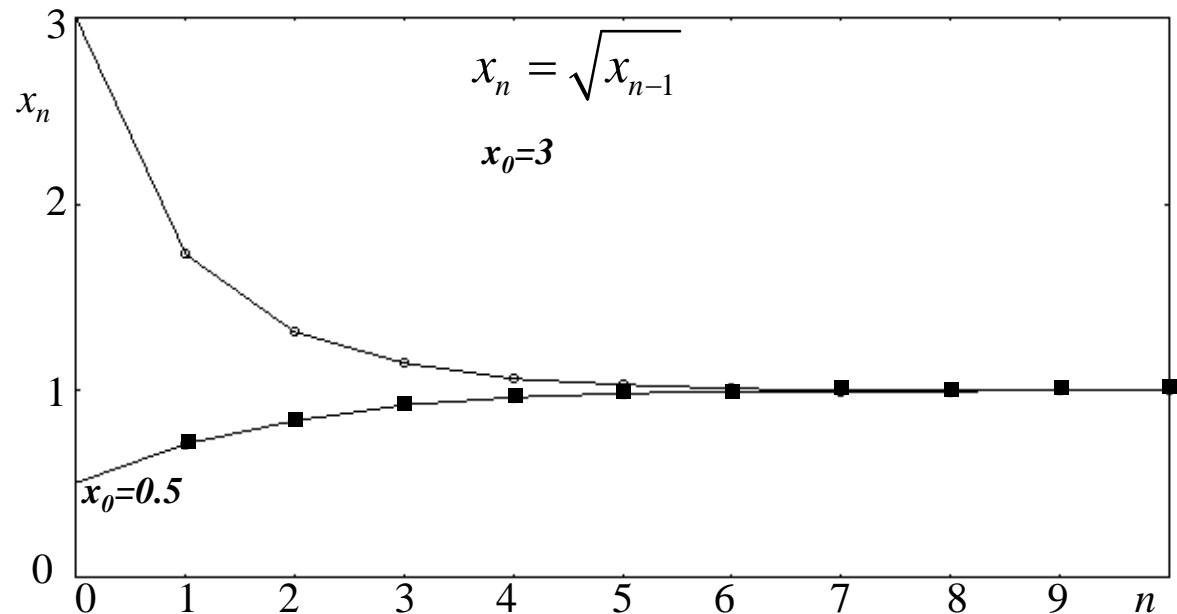
$$x(0) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(1) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(2) \dots x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1) \dots$$

... si ottiene una “traiettoria” del sistema dinamico

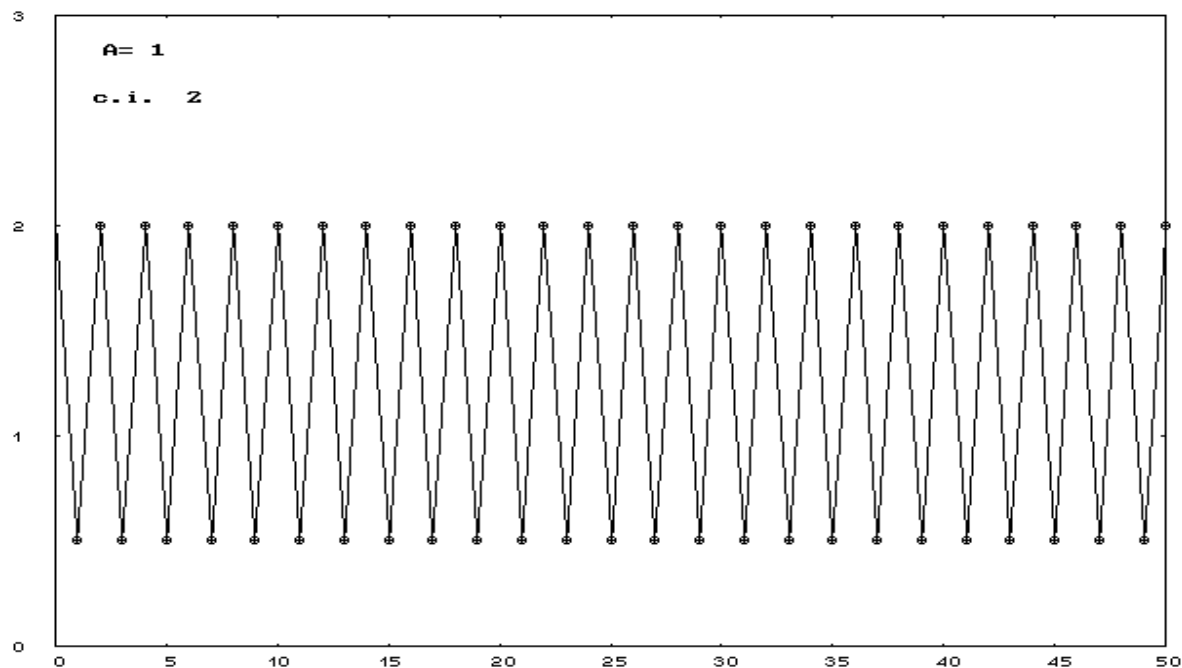
$$x(1) = f(x(0)) \quad x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \quad \dots \quad x(t) = f^t(x(0))$$

Dato x_0 e la regola induttiva $x_{n+1} = f(x_n)$ Come andrà a finire?

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$



$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$$



Nota: $x_{n+2} = x_n$

Mappa lineare: $f(x) = ax$.

Evoluzione $x_{t+1} = ax_t$

$$x_1 = ax_0$$

$$x_2 = ax_1 = a(ax_0) = a^2x_0$$

$$x_3 = ax_2 = a(a^2x_0) = a^3x_0$$

...

$$x_n = ax_{n-1} = a(a^{n-1})x_0 = a^nx_0$$

Soluzione in forma chiusa:

$$x_t = x_0 a^t$$

• $|a| < 1$ (contraction)

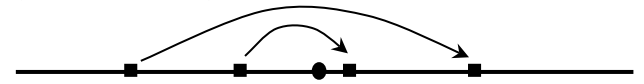
➤ $0 < a < 1$



Contraction and orientation preserving.

It monotonously converges to $x^=0$*

$-1 < a < 0$

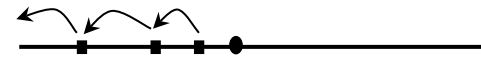


Contraction and orientation reversing

The iteration converges to $x^ = 0$ through oscillations*

• $|a| > 1$ (expansion)

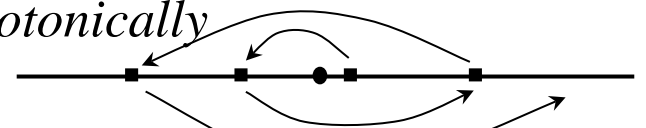
➤ $a > 1$,



expanding and orientation preserving

It diverges monotonically

➤ $a < -1$



expanding and orientation reversing

It diverges through oscillations

• Particular (bifurcation) values

$a = 1$ $x_t = x_0$ constant

$a = -1$ $x_t = (-1)^t x_0$ alternating values

Capitalizzazione (con interesse composto) interesse $i\%$.

sia $r = i/100$

$$C(t+1) = C(t) + r C(t) = (1+r) C(t)$$

Soluzione: $C(t) = C(0) (1+r)^t$

Crescita esponenziale

Interesse composto con tassa proporzionale al quadrato !!

$$C(t+1) = (1+r)C(t) - bC(t)^2$$

$$C(1) = (1+r)C(0) - bC(0)^2 \quad \text{grado } 2$$

$$\begin{aligned} C(2) &= (1+r)C(1) - bC(1)^2 = \\ &= (1+r)[(1+r)C(0) - bC(0)^2][1 - b((1+r)C(0) - bC(0)^2)] \quad \text{grado } 2^2 = 4 \end{aligned}$$

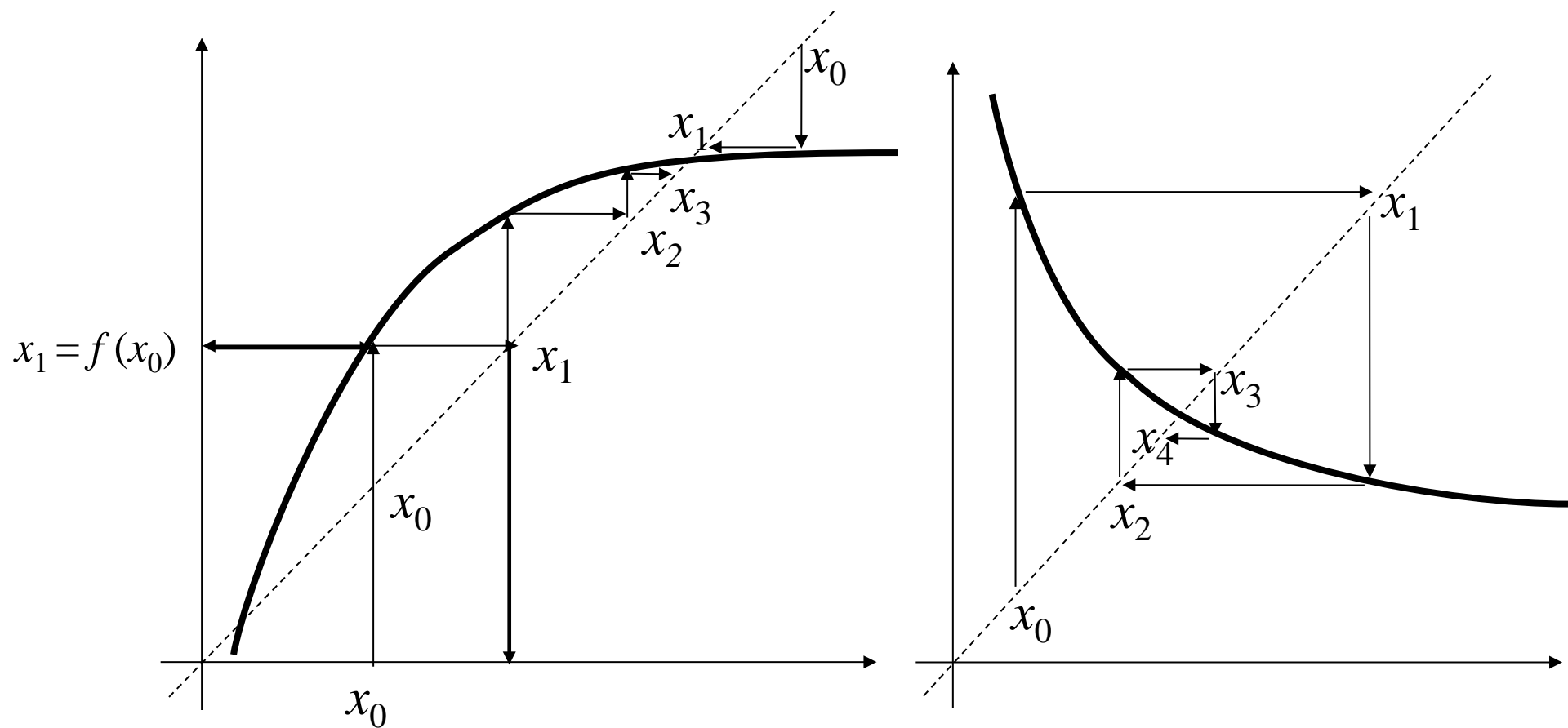
$$C(3) = (1+r)C(2) - bC(2)^2 = \dots \quad \text{grado } 2^3 = 8$$

⋮

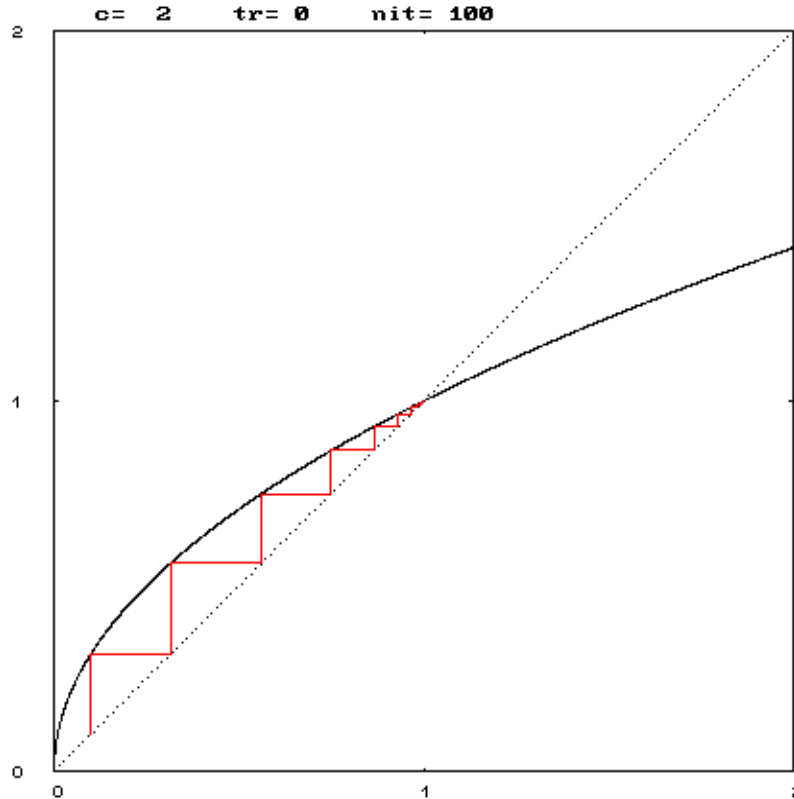
$$C_{10} = \dots \quad \text{grado } 2^{10} = 1024 \quad \text{!!!!}$$

Legge di evoluzione: $x(t+1) = f(x(t))$

Costruzione geometrica qualitativa delle traiettorie



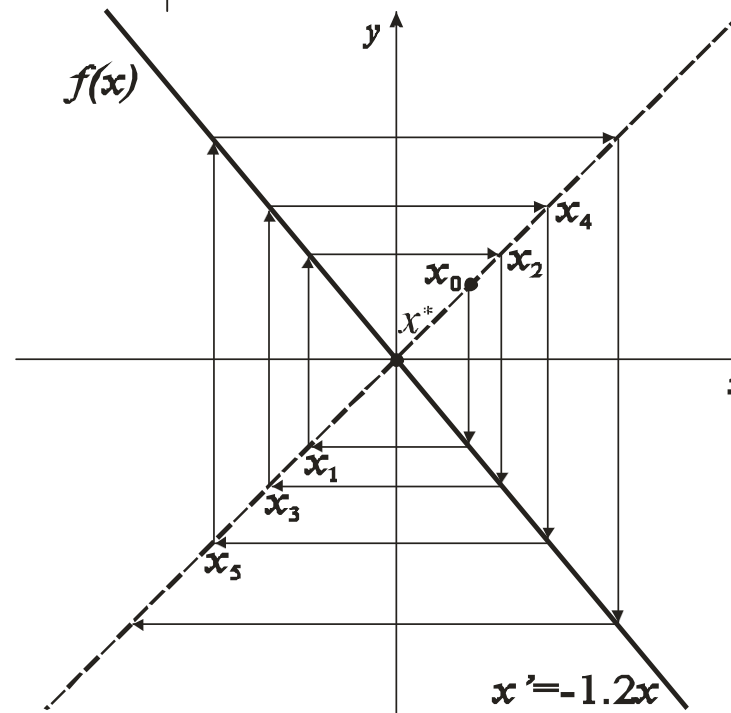
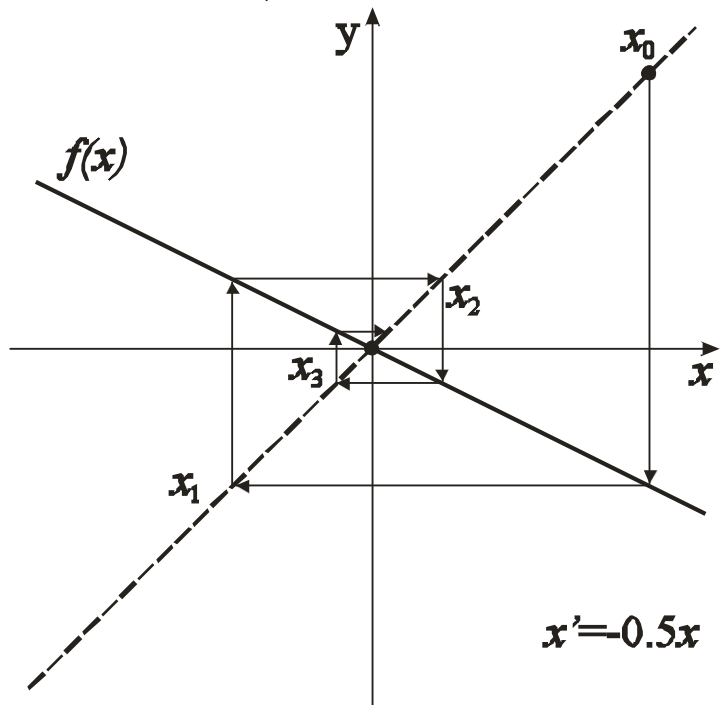
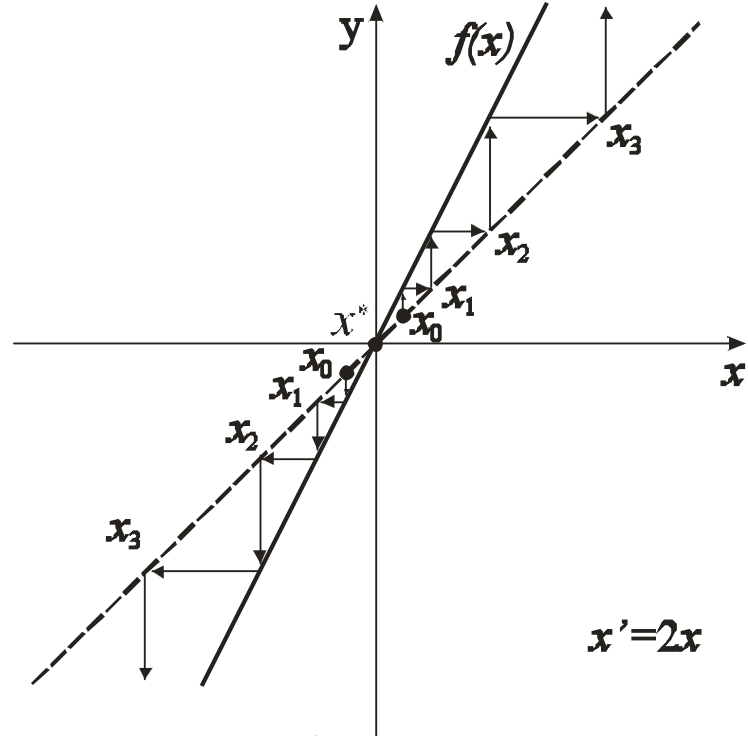
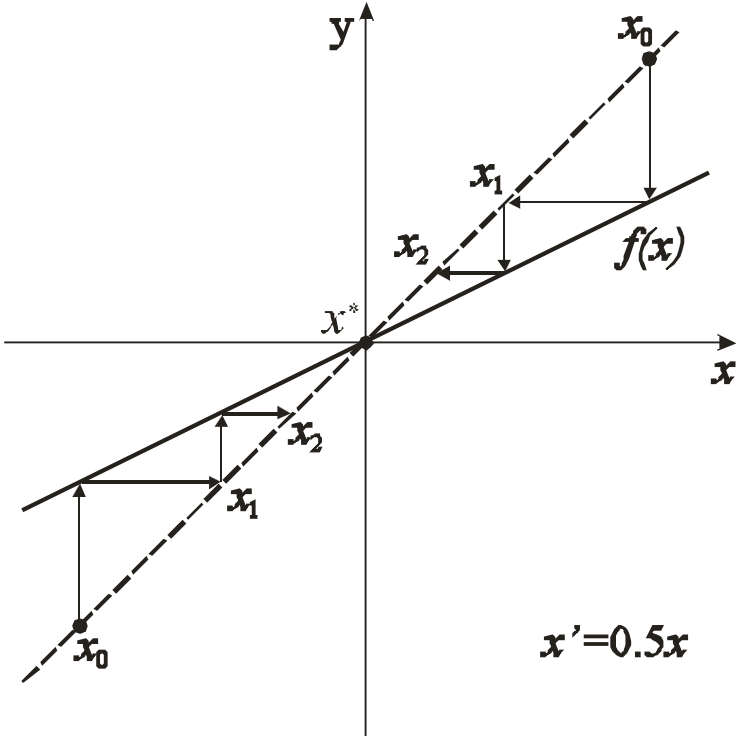
$$x(t + 1) = \sqrt{x(t)}$$



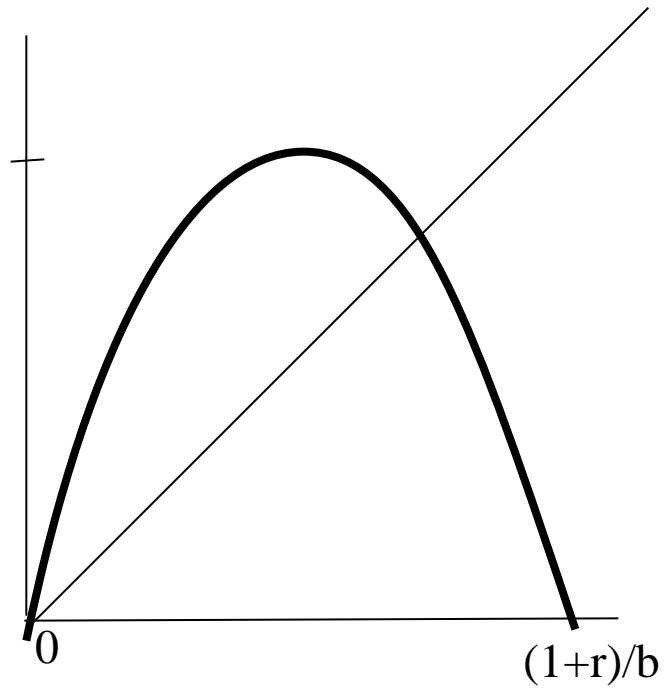
asymptotic values



Initial condition x_0 ? .1

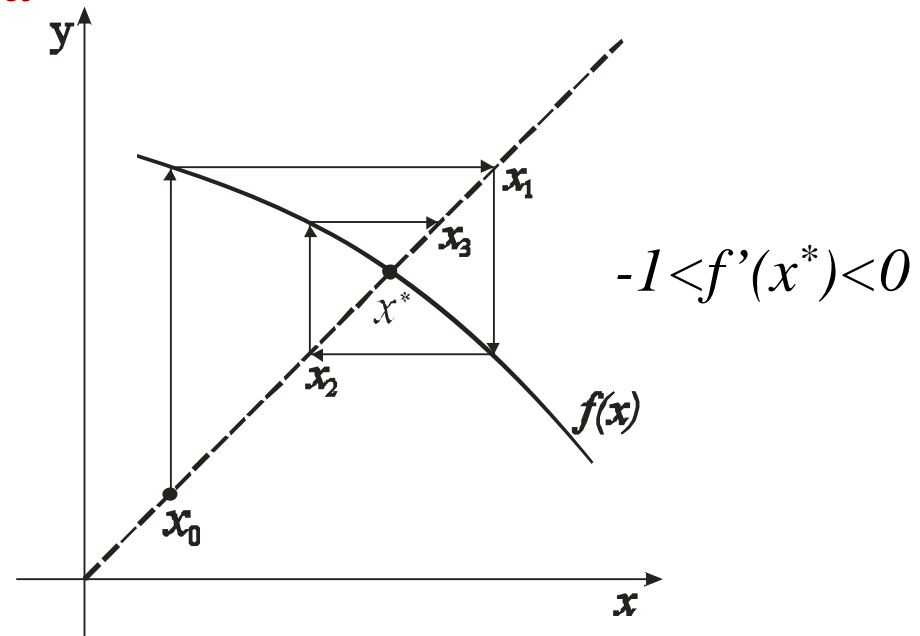
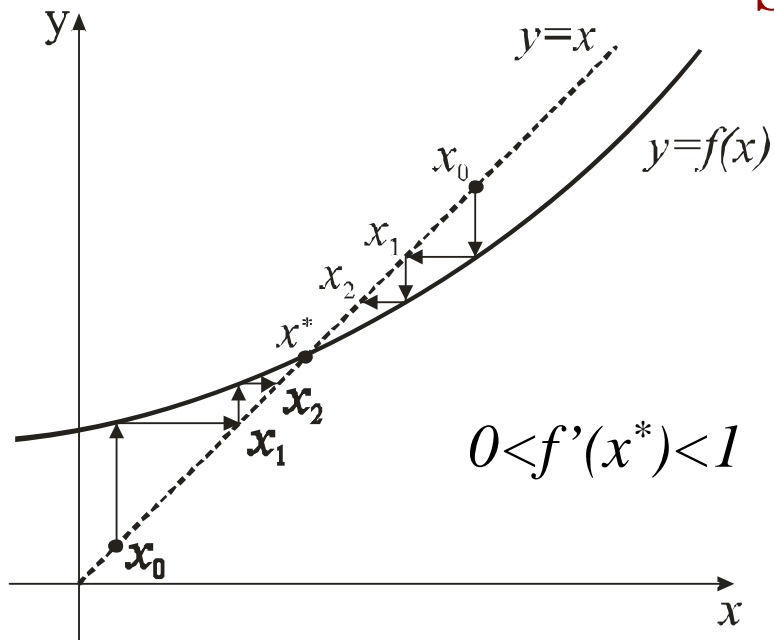


lineare

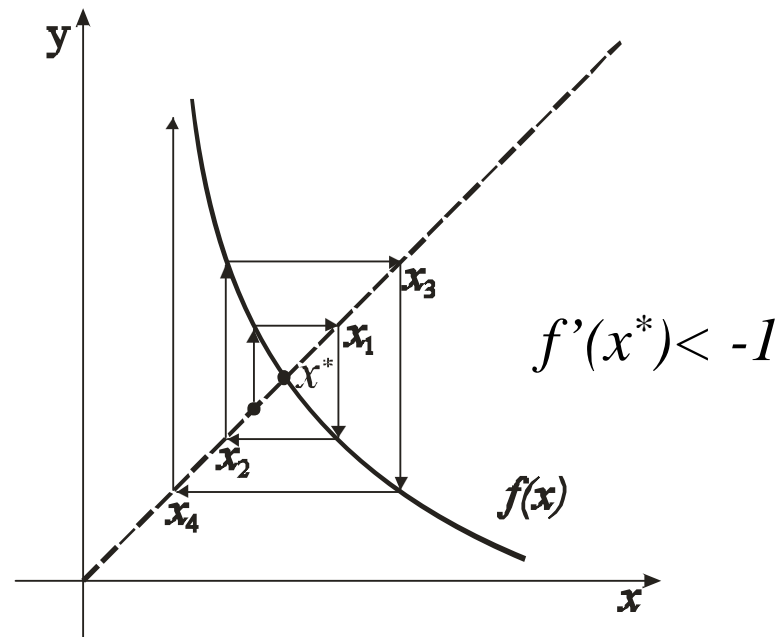
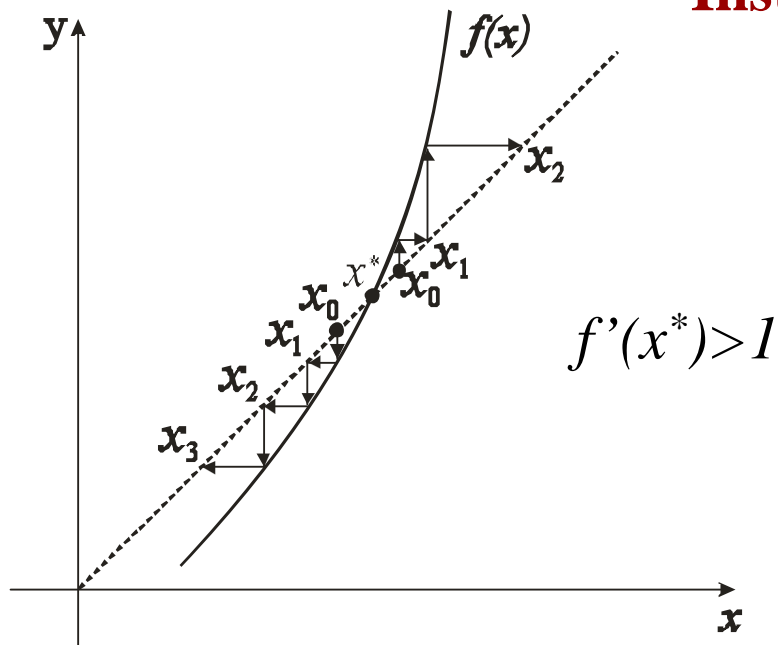


logistica

Stabilità



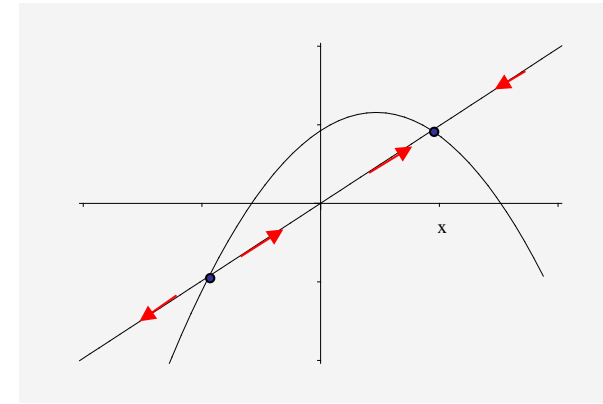
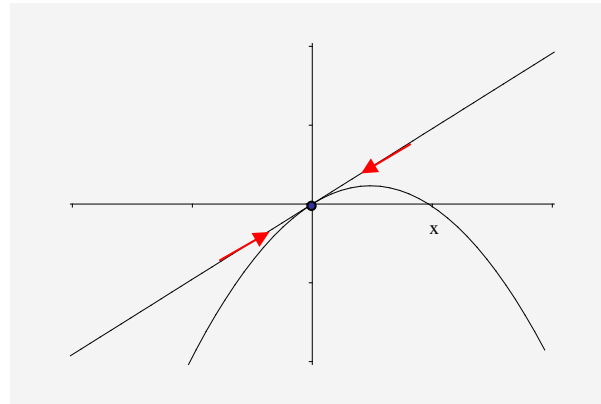
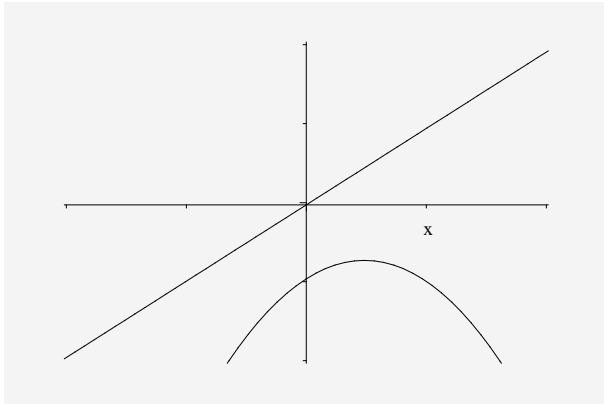
Instabilità



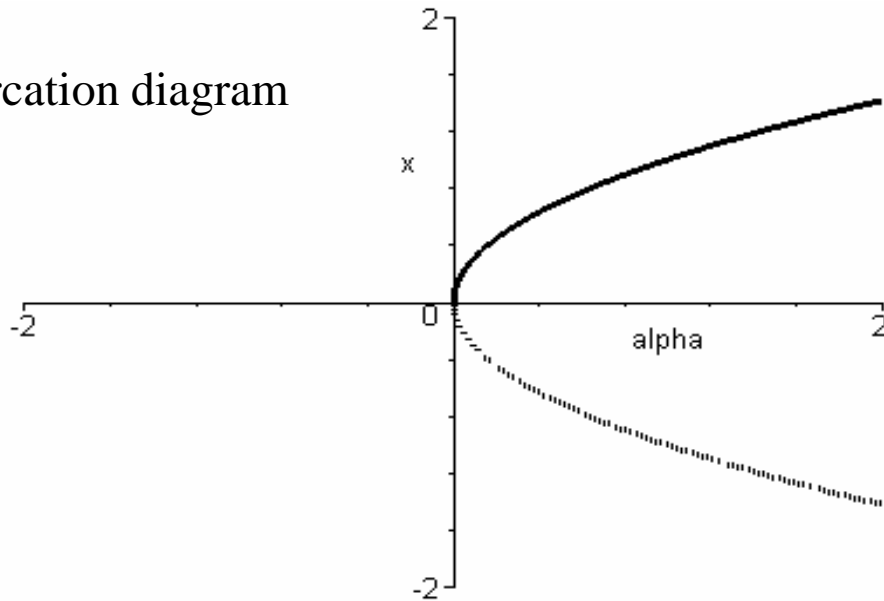
$f'(x^*)$ through value 1

- **Fold bifurcation:**

- two fixed points appear, one stable and one unstable



Bifurcation diagram

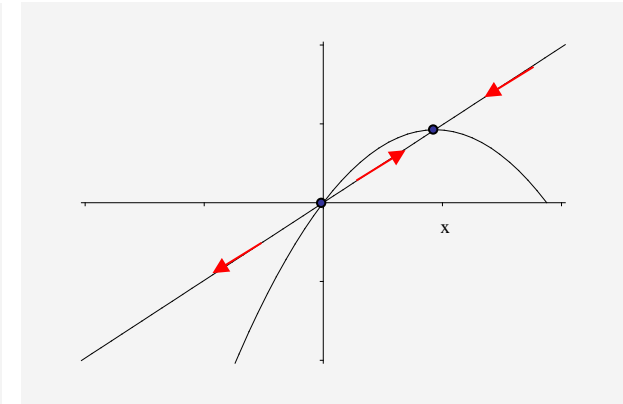
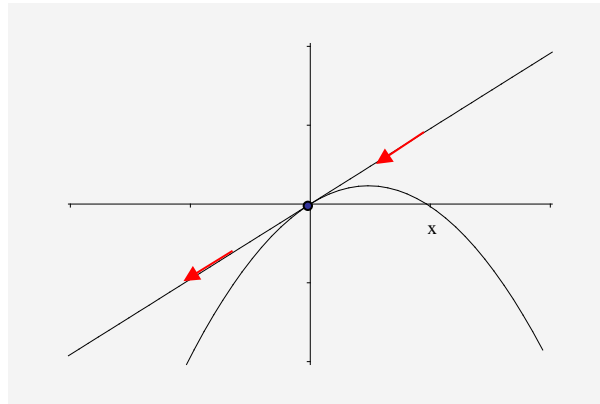
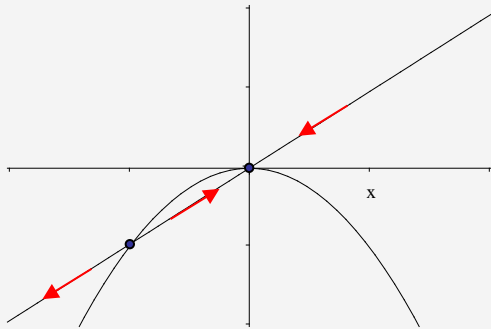


Normal form:

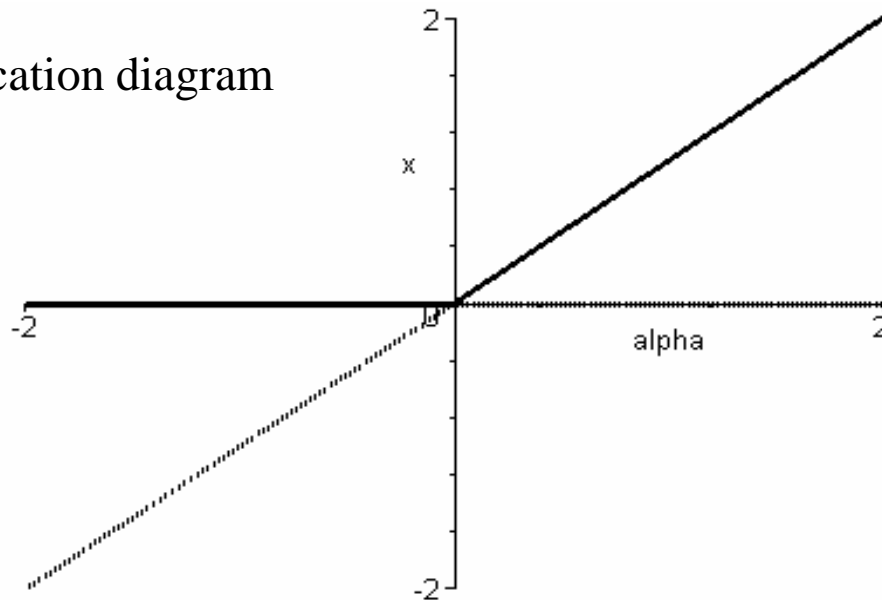
$$f(x, \alpha) = \alpha + x - x^2$$

$f'(x^*)$ through value 1

- **Transcritical bifurcation (or stability exchange):**
 - two fixed points merge, exchanging their stability



Bifurcation diagram



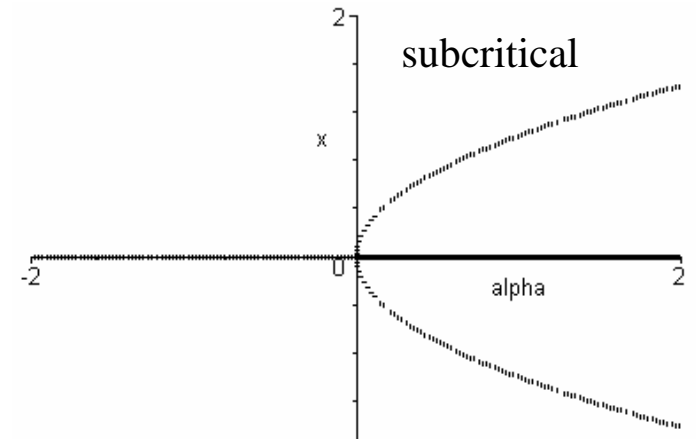
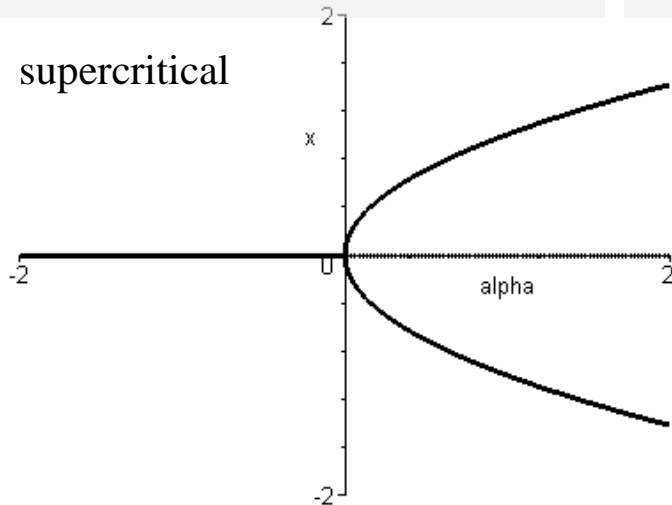
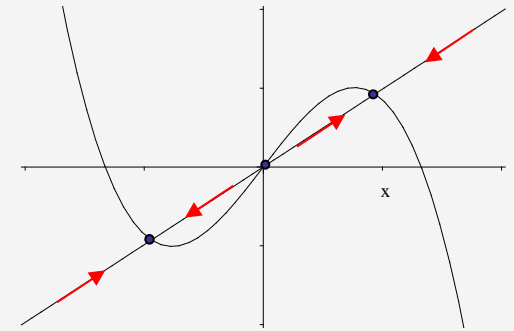
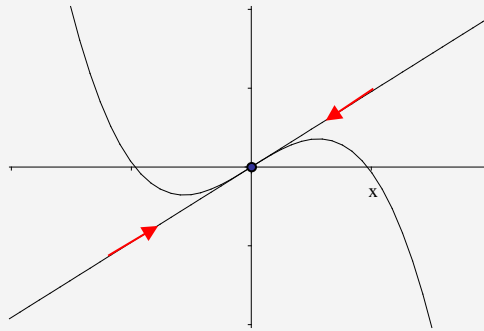
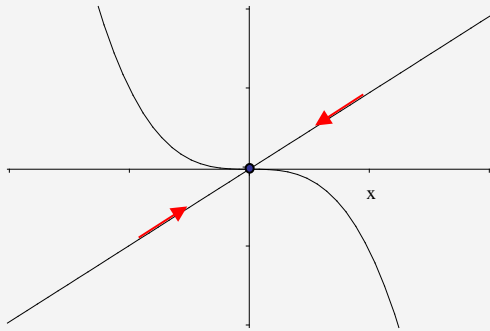
Normal form:

$$f(x, \alpha) = \alpha x + x - x^2$$

$f'(x^*)$ through value 1

- Pitchfork bifurcation**

- a fixed point becomes unstable (stable) and two further fixed points appear, both stable (unstable)



Normal form:

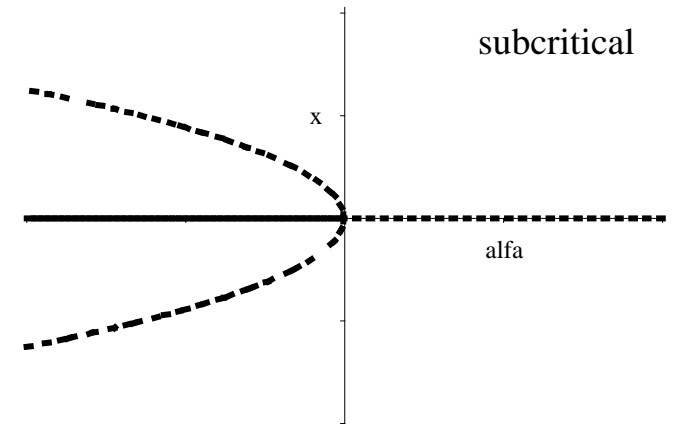
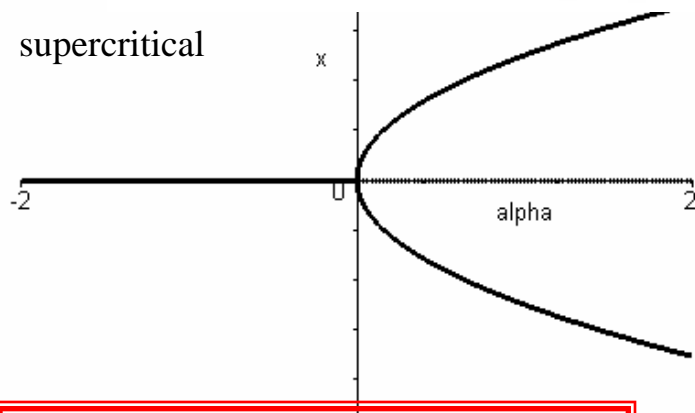
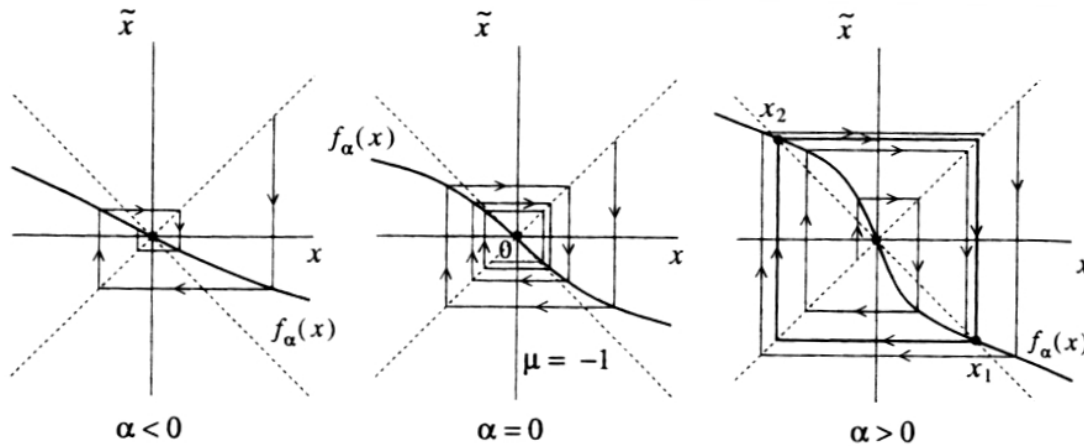
$$f(x, \alpha) = \alpha x + x - x^3$$

Normal form:

$$f(x, \alpha) = -\alpha x - x + x^3$$

$f'(x^*)$ through value -1

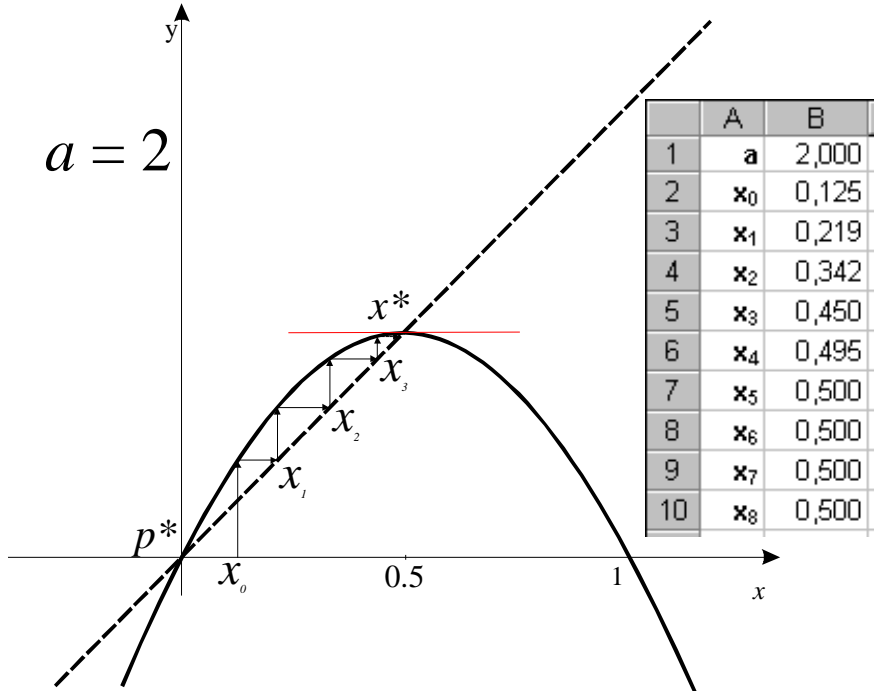
- Flip bifurcation (period doubling bifurcation):
 - the fixed point becomes unstable and a stable period 2 cycle appears, surrounding it. It corresponds to a pitchfork bifurcation of the second iterated of the map



Normal form:

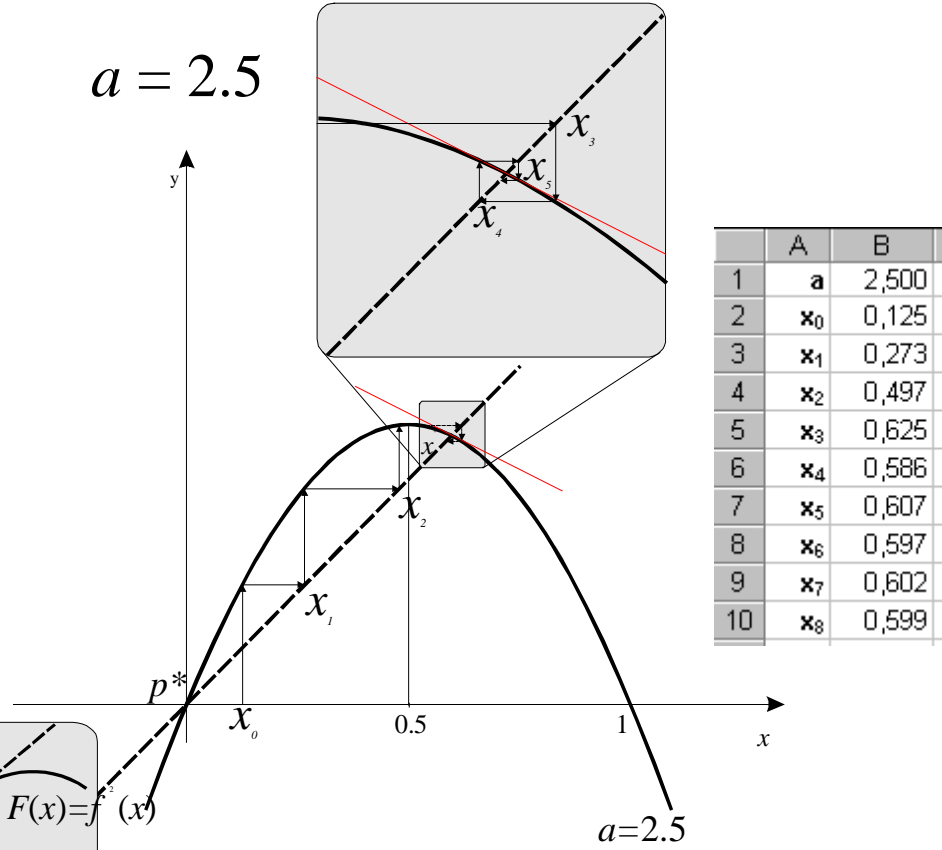
$$f(x, \alpha) = -(1 + \alpha)x + x^3$$

$a = 2$



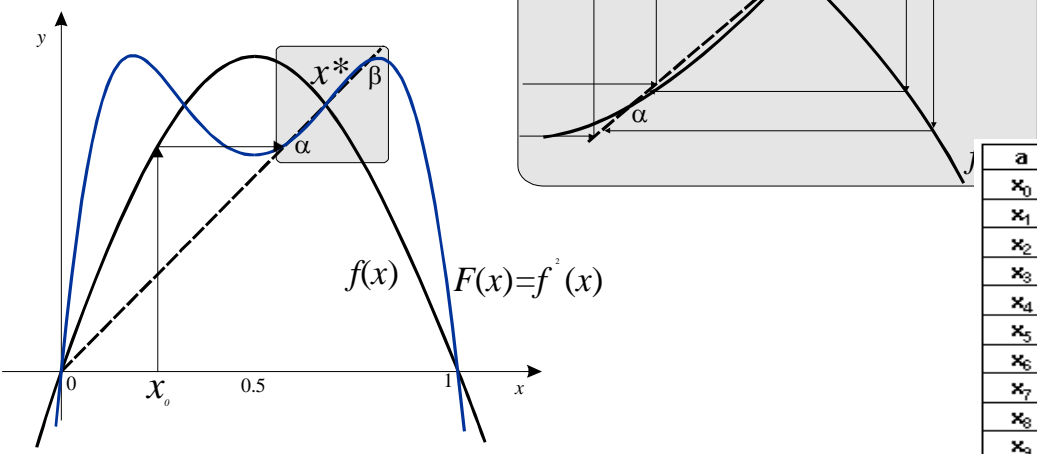
	A	B
1	a	2,000
2	x_0	0,125
3	x_1	0,219
4	x_2	0,342
5	x_3	0,450
6	x_4	0,495
7	x_5	0,500
8	x_6	0,500
9	x_7	0,500
10	x_8	0,500

$a = 2.5$

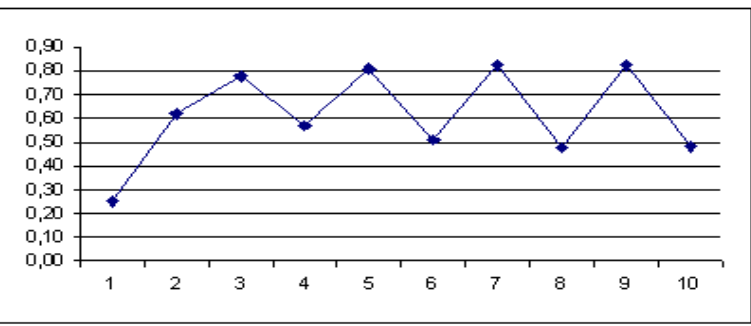


	A	B
1	a	2,500
2	x_0	0,125
3	x_1	0,273
4	x_2	0,497
5	x_3	0,625
6	x_4	0,586
7	x_5	0,607
8	x_6	0,597
9	x_7	0,602
10	x_8	0,599

$a = 3.1$



a	3,30
x_0	0,25
x_1	0,62
x_2	0,78
x_3	0,57
x_4	0,81
x_5	0,51
x_6	0,82
x_7	0,48
x_8	0,82
x_9	0,48



$a=3.1$

Mappa logistica: $x_{t+1} = ax_t[1 - x_t]$

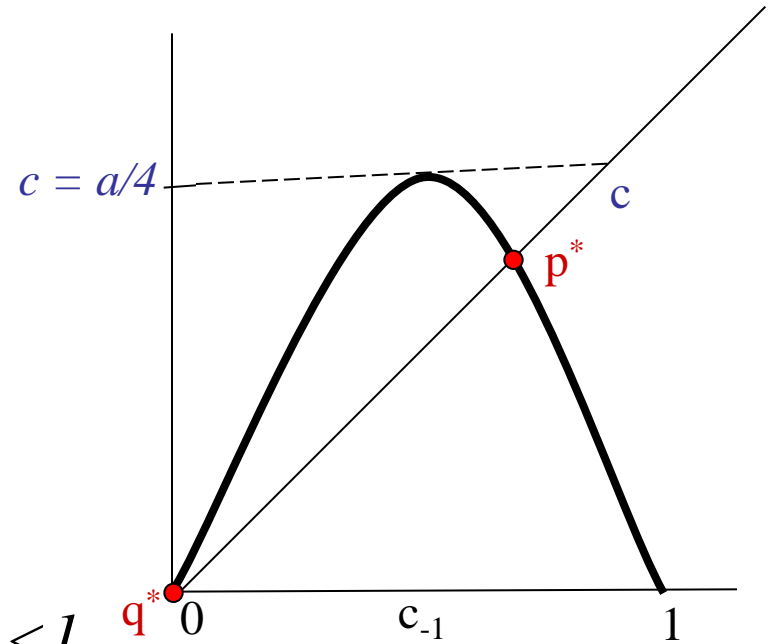
Punti fissi $q^* = 0$

$$p^* = (a-1)/a$$

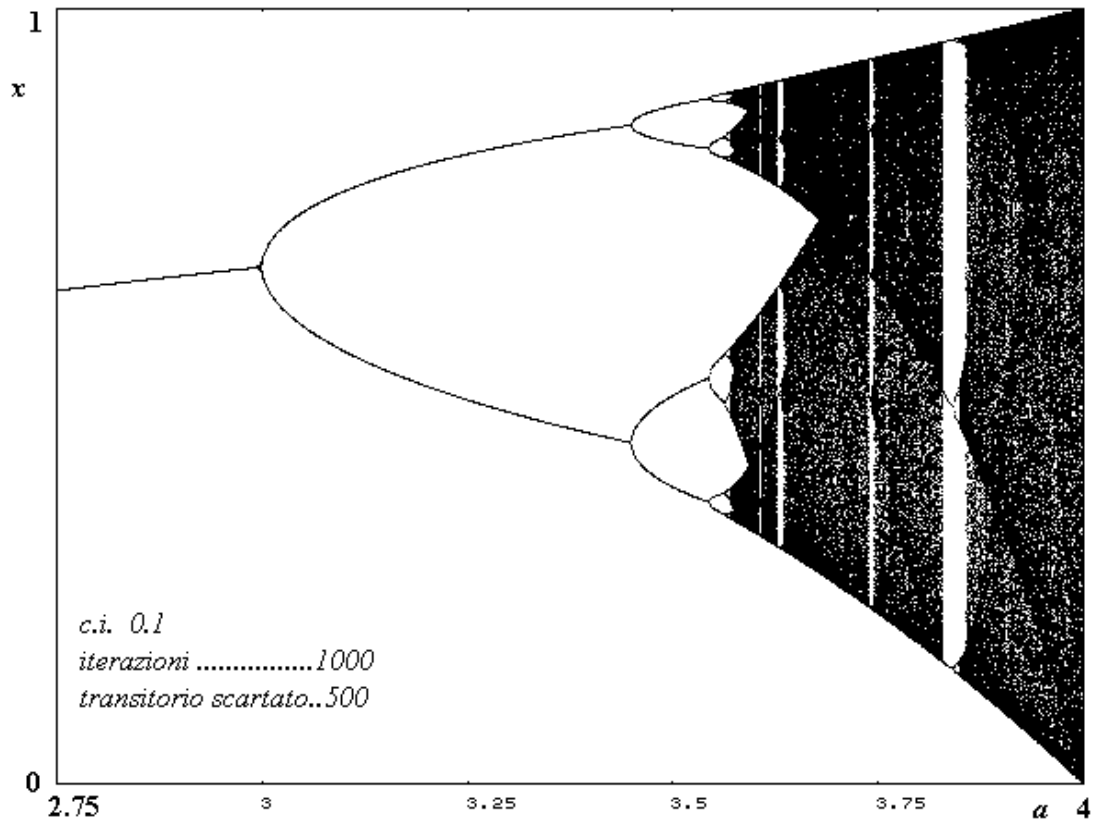
$$f'(x) = a(1-2x).$$

$$f'(q^*) = a \quad q^* \text{ stabile per } -1 < a < 1$$

$$f'(p^*) = 2 - a \quad p^* \text{ stabile per } 1 < a < 3$$



$$x_{t+1} = \alpha x_t (1 - x_t)$$



Sharkovsky Theorem (1964).

If a k -cycle exists for $f : I \rightarrow I$, then at least a p -cycle exists for each number p that follows k in the following total ranking of natural numbers:

3, 5, 7, 9, ..., 3·2, 5·2, 7·2, ..., 3·2², 5·2², ..., ..., 2⁴, 2³, 2², 2, 1

Li & Yorke Theorem (1975): Period 3 implies chaos

If $f: I \rightarrow I$ has a 3-cycle then:

An uncountable set of points $S \subset I$ exists that does not include any cycle and has the following properties:

i) For any $p, q \in S, p \neq q$,

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0 \quad \text{and} \quad \min \lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

(ii) For any $q \in S$ and any periodic point $p \in I$

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

The trajectories starting from an i.c. in S (*scrambled set*) are *chaotic*, i.e. they have the 3 properties that characterize deterministic chaos

Remark: it may occur $\text{mes}(S) = 0$ (*invisible chaos*)

Si dice che si è in presenza di dinamiche caotiche se:

(1) Sensitività rispetto alle condizioni iniziali

generando due traiettorie da diverse condizioni iniziali, ma arbitrariamente vicine, esse si mantengono limitate ma la distanza fra esse cresce esponenzialmente e dopo un tempo finito diventa dello stesso ordine di grandezza delle variabili di stato.

(2) Transitività (o mixing):

i punti della traiettoria generata partendo da una generica condizione iniziale ricoprono densamente una zona dello spazio delle fasi cioè ciascun punto dell'intervallo su cui si muove tale traiettoria risulta essere punto di accumulazione dei punti della traiettoria stessa.

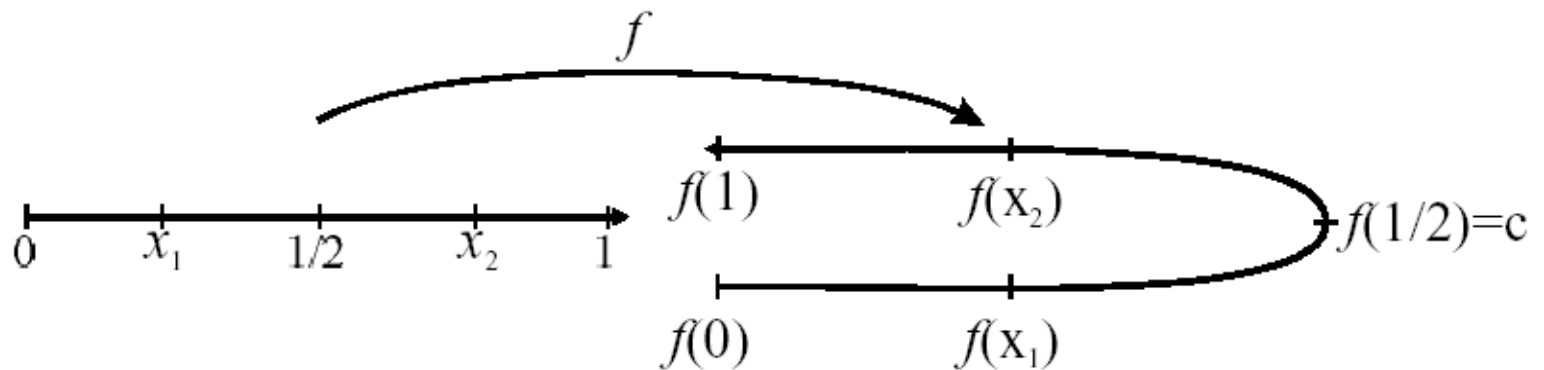
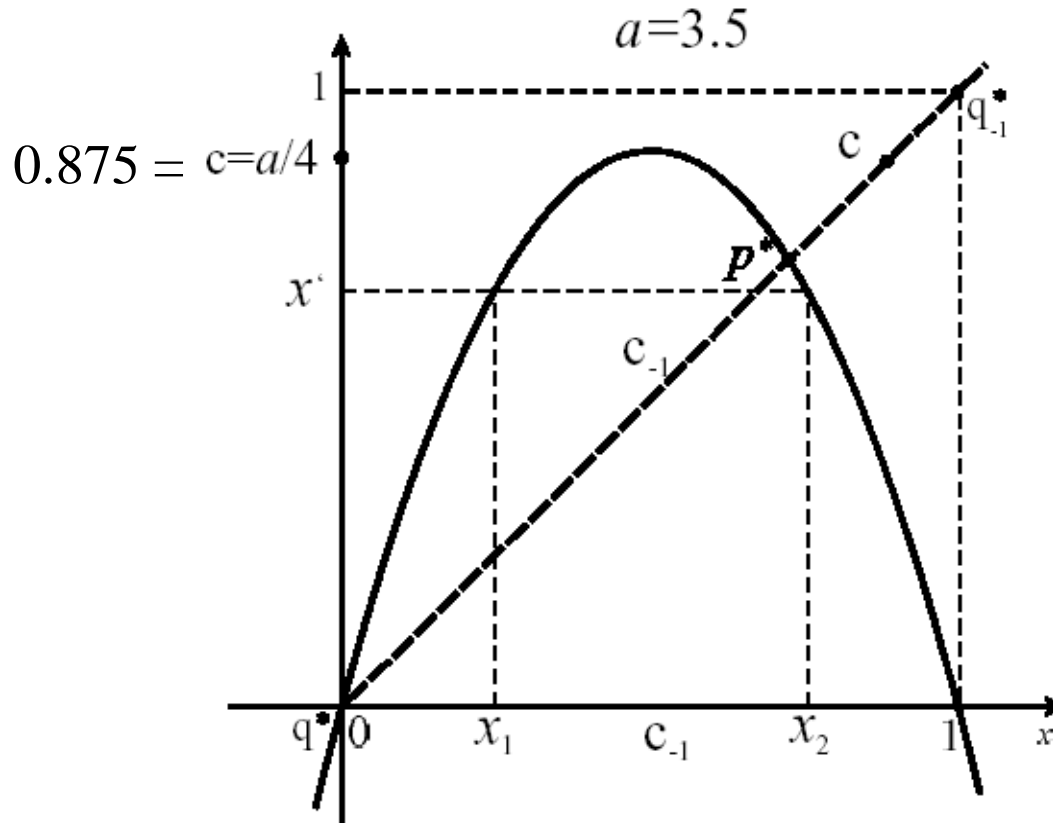
(3) Esistenza di infiniti cicli repulsivi

con i punti periodici densi nella regione ricoperta dalle traiettorie caotiche.

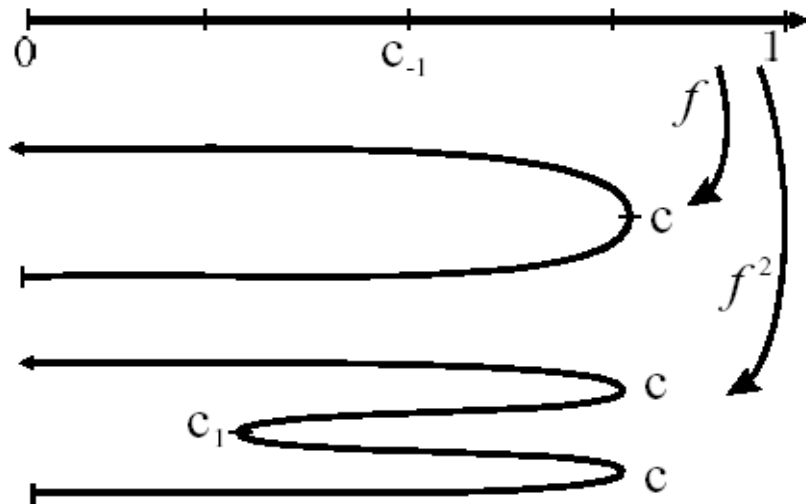
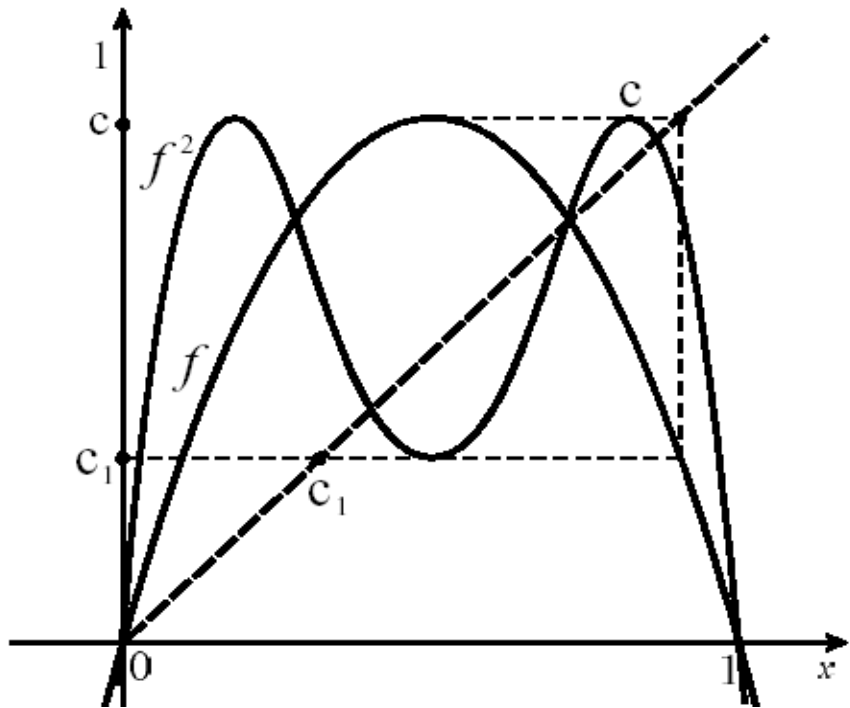
Nota: (2) e (3) implicano (1)

La Geometria del Caos

Stretching & Folding (Stiramento e ripiegamento)



Kneading of the dough (impastare)



Matematica e dintorni

Gian Italo Bischi, Rosa Carini,
Laura Gardini, Paolo Tenti



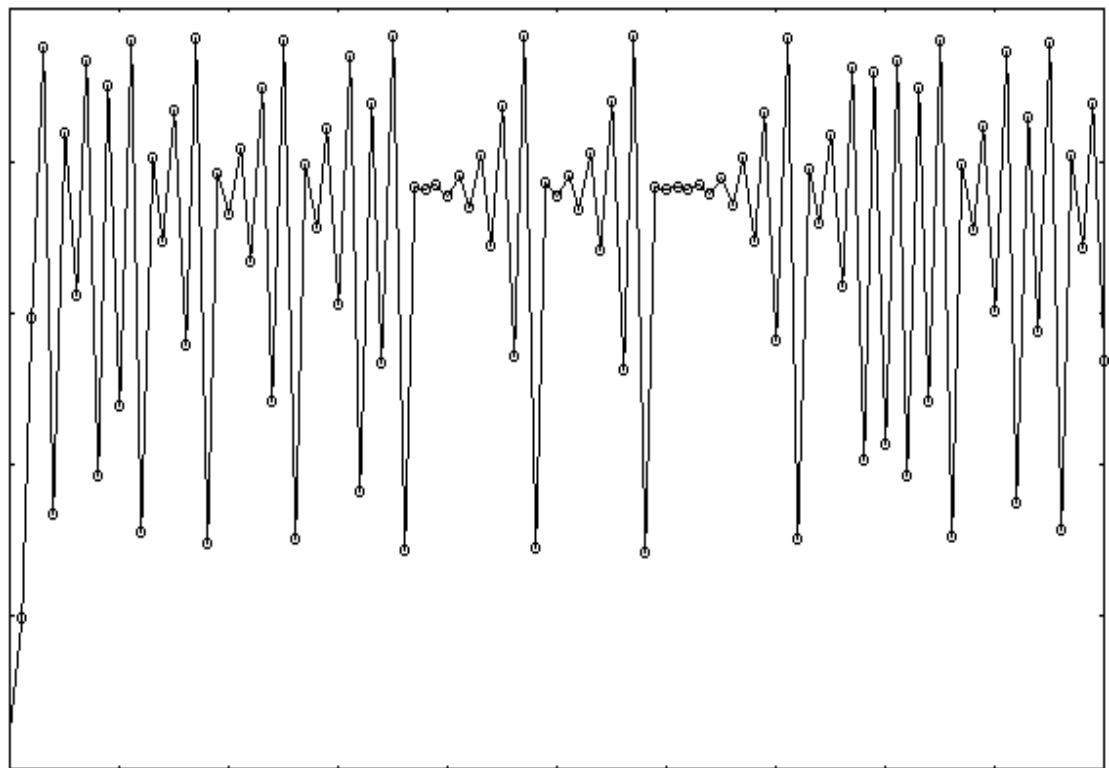
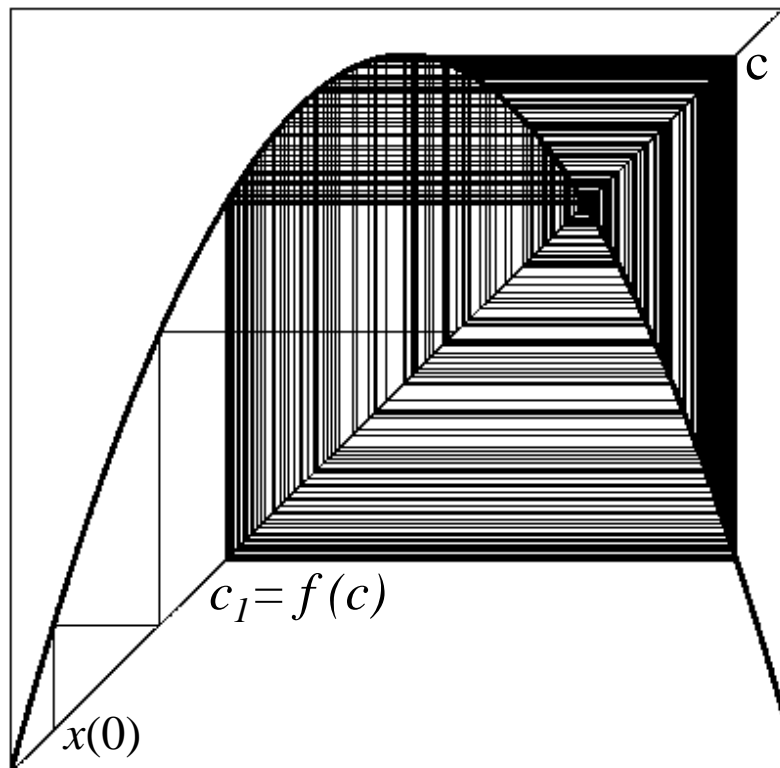
Sulle orme del caos

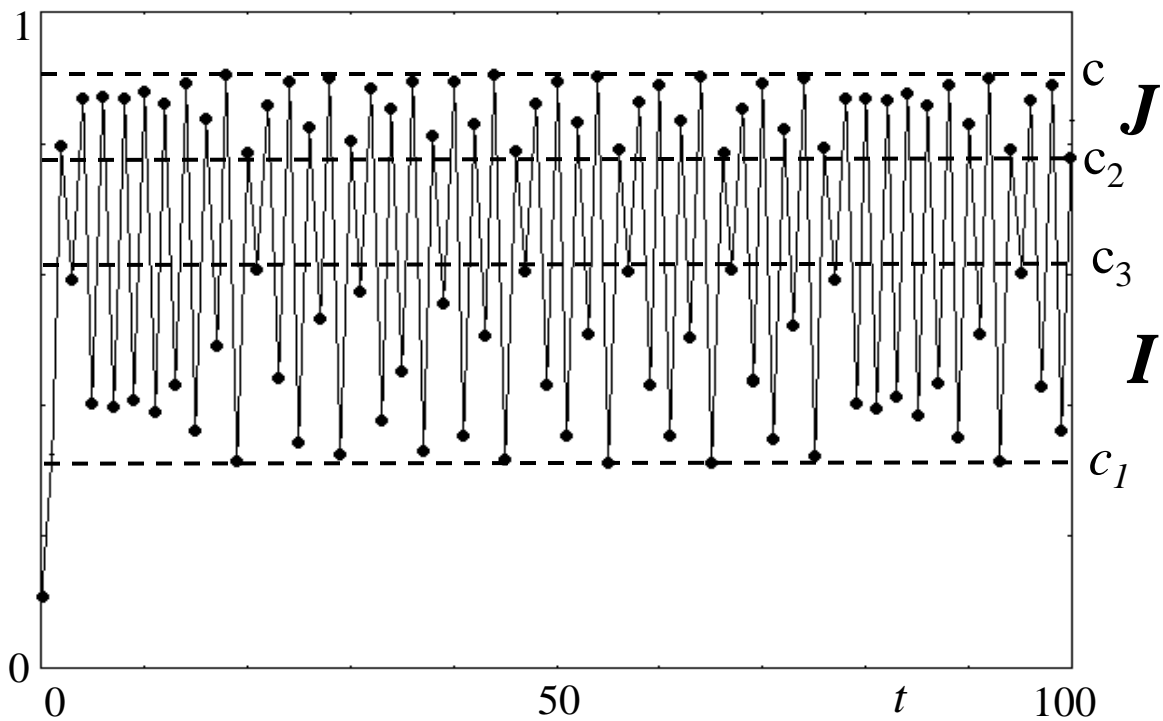
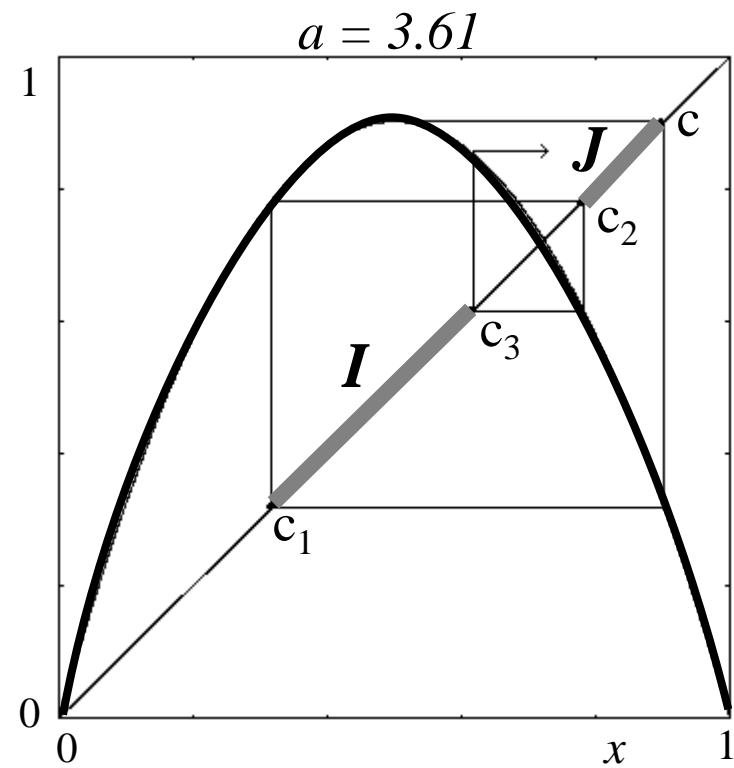
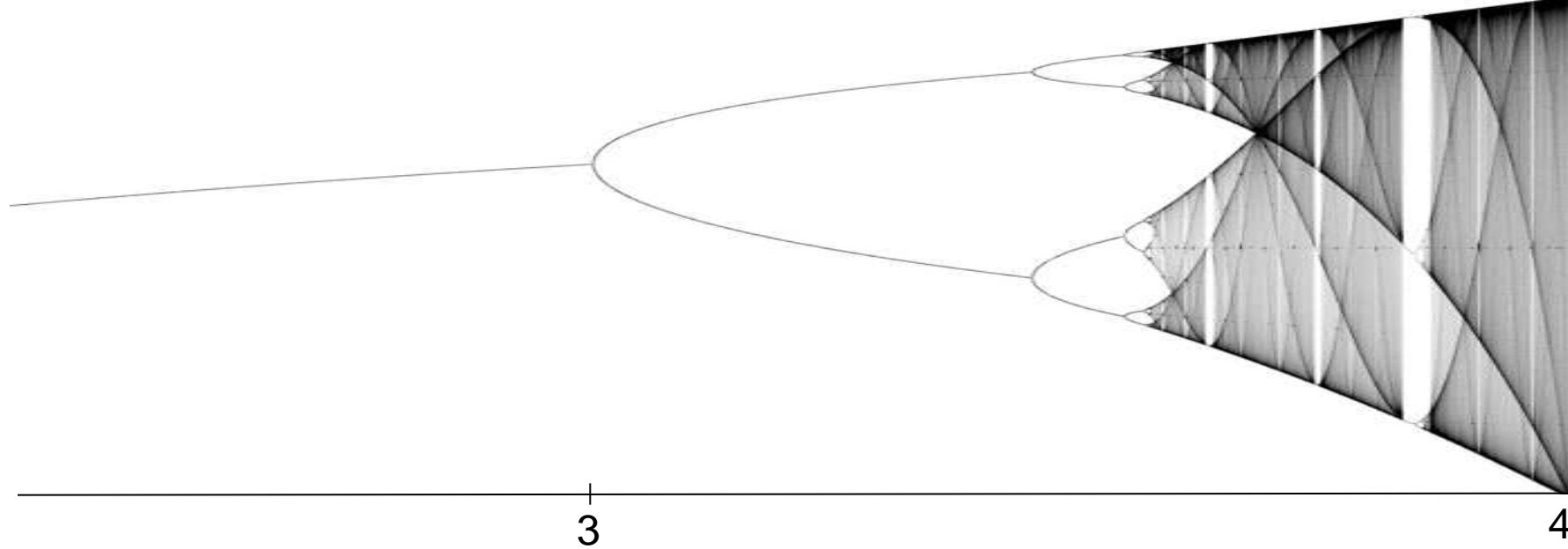
Comportamenti complessi
in modelli matematici semplici

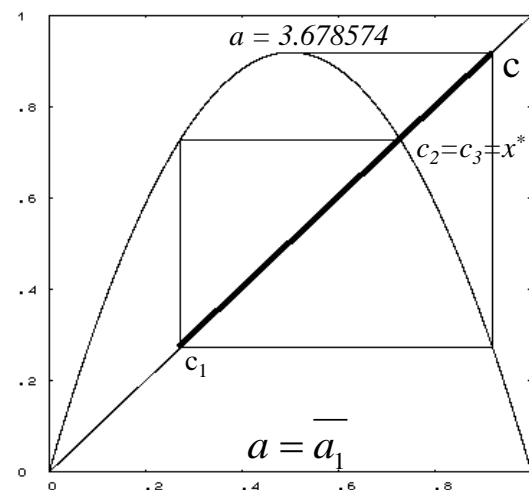
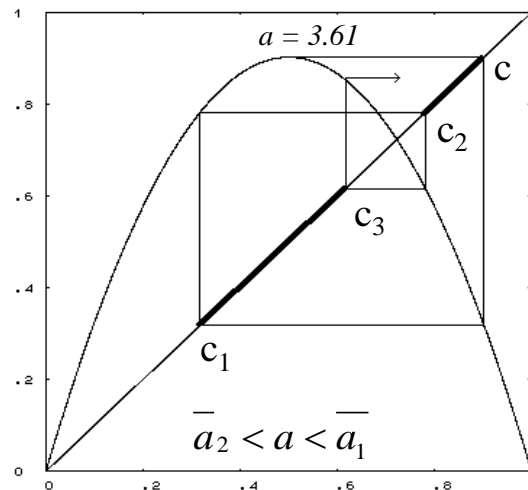
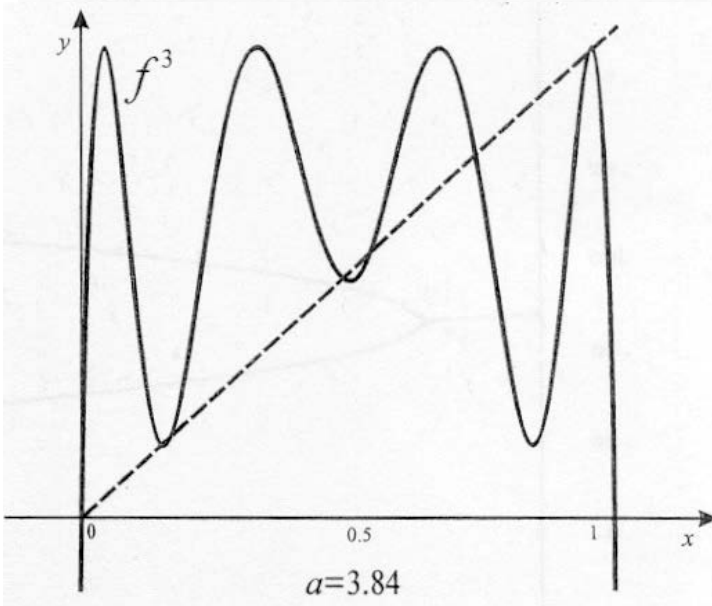
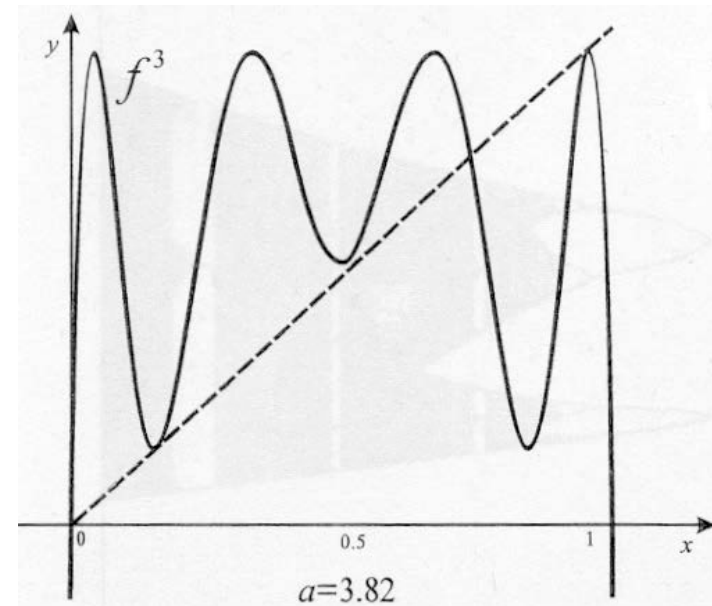
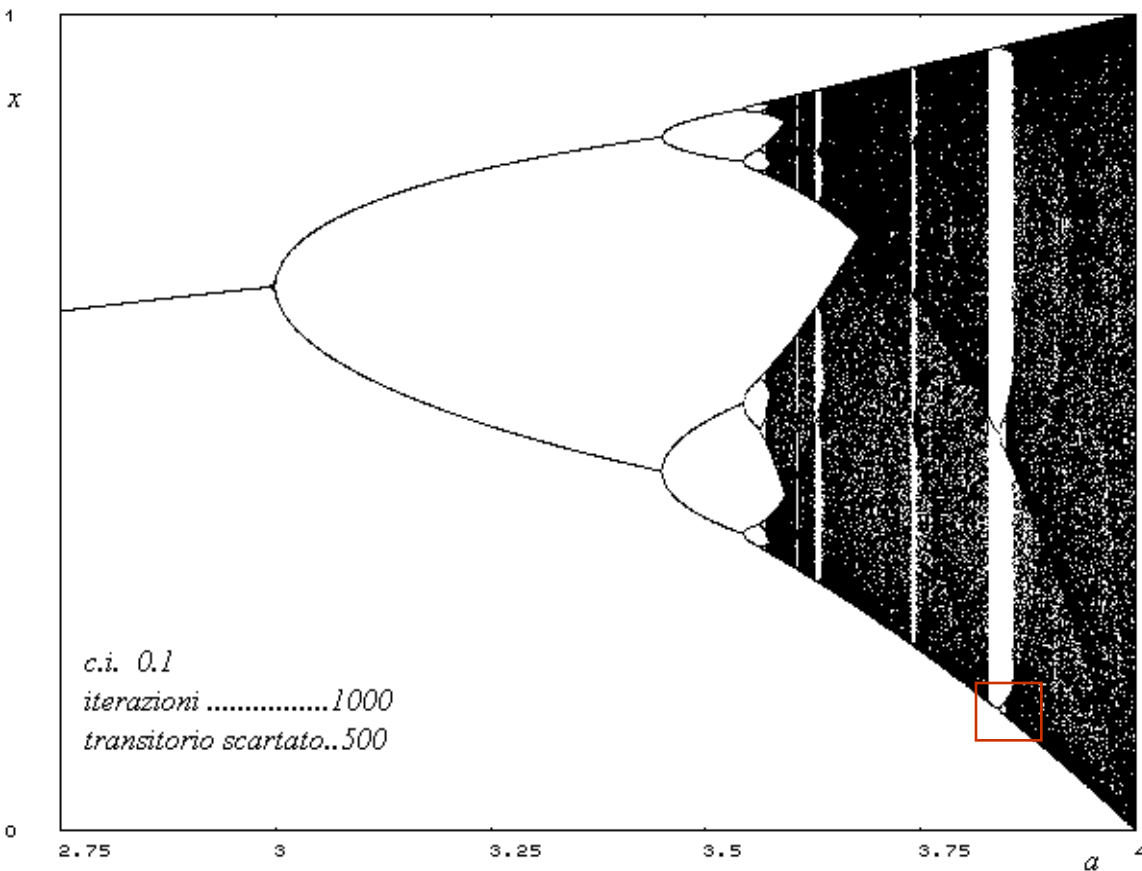
Bruno Mondadori

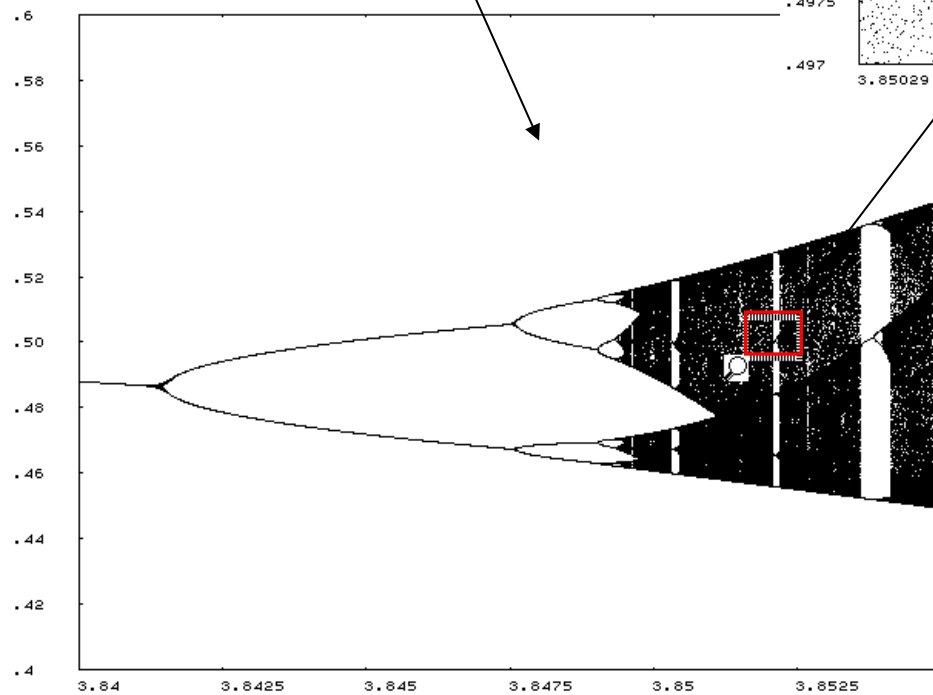
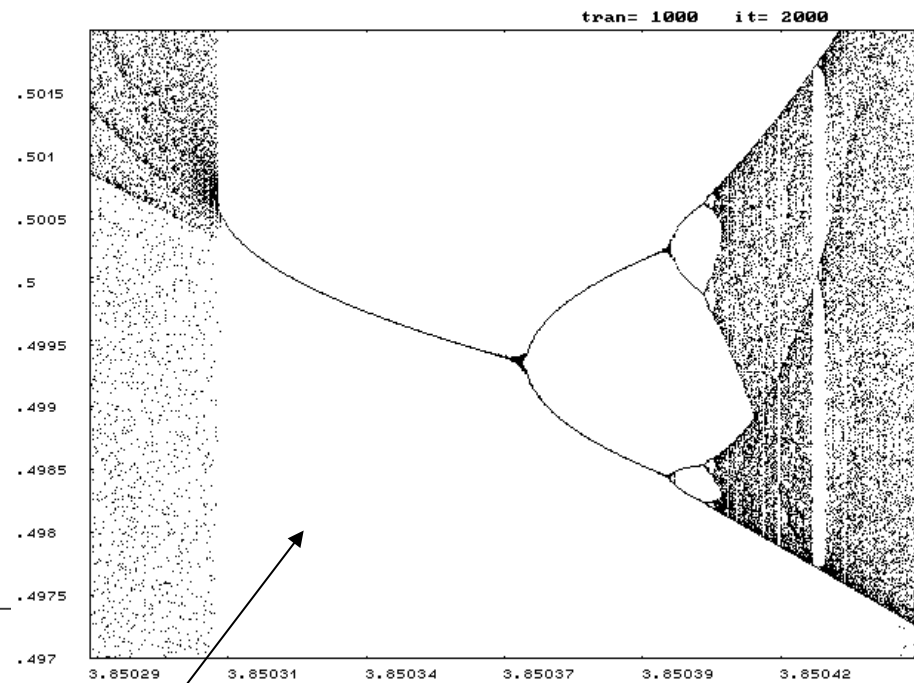
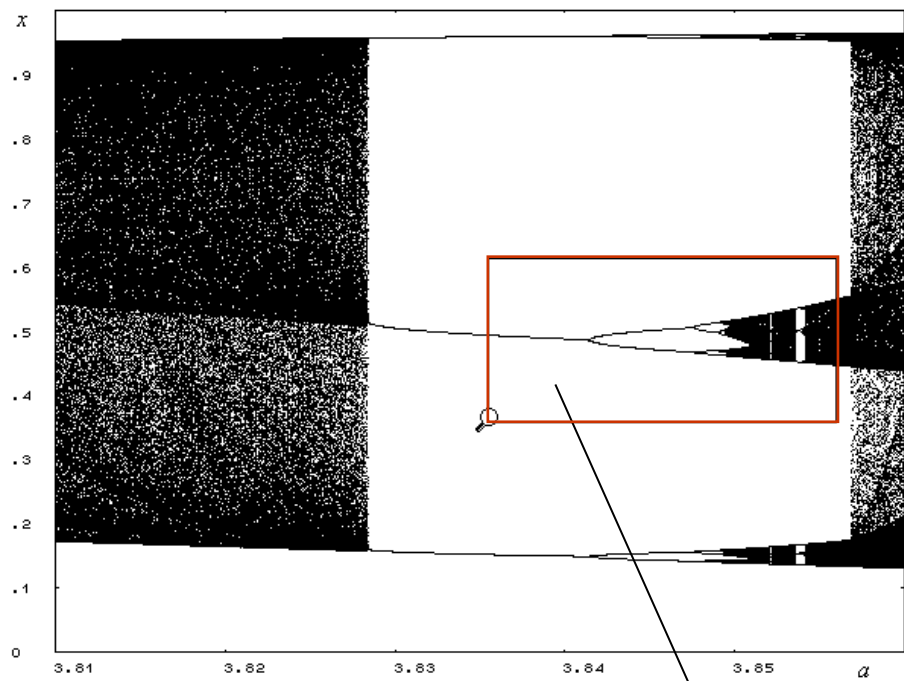


Mixing









Self-similarity

Da "Il mistero di Marie Rogêt", Edgar Allan Poe, 1842.

Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti; proprio come in aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero."

Dal romanzo: *Jurassic Park*,
di **Michael Crichton** (1942, 2008)

Un passo tratto dalla Seconda Iterazione

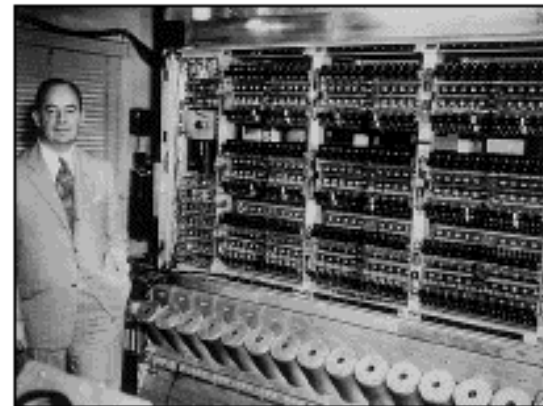
[...] *Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i “meccanismi del mondo reale”. Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici.*

Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos.

Terza cosa, sembravano voler fare di tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale.

Ancora Ian Malcom, da *Jurassic Park*, terza iterazione.

“I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann , il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. [...]. La teoria del caos manda all’aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se non per pochi giorni. [...] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni- è buttato via. È un’impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo”.



Jurassic Park, terza iterazione:

“Un simile controllo è impossibile” dichiarò Ian Malcom

“Invece sì” disse Hammond

“Mi scusi, ma lei non sa quello che dice” ribattè Malcom

“Piccolo stronzo arrogante” disse Hammond. Si alzò e uscì.

“Mi spiace” disse Malcom “ma il punto è che ciò che definiamo natura è di fatto un sistema complesso, non lineare.

Ci costruiamo una immagine lineare della natura e poi combiniamo pasticci.

Io non sono uno di quegli ambientalisti dal cuore tenero, ma dovete capire ciò che non capite. Quante volte bisogna sbattere il muso contro l’evidenza dei fatti?

Abbiamo costruito la diga di Assuan sostenendo che avrebbe rivitalizzato l’Egitto, e invece distrugge il fertile delta del Nilo, produce infestazioni da parassiti e rovina l’economia.

Abbiamo costruito...

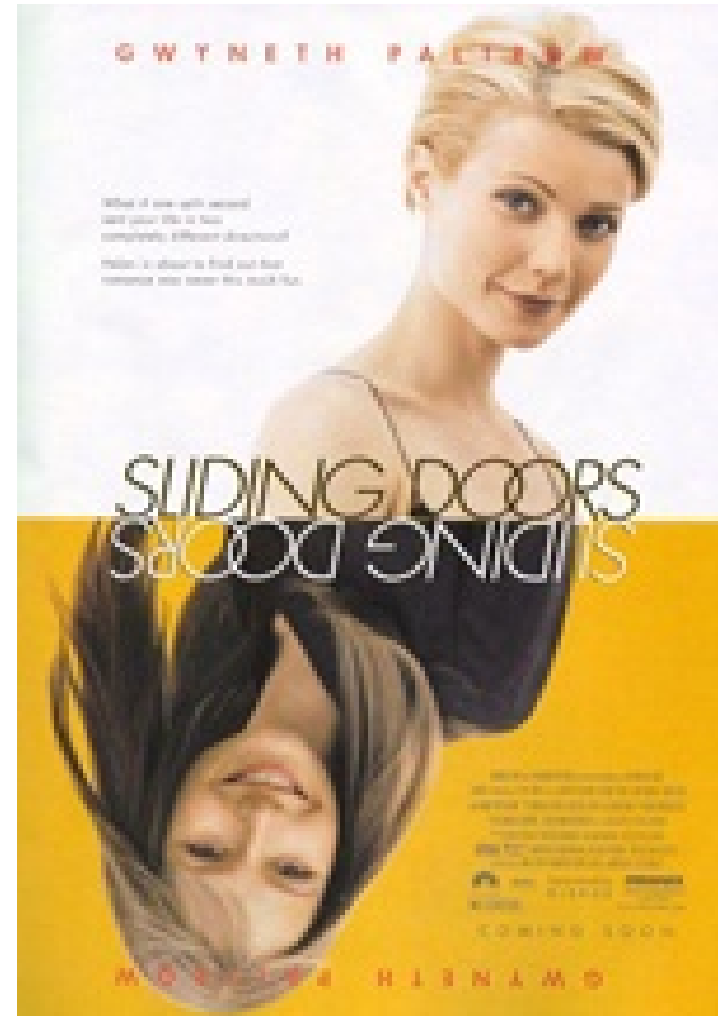
COMMISSARIO, C'È UNA FARFALLA
CHE SVOLAZZÀ TRANQUILLA.

LA TEORIA DEL CAOS DICE CHE SE UNA
FARFALLA SBATTE LE ALI QUI, POTREBBE
SUCCEDERE UNA CATASTROFE' ALTROVE.

CHE FACCIAMO,
LA ARRESTIAMO'?



Caos deterministico al cinema





CHAOS 1997

CHAOS
 IGT MARCHE ROSSO
 TABLE RED WINE
 ESTATE BOTTLED
 Imbottigliato all'origine da:
 Fattoria Le Terrazze
 di Antonio Terni - Numana (An)
 PRODUCT OF ITALY
 ITALIA



NET CONT. 750 ML e ALC. 13,5% BY VOL.
<http://www.italywines.com>

The "Chaos" theory explains why certain patterns cannot be fully explained. And wine - this wine, any wine - cannot be explained by the countless interactions between its compounds. All the better.

La teoria del "Chaos" spiega perché alcune realtà non si possono spiegare del tutto. Così come un vino - questo vino, qualsiasi vino - non si può spiegare in base alle innumerevoli interazioni fra le sue componenti. Meglio così.

NON DISPERDERE IL VETRO NELL'AMBIENTE - L. 430

CHAOS

IGT MARCHE ROSSO
 TABLE RED WINE
 ESTATE BOTTLED



Imbottigliato all'origine da:
 Fattoria Le Terrazze
 di Antonio Terni - Numana (An)
 PRODUCT OF ITALY
 ITALIA

NET CONT. 750 ML e ALC. 13,5% BY VOL.

<http://www.italywines.com>

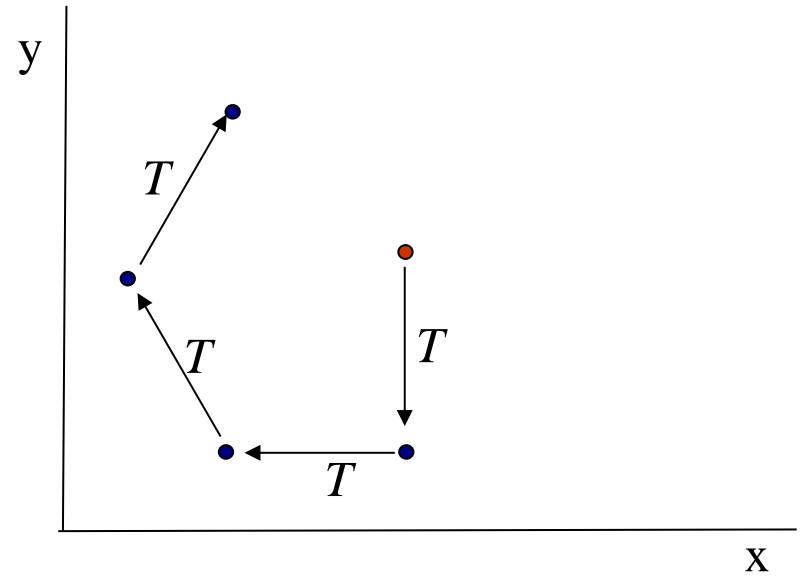
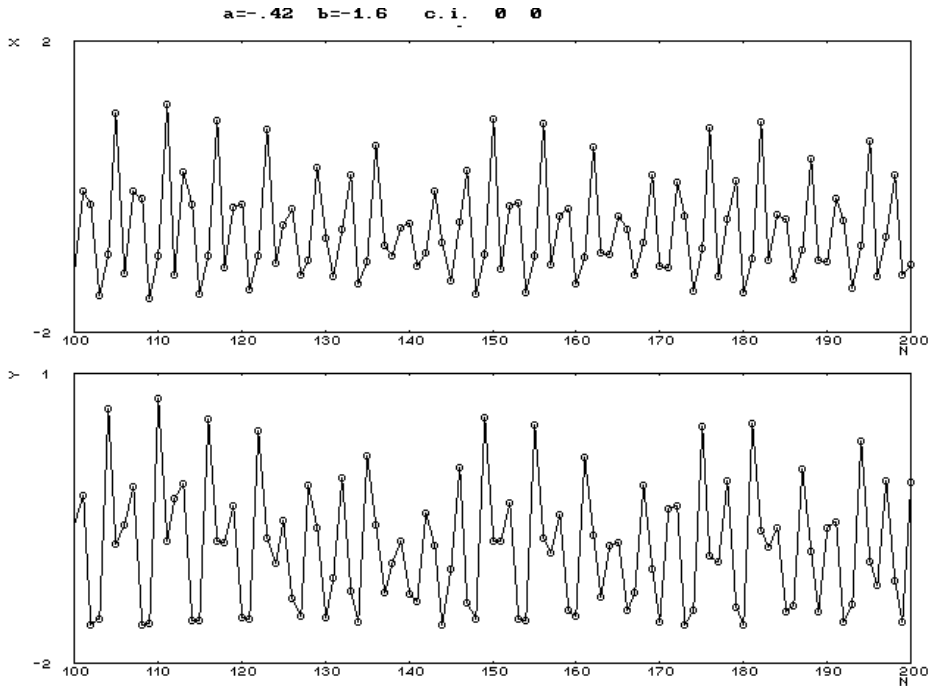
The "Chaos" theory explains why certain patterns cannot be fully explained. And wine - this wine, any wine - cannot be explained by the countless interactions between its compounds. All the better.

La teoria del "Chaos" spiega perché alcune realtà non si possono spiegare del tutto. Così come un vino - questo vino, qualsiasi vino - non si può spiegare in base alle innumerevoli interazioni fra le sue componenti. Meglio così.

NON DISPERDERE IL VETRO NELL'AMBIENTE - L. 430

Mappe iterate del piano

$$T : \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$



$$T : \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$

[miraquad](#)

pannello di controllo

File

Mapa di Mira $x' = ax + y$
 $y' = b + x^2$

parametri mappa
 a
 b

Transitorio
Iterazione

diagrammi x e y versus time
finestra temporale

piano x y linea punto pixel

xmin xmax
 ymin ymax

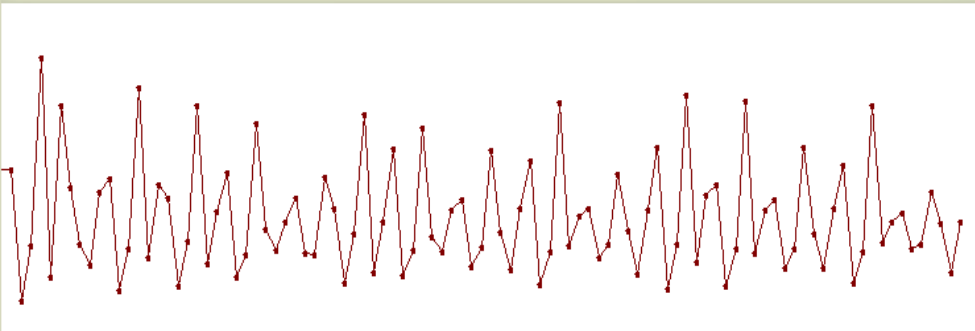
coordinate mouse
 X Y

punto iniziale x_0 y_0

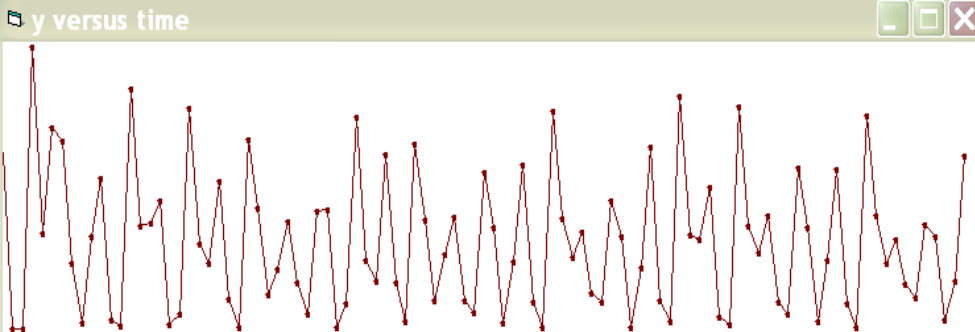
vecchia x **vecchia y**
nuova x **nuova y**

punto
 linea

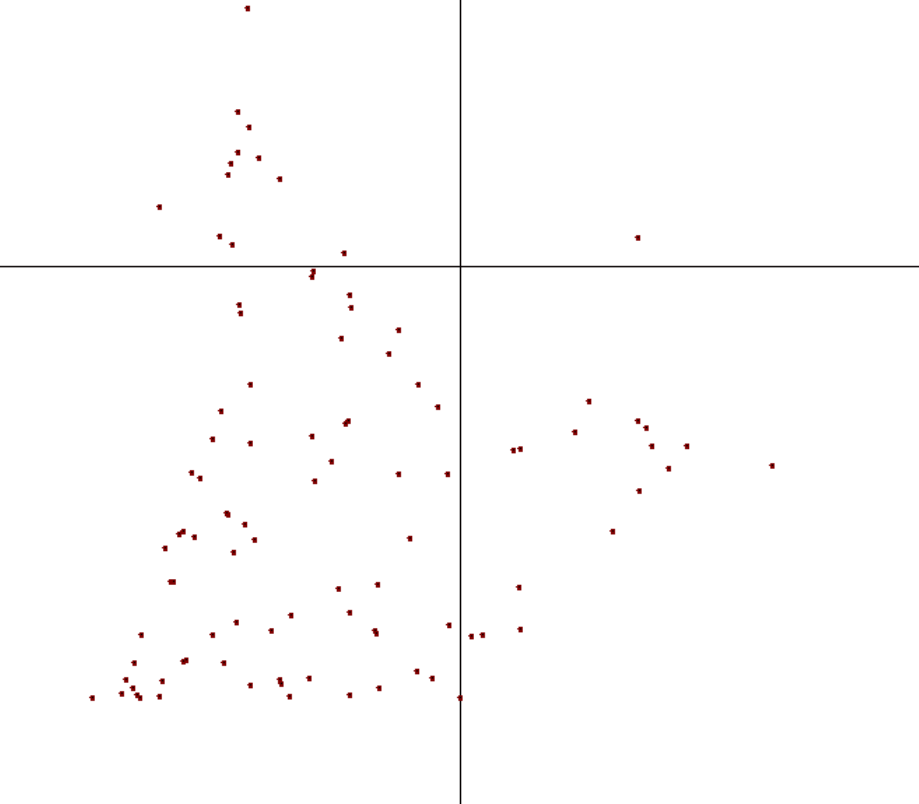
x versus time



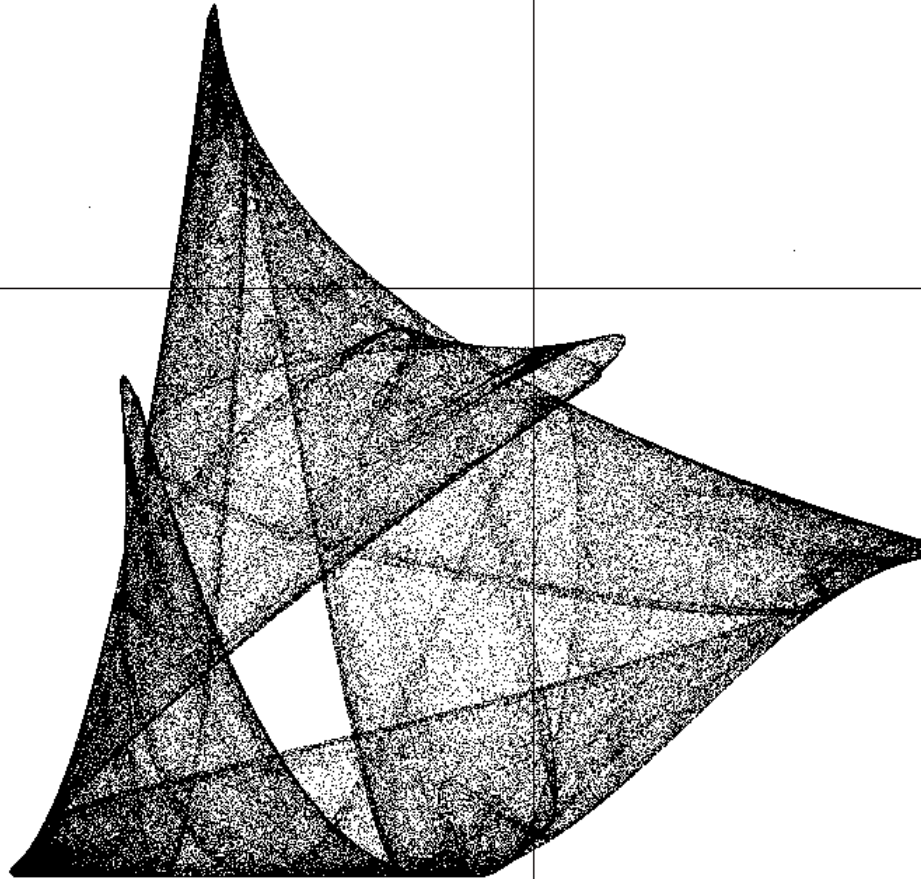
y versus time



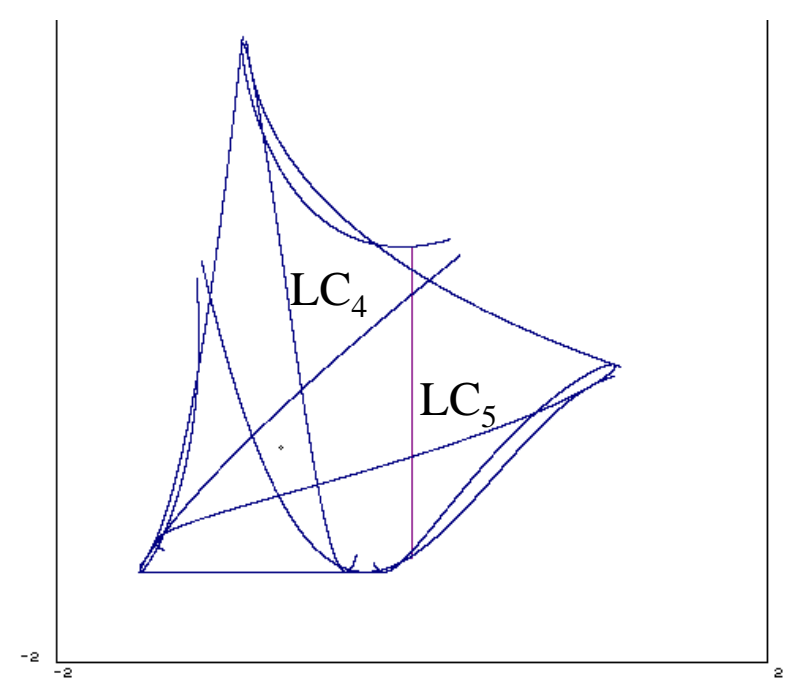
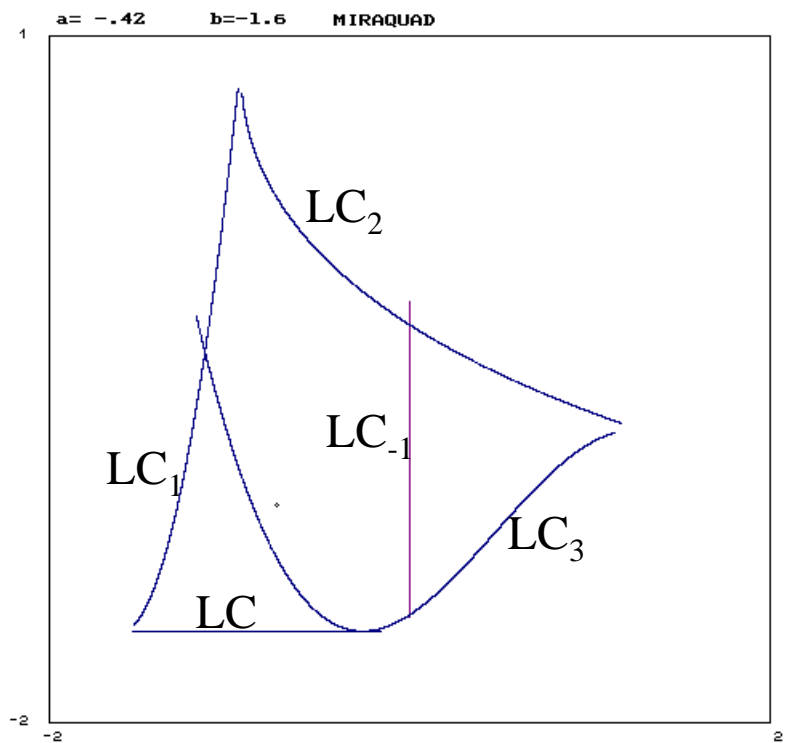
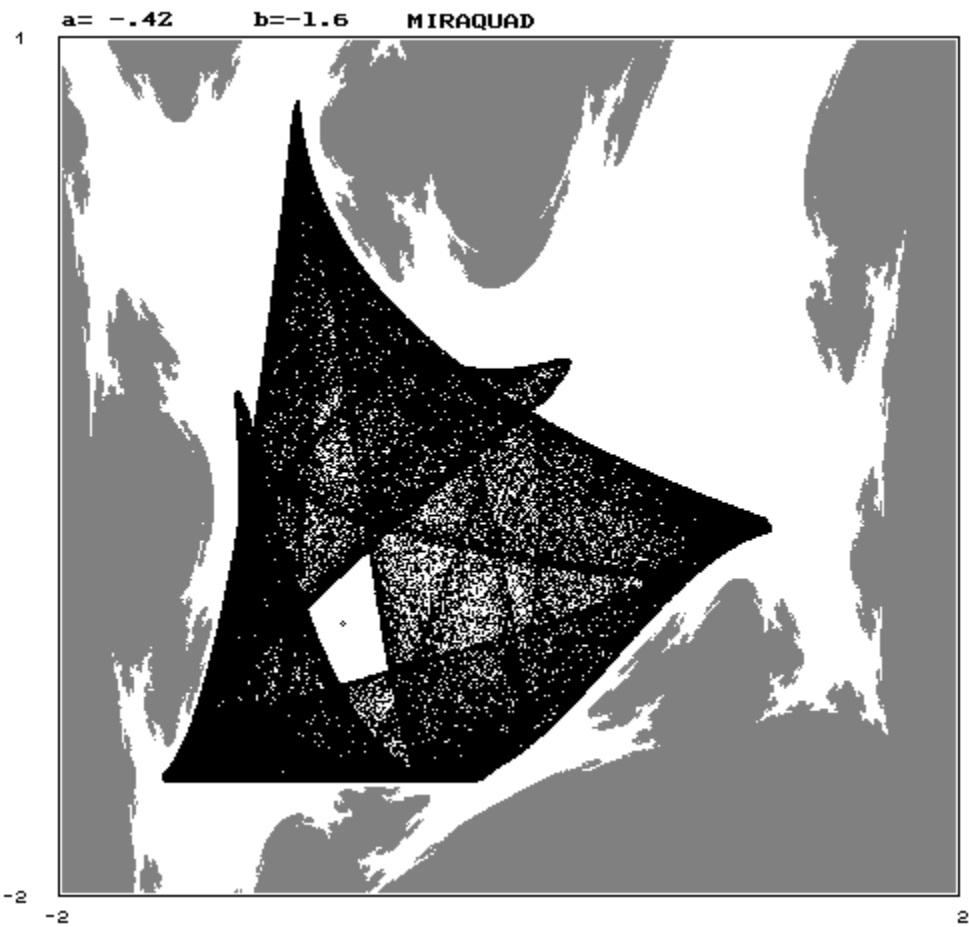
piano x y



piano x y



$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t^2 + b \end{cases}$$



2-dim. affine maps: contractions, expansions, rotations etc.

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f$$

2dim-linear

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

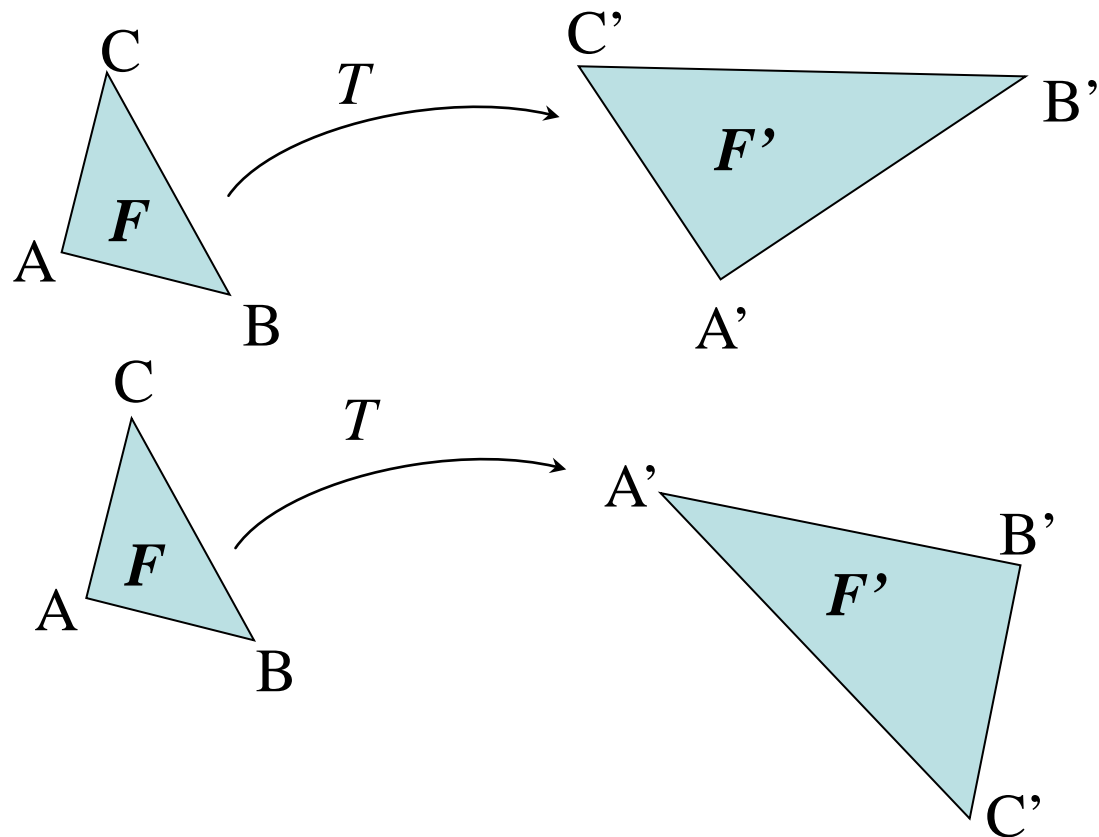
$$\text{area}(F') = |\det A| \text{area}(F)$$

$|\det A| < 1$ (> 1) *contraction (expansion)*

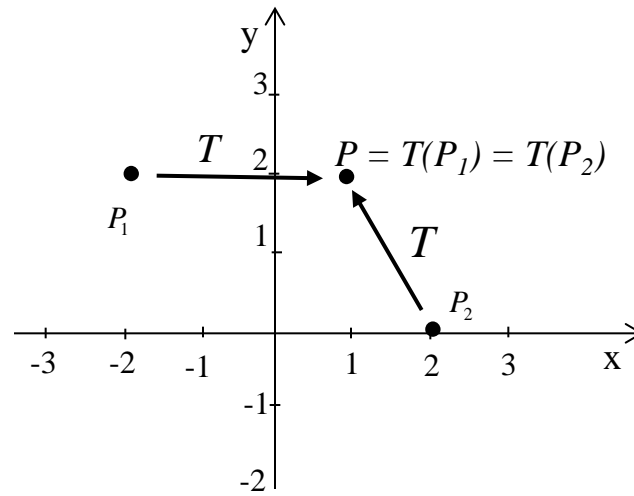
Meaning of the sign of $|\det A|$

T is orientation preserving
if $\det A > 0$

T is orientation reversing
if $\det A < 0$



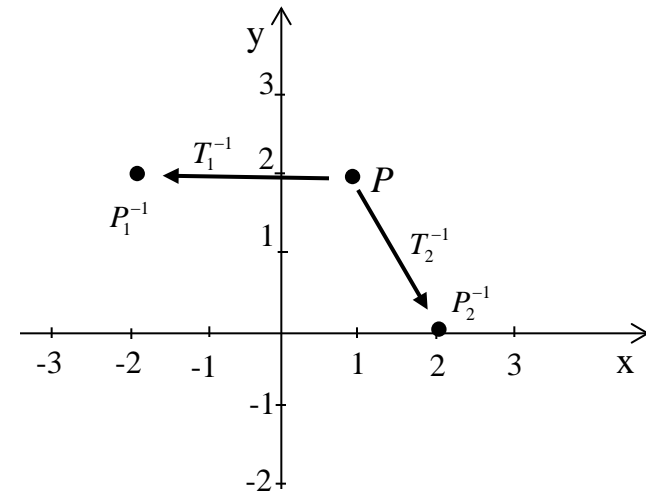
$$T : \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$



2 inverses

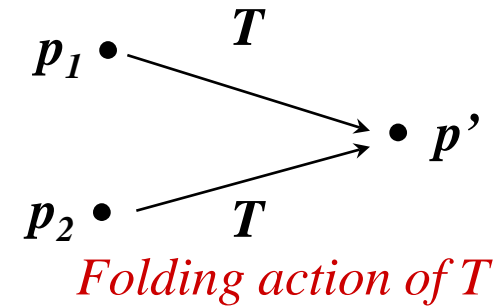
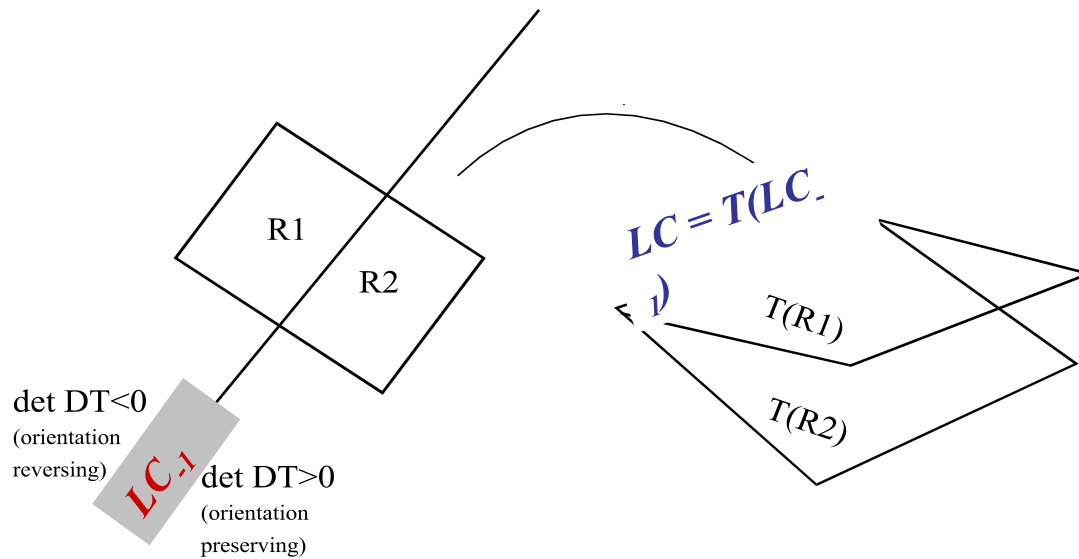
$$T_1^{-1} : \begin{cases} x = -\sqrt{y'-b} \\ y = x' + \sqrt{y'-b} \end{cases}$$

$$T_2^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt{y'-b} \\ y = x' - \sqrt{y'-b} \end{cases}$$

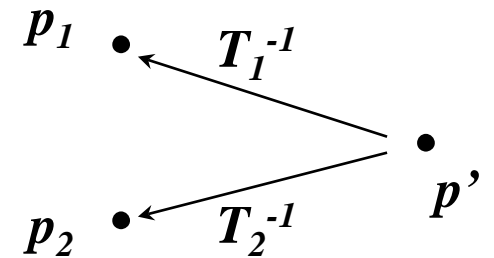
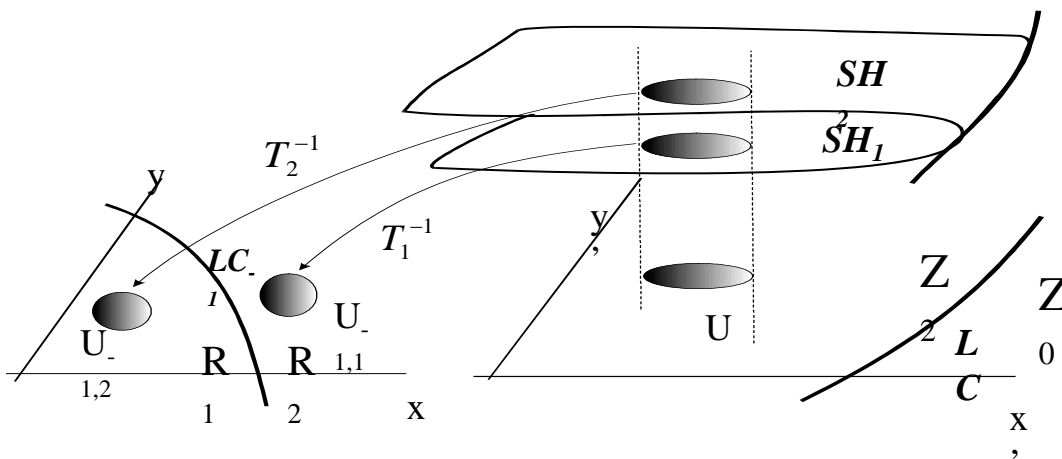


Noninvertible maps: many to one

Noninvertible (Many-to-One) map: *Distinct points are mapped into the same point*



Equivalently, we say that p' has several rank-1 preimages



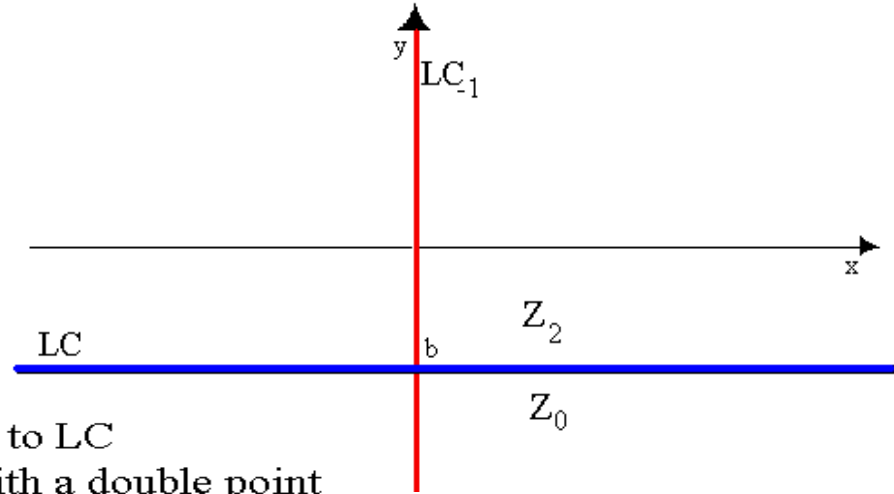
Unfolding action of T

2D example $T: \begin{cases} x_{t+1} = ax_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t^2 + b \end{cases} \quad T_1^{-1}: \begin{cases} x = -\sqrt{y'-b} \\ y = x'+\sqrt{y'-b} \end{cases} \quad T_2^{-1}: \begin{cases} x = \sqrt{y'-b} \\ y = x'-\sqrt{y'-b} \end{cases}$

$DT = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \quad \det DT = -2x = 0 \text{ for } x=0$
 $T(\{x=0\}) \rightarrow \{y=b\}$

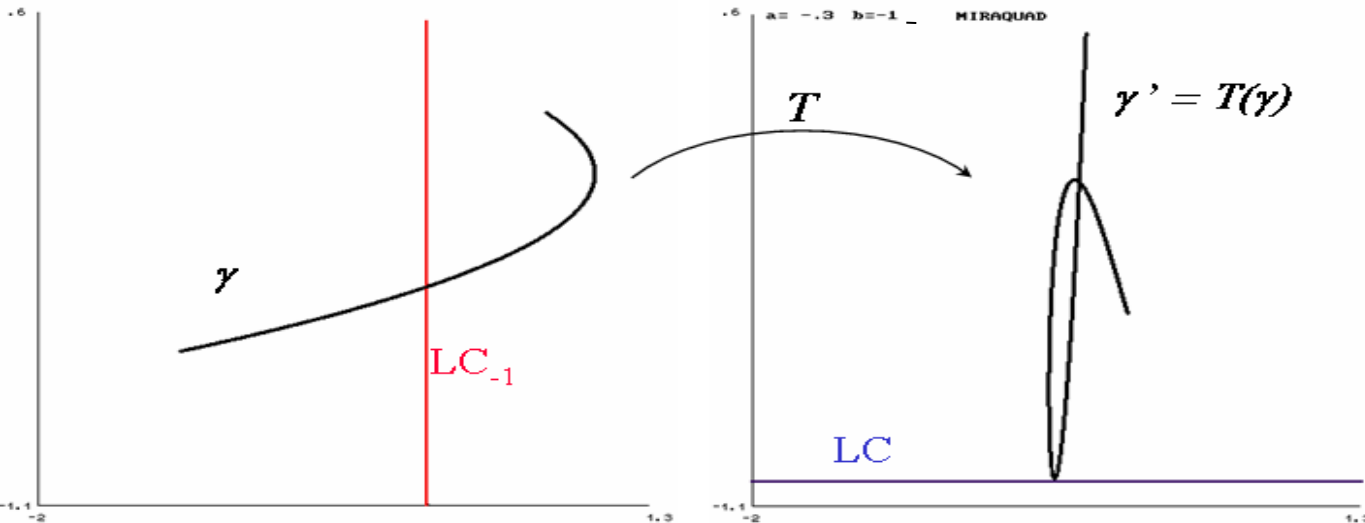
$LC = \{(x,y) \mid y = b\}$

$LC_{-1} = \{(x,y) \mid x = 0\}$

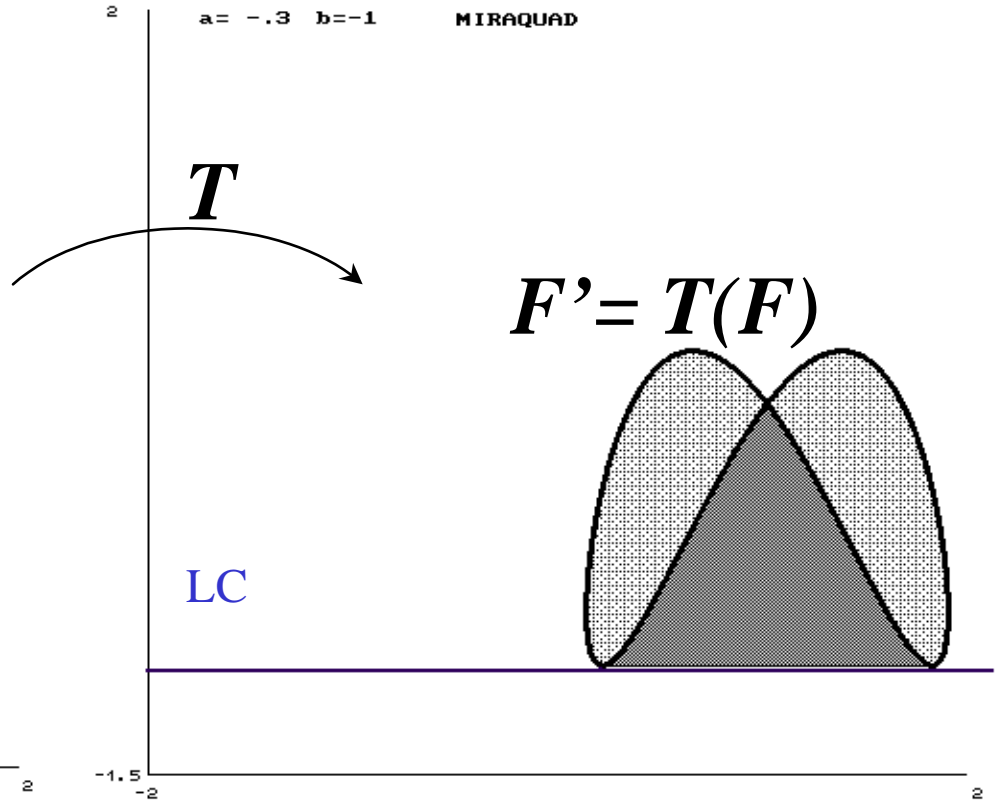
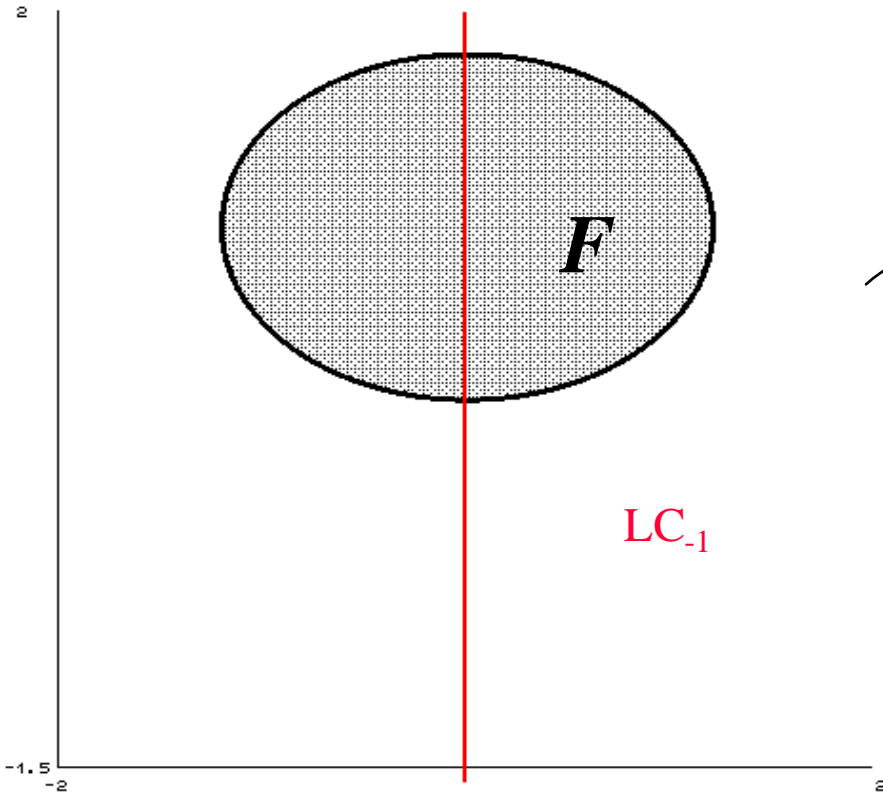


Curves across LC_{-1} are mapped into curves tangent to LC

Simple across LC_{-1} may be mapped into mapped with a double point

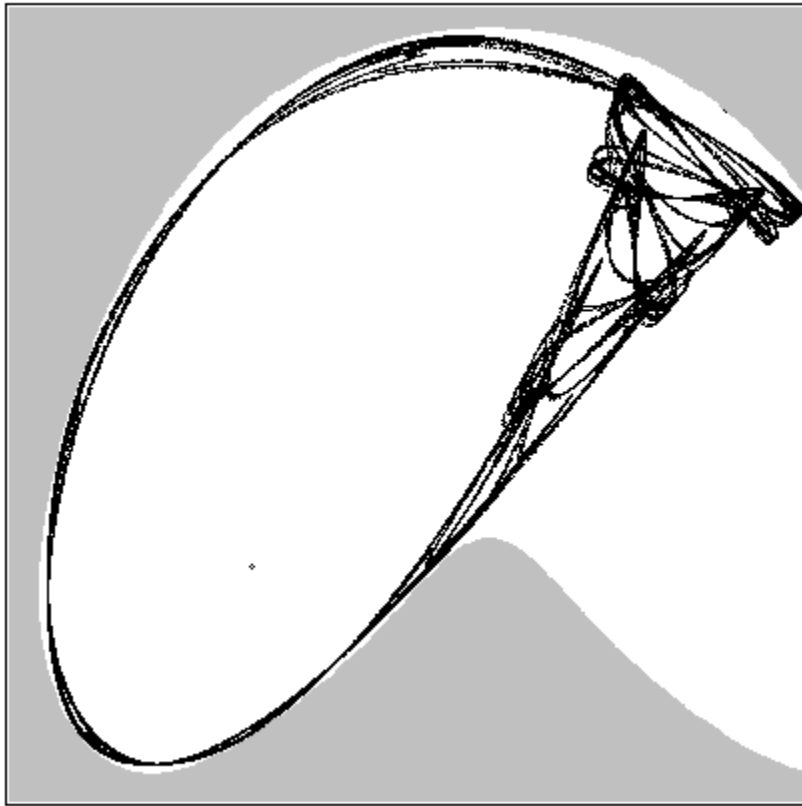


$$T : \begin{cases} x' = ax + y \\ y' = x^2 + b \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t^2 + b \end{cases}$$

lam= 1.54



-1.0
-1.8

1.8

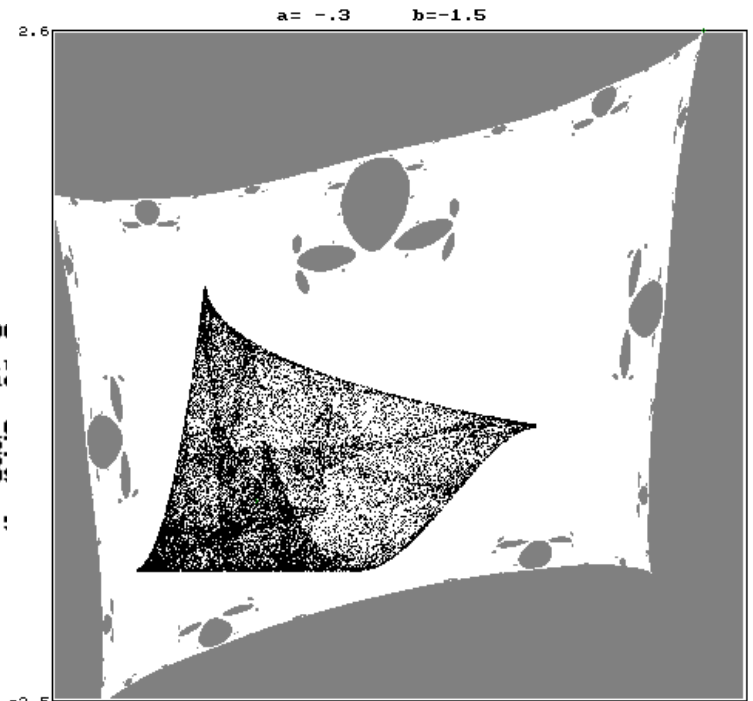
```

c.i. 0.100
tr= 500
fixed poi
eigenvalu

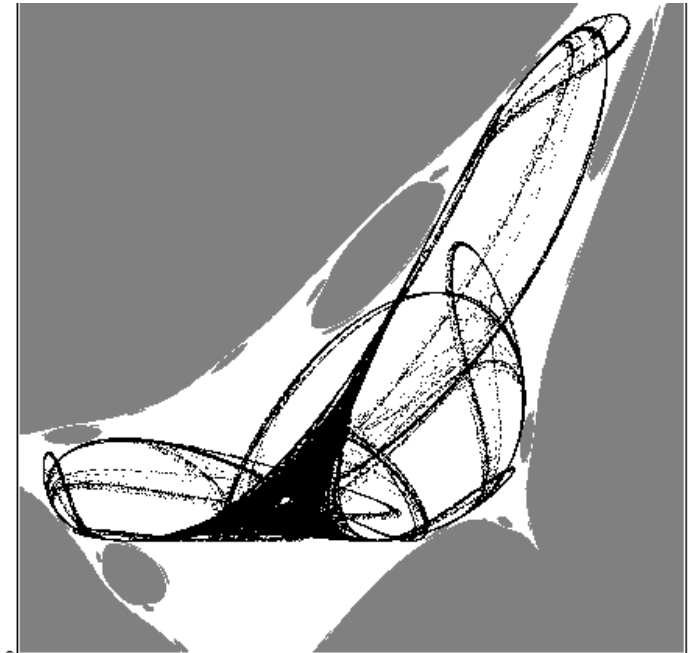
      p( 1 )
0.0000 0.1
.5 1.135
.5 -1.135
mod= 1.240

      p( 2 )
1.5400 1.
-.8379087
1.8379089

```



-2.5
-2



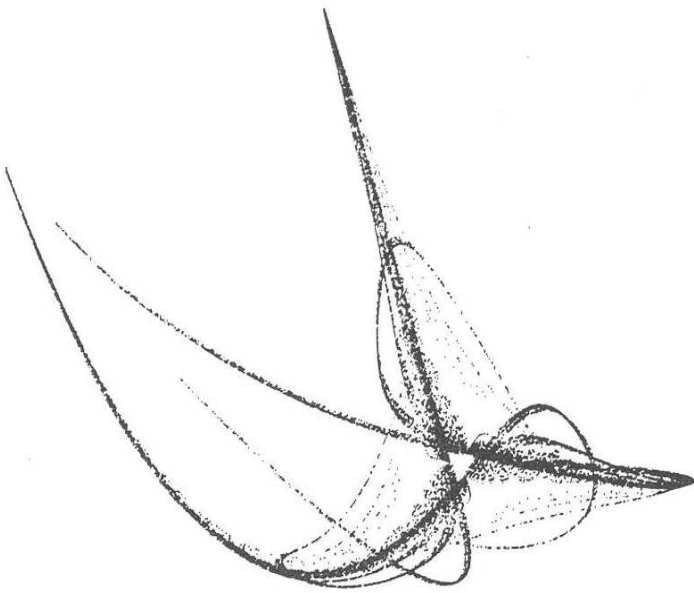
-2.3
-2.1

1.8

```

0.1000
0.3021
1.6000
1.3000
1.5470
1.3435
1.3435
0.0000
0.5000
0.5000

```



$$\begin{cases} x_{n+1} = a(x_n \sqrt{3}/2 - y_n/2) + x_n y_n \\ y_{n+1} = a(x_n/2 + y_n \sqrt{3}/2) + x_n^3 + y_n^3 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])

© CEPAD 1980

I.S.B.N. 2.85428.055.5

Toute reproduction, même partielle de cet ouvrage, est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constitue une contrefaçon.

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1980

N° Editeur : 70

DYNAMIQUE CHAOTIQUE

Transformations ponctuelles Transition Ordre - Désordre

I. GUMOWSKI *

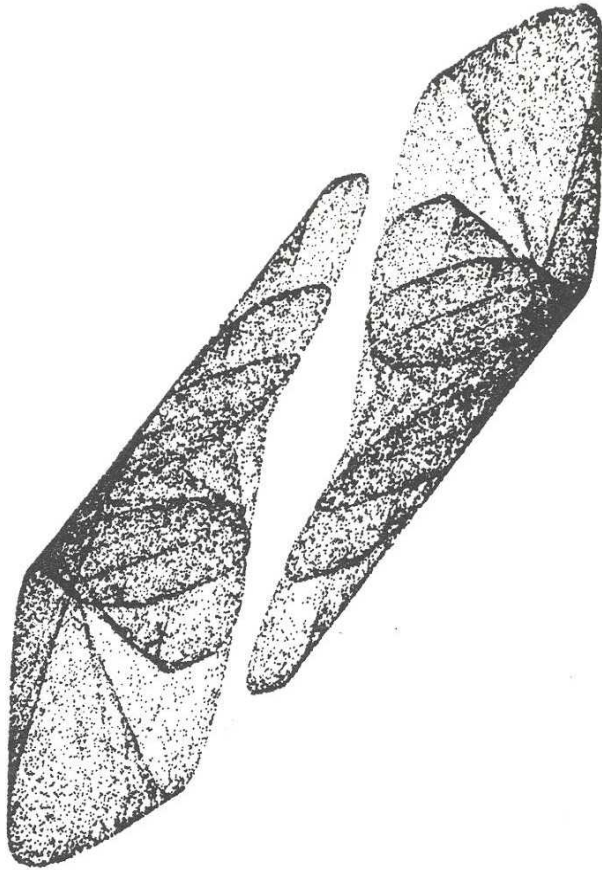
C. MIRA **

Groupe « Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications »

(*) U.E.R. de Mathématiques,
Université Paul Sabatier Toulouse

(**) Département de Génie Electrique
Institut National des Sciences Appliquées Toulouse

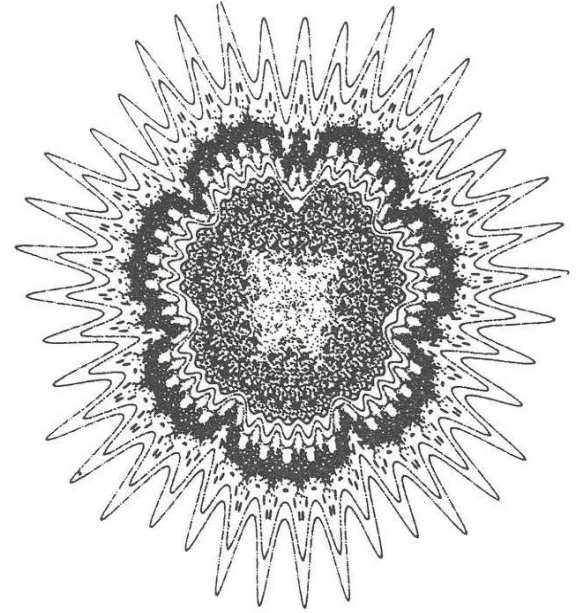
CEPADUES EDITIONS



$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + Y_n \\ y_{n+1} = Y_n - f(x_n) \quad ; \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

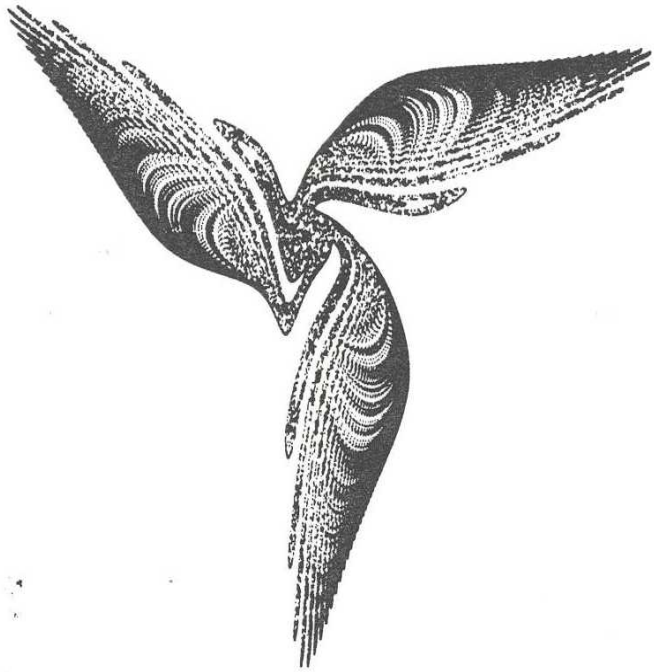
$$\begin{cases} f(x) = y - 0,2\lambda x, \text{ si } 0 < x < x_A, \quad Y_A = 0,2\lambda x_A \\ f(x) = 0,45\lambda \frac{(x^2 - x_A^2 - x + x_A)}{0,5 - x_A} + 1,1\lambda(x - x_A) + Y_A, \text{ si } x_A < x < 1 - x_A \\ f(x) = -2\lambda(x + x_A - 1) + Y_B \quad ; \quad Y_B = 1,1\lambda(1 - 2x_A) + Y_A, \text{ si } x > 1 - x_A \\ x_A = 0,4 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf.[G 36])



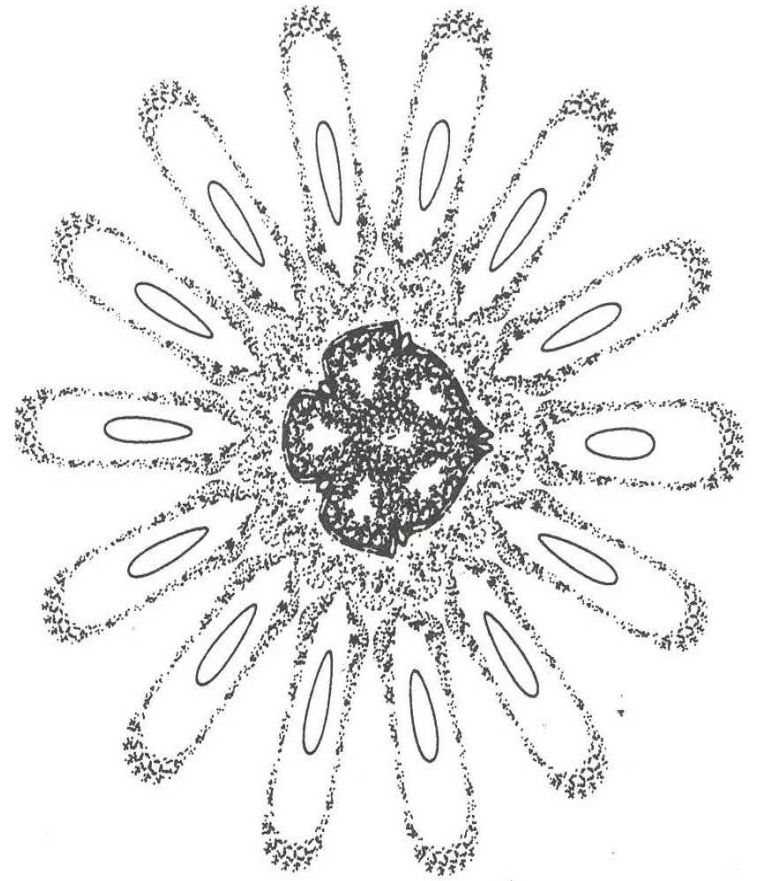
$$\begin{cases} x_{n+1} = Y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = x_n + F(x_{n+1}), \quad F(x) = \mu x + 2(1-\mu) \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \mu = 0,2 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf.[G 36])



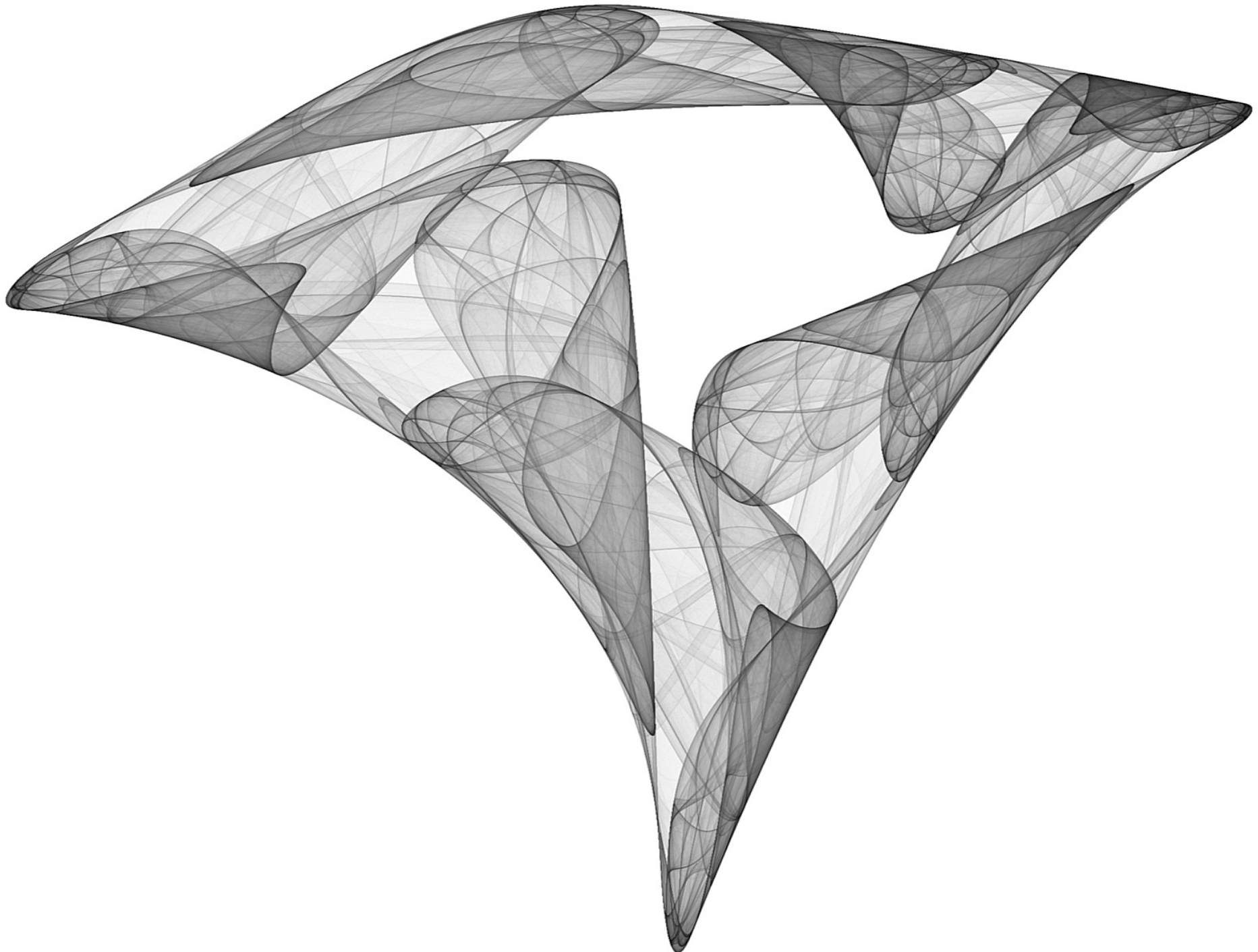
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + \alpha(1 - 0,05y_n^2)y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1}) ; F(x) = \mu x + 2(1 - \mu) \frac{x^2}{1 + x^2} \\ \alpha = 0,005 ; \mu = -0,495 \end{cases}$$

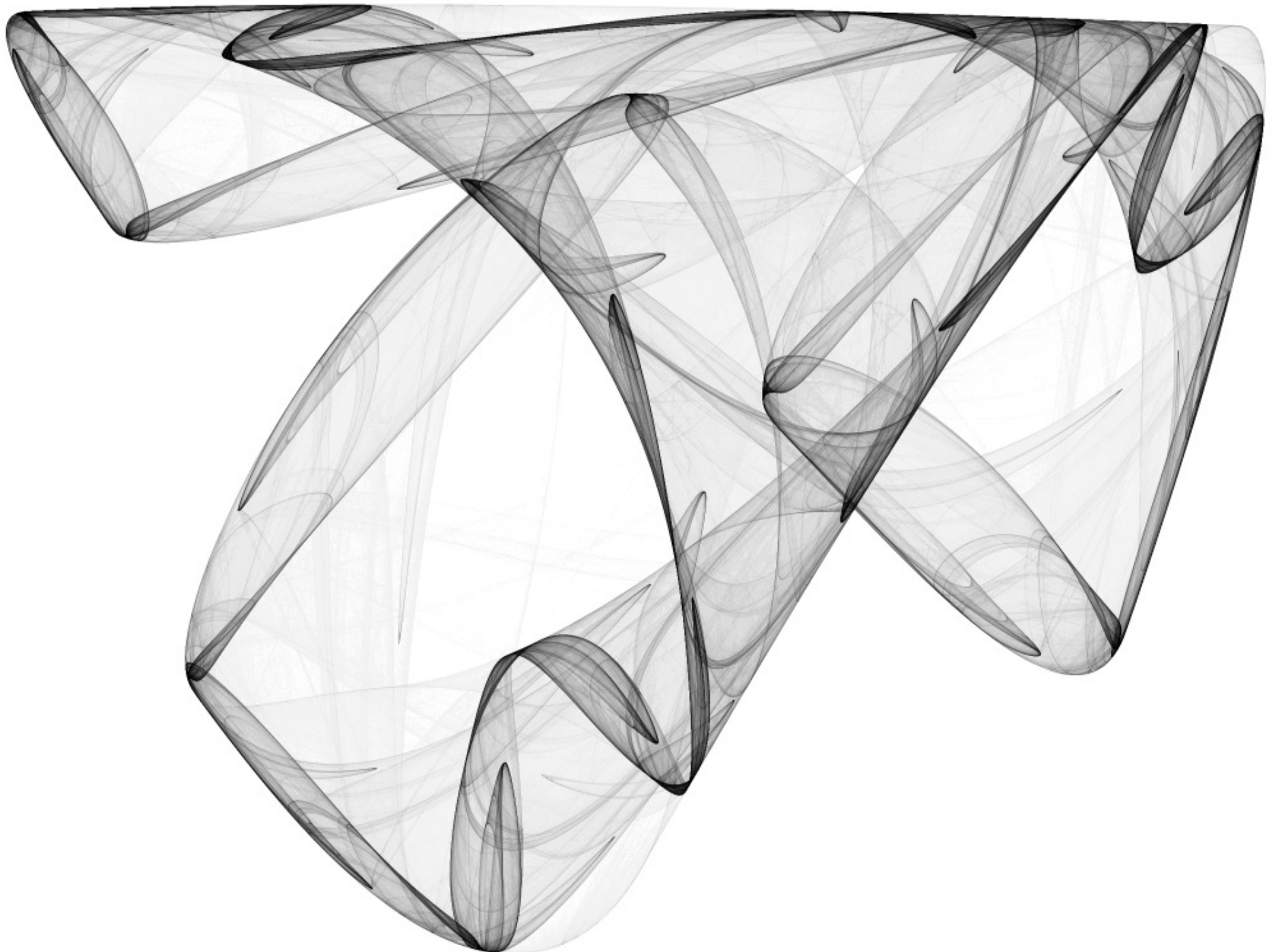
Chaos esthétique (cf. [G 36])

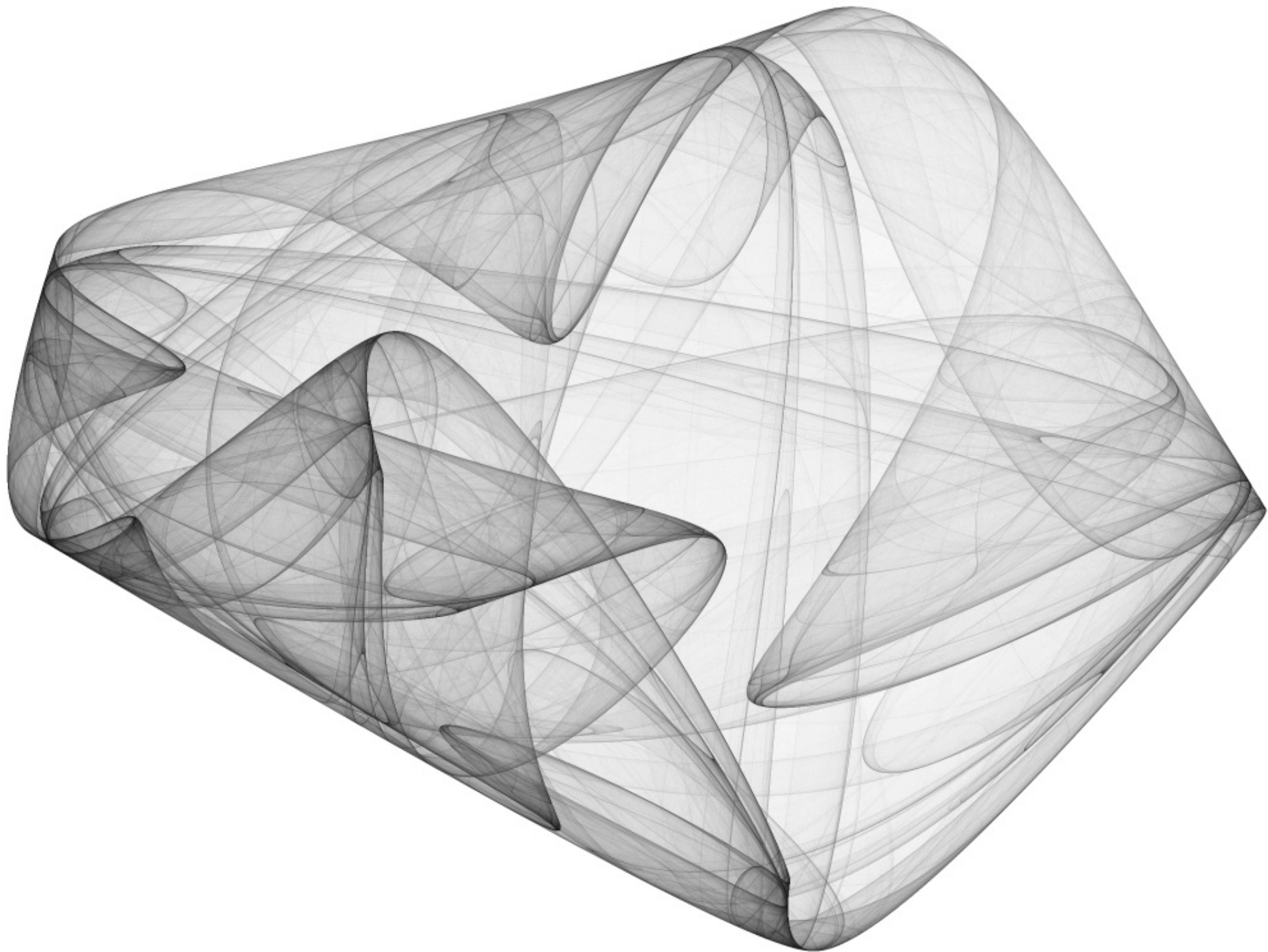


$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1}) ; F(x) = \mu x + 2(1 - \mu) \frac{x^2}{1 + x^2} \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])







<http://paulbourke.net/fractals/>

Fractals, Chaos

<http://paulbourke.net/fractals/clifford/>

Clifford Attractors

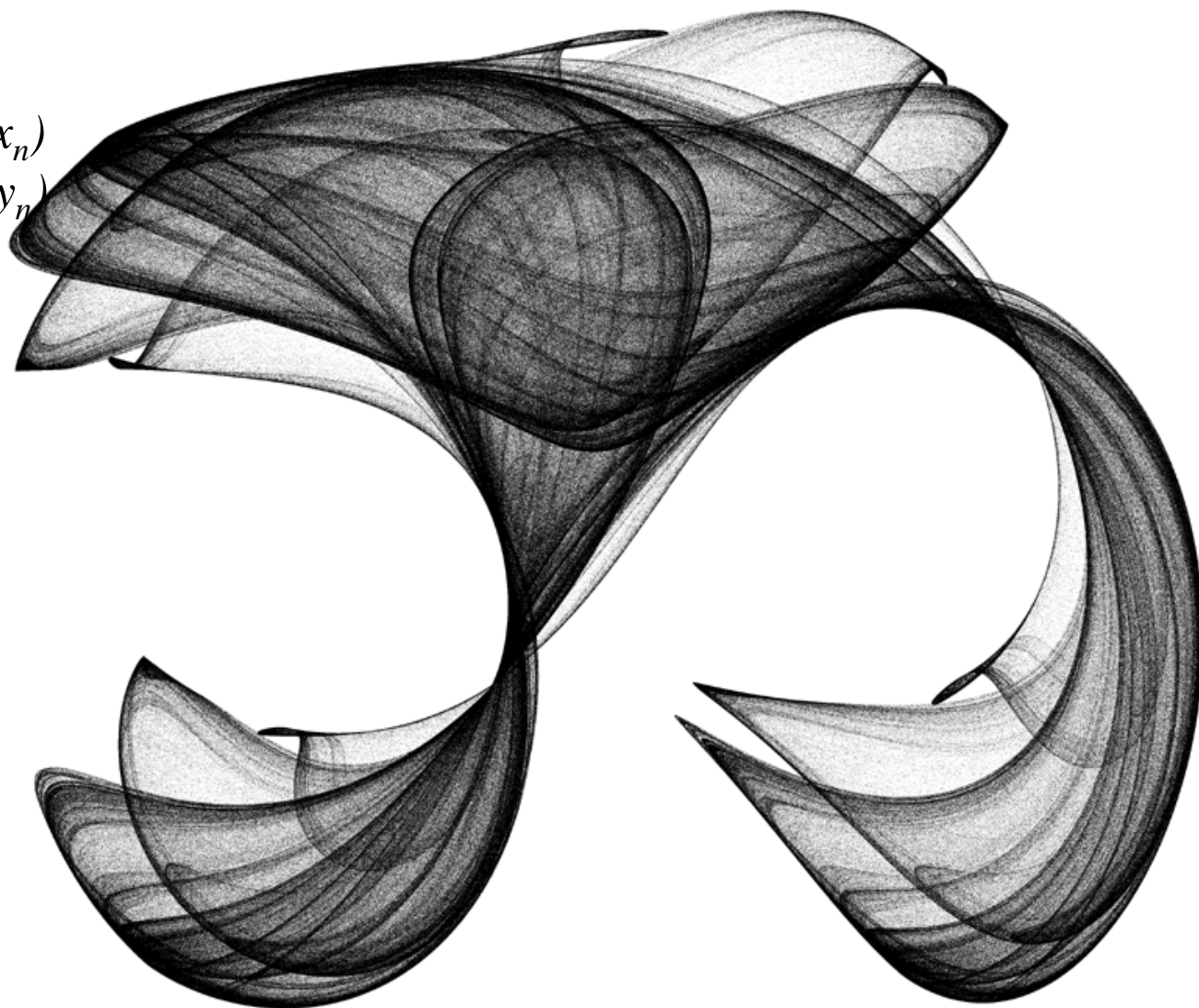
Definition

$$x_{n+1} = \sin(a y_n) + c \cos(a x_n)$$

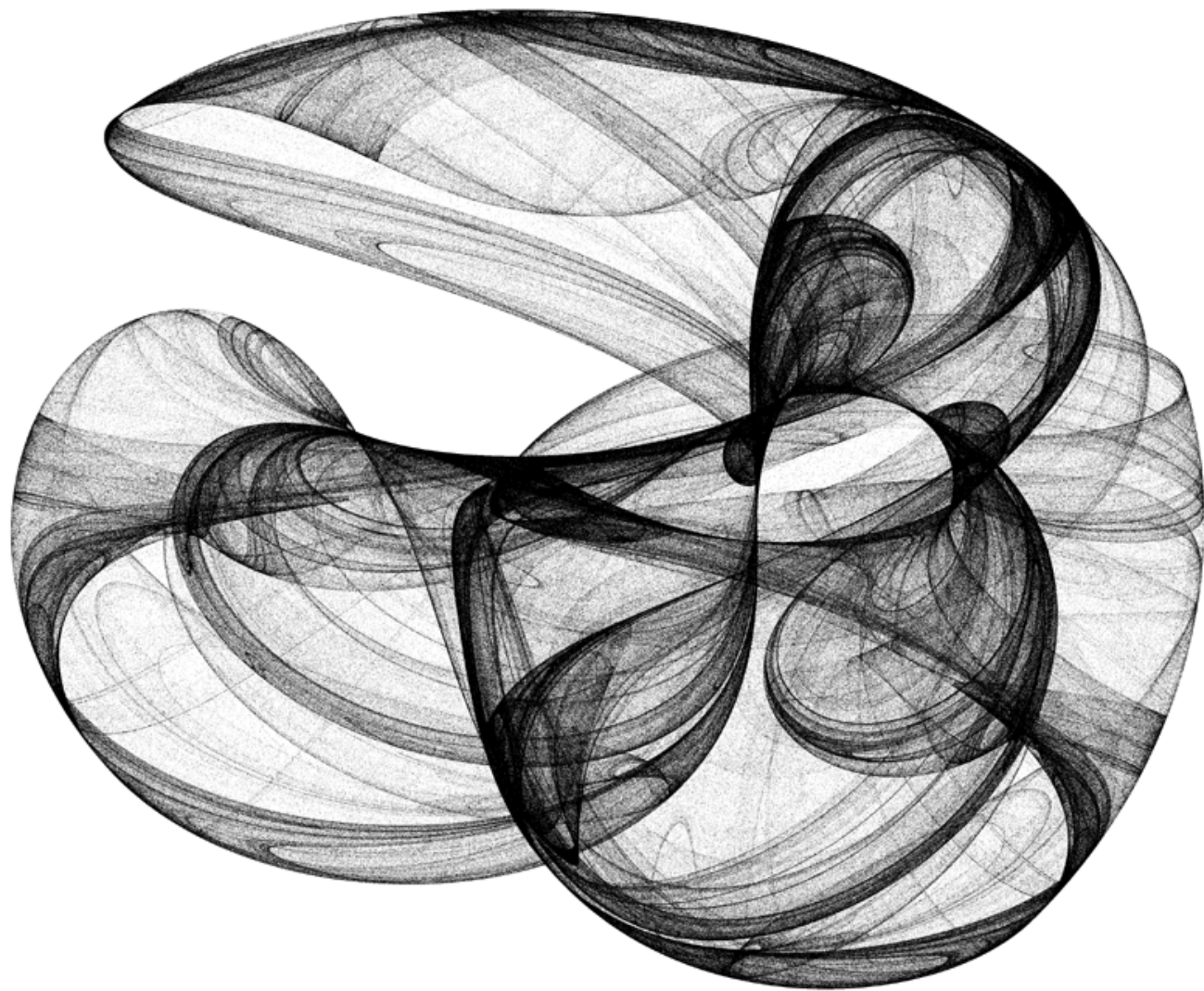
$$y_{n+1} = \sin(b x_n) + d \cos(b y_n)$$

where a, b, c, d

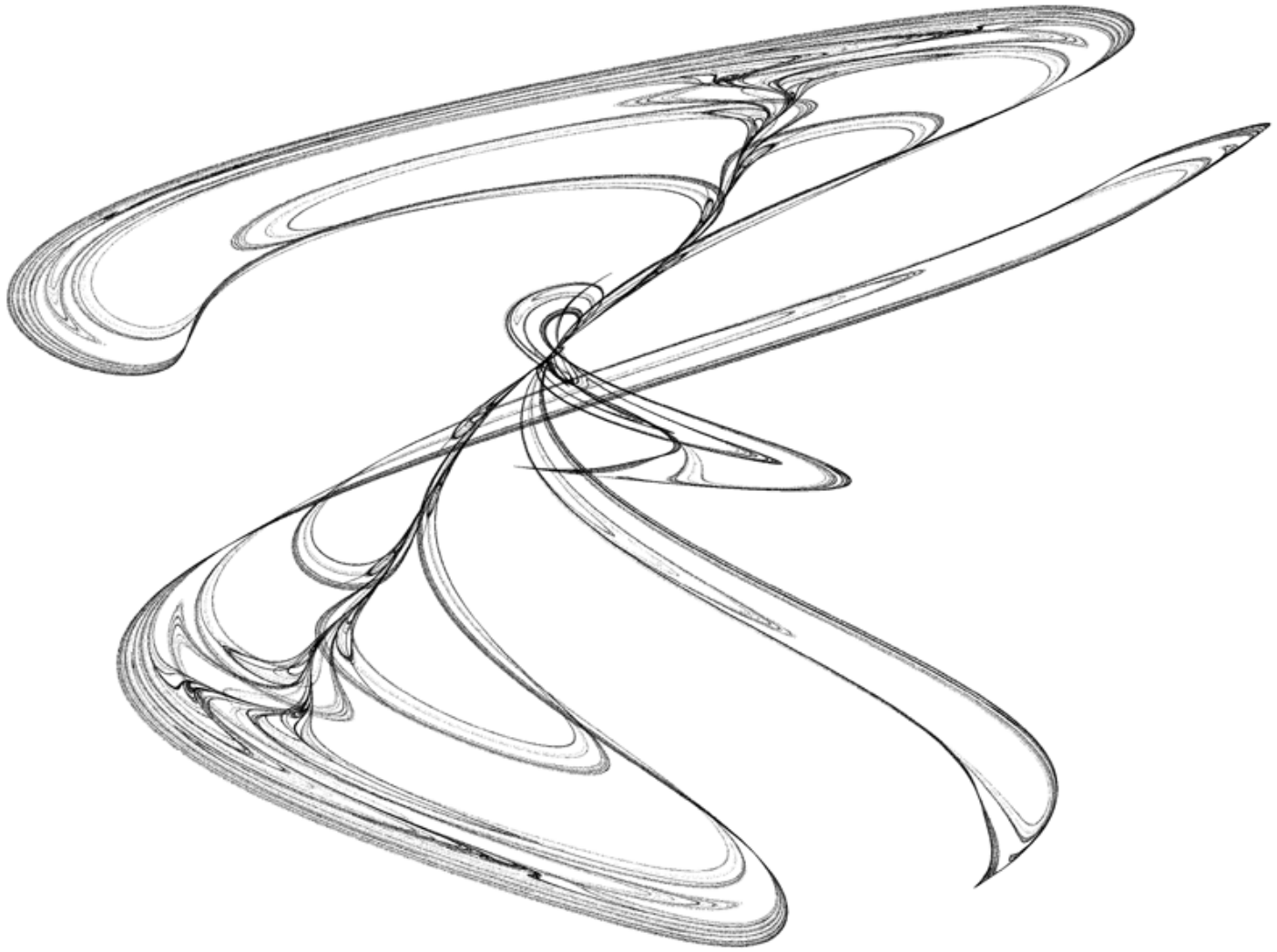
Are parameters that
define each attractor.



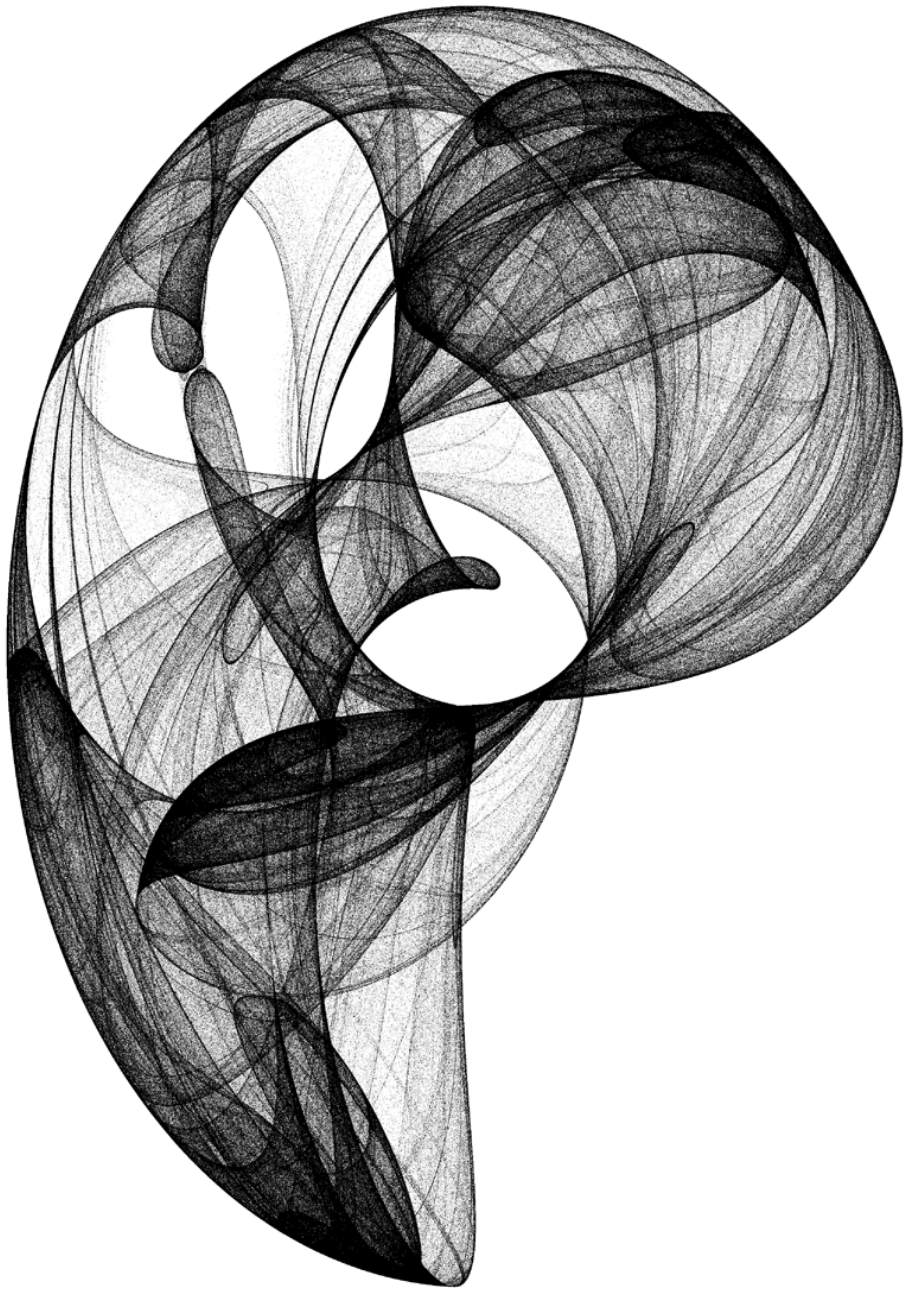
$$a = -1.4, b = 1.6, c = 1.0, d = 0.7$$



$a = 1.1, b = -1.0, c = 1.0, d = 1.5$



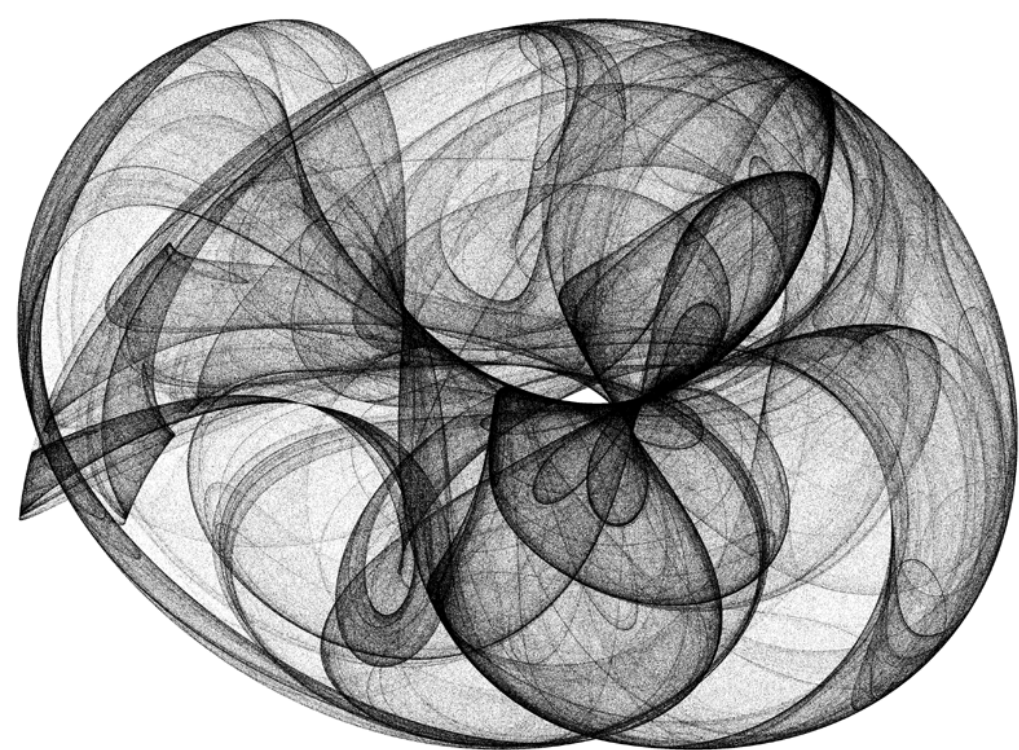
$$a = 1.6, b = -0.6, c = -1.2, d = 1.6$$



$a = 1.7, b = 1.7, c = 0.06, d = 1.2$

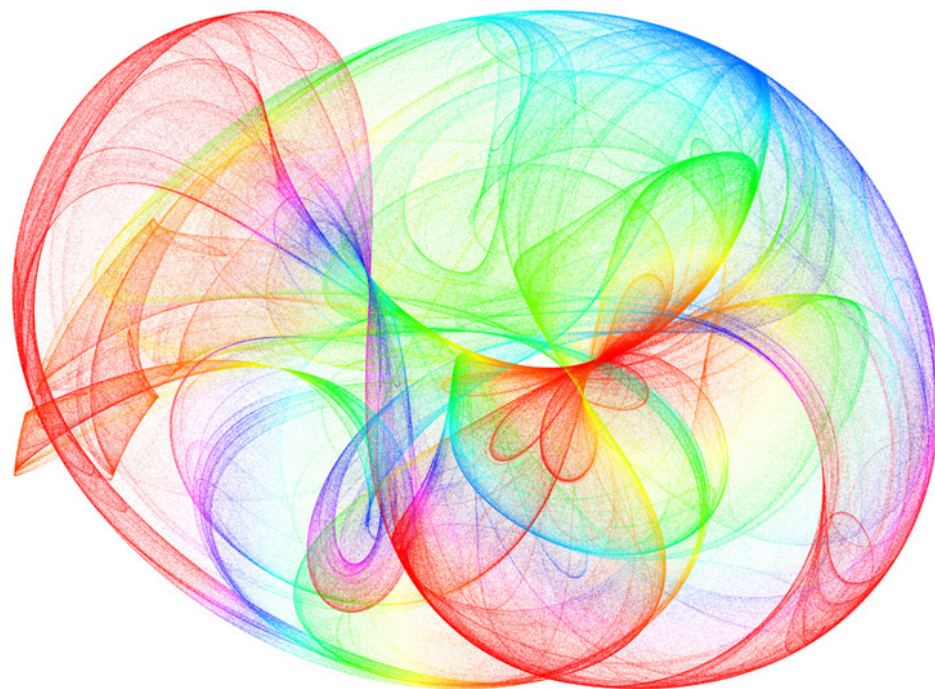


$a = 1.3, b = 1.7, c = 0.5, d = 1.4$



$$a = 1.5, b = -1.8, c = 1.6, d = 0.9$$

Lovely renderings by Thomas Burt.



Let us choose a polynomial of the form:

$$f(x,y) = a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f$$

where a, b, c, d, e, f are constants discussed later and x, y are the usual coordinates in 2-space. The simplest way to turn this polynomial into a map is known as *coordinate rotation* :

$$y_{new} = f(x_{old}, y_{old})$$

$$x_{new} = y_{old}$$

OK, say you, what about those 6 constants? A willy-nilly choice of those will not give you a strange attractor. There may be (probably is) some way to telling if a particular set of constants produces an attractor but, I am not a mathematician, which means I don't really care -- I basically write a program to pick them at random and see what comes out. Most sets diverge, some converge to a point, some converge to a boring loop, and only few produce good-looking pictures. These things are called attractors, not because they're attractive, but because they attract reasonable points

[Here](#) is a short C/C++ program I wrote.

What is a strange attractor?

I, of course, do not know the formal, mathematical, definition of Chaotic Attractors, but I will do my best to correctly guess it. Strange Attractor is a collection of points such that each point is a function of another point What kind of function? Everything from polynomials to transcendentals. Like a randomly-appearing mosaic - instead of individual features appearing one after the other, dots light up and eventually compose distinct shapes.

Chaos and symmetry

Coupled Twisted Logistic: four parameter algebraic map of 4th degree

$$T : \begin{cases} x' = \mu_1 y(1 - y) + \varepsilon_1 (x - y) \\ y' = \mu_2 x(1 - x) + \varepsilon_2 (y - x) \end{cases}$$

COUPL

tran. 500

c.i.

0.400000

0.800000

$\mu_1 = 3.2$ $\mu_2 = 3$; $e_1 = .2$; $e_2 = .3$

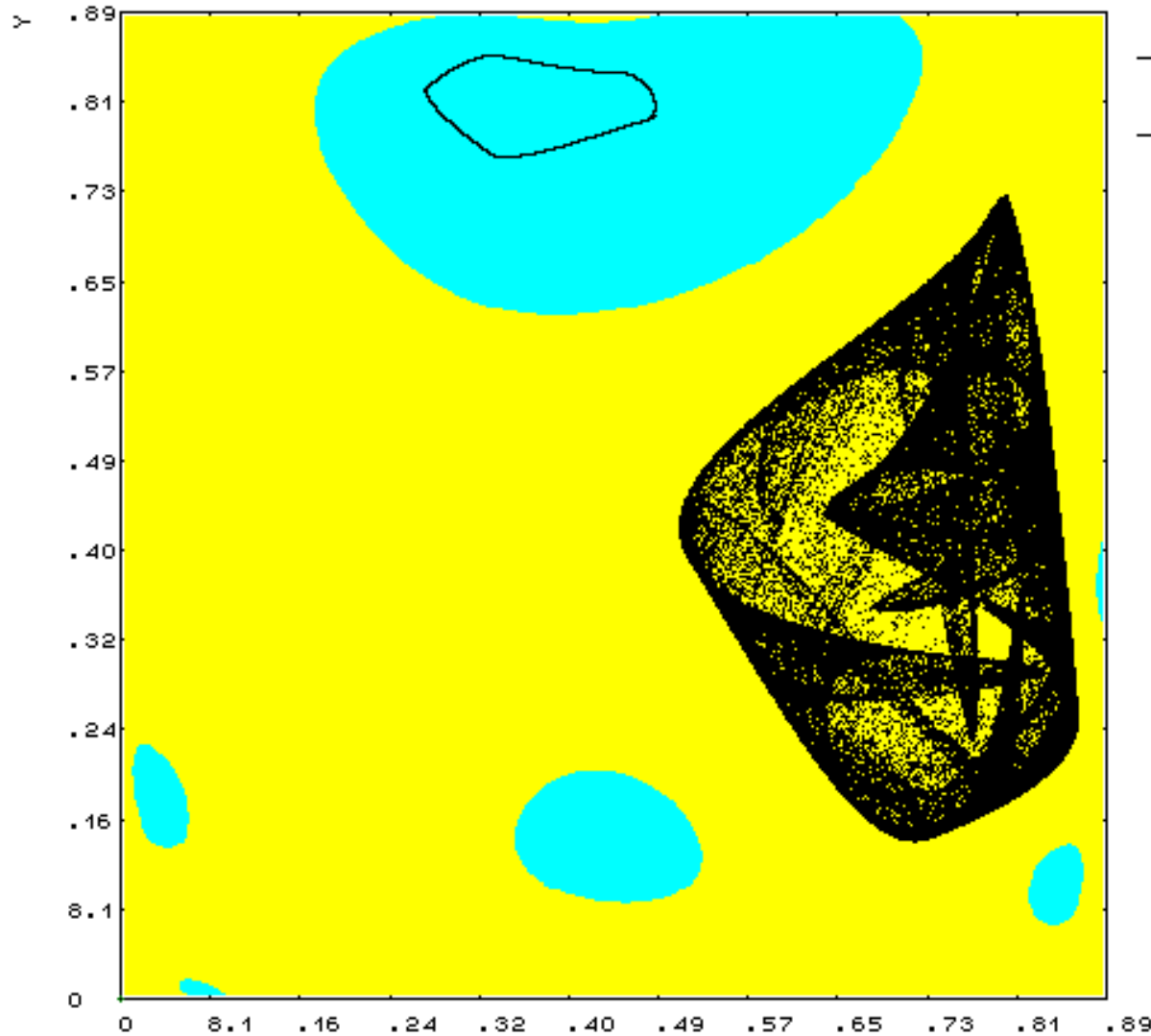
Fixed points
Eigenvalues

0.000000 0.000000
-3.600000 3.200000

0.687500 0.687500
-1.200000 0.800000

0.7530 0.5019
0.8502 0.4827
0.8725 0.2718
0.7535 0.1534
0.5356 0.3771

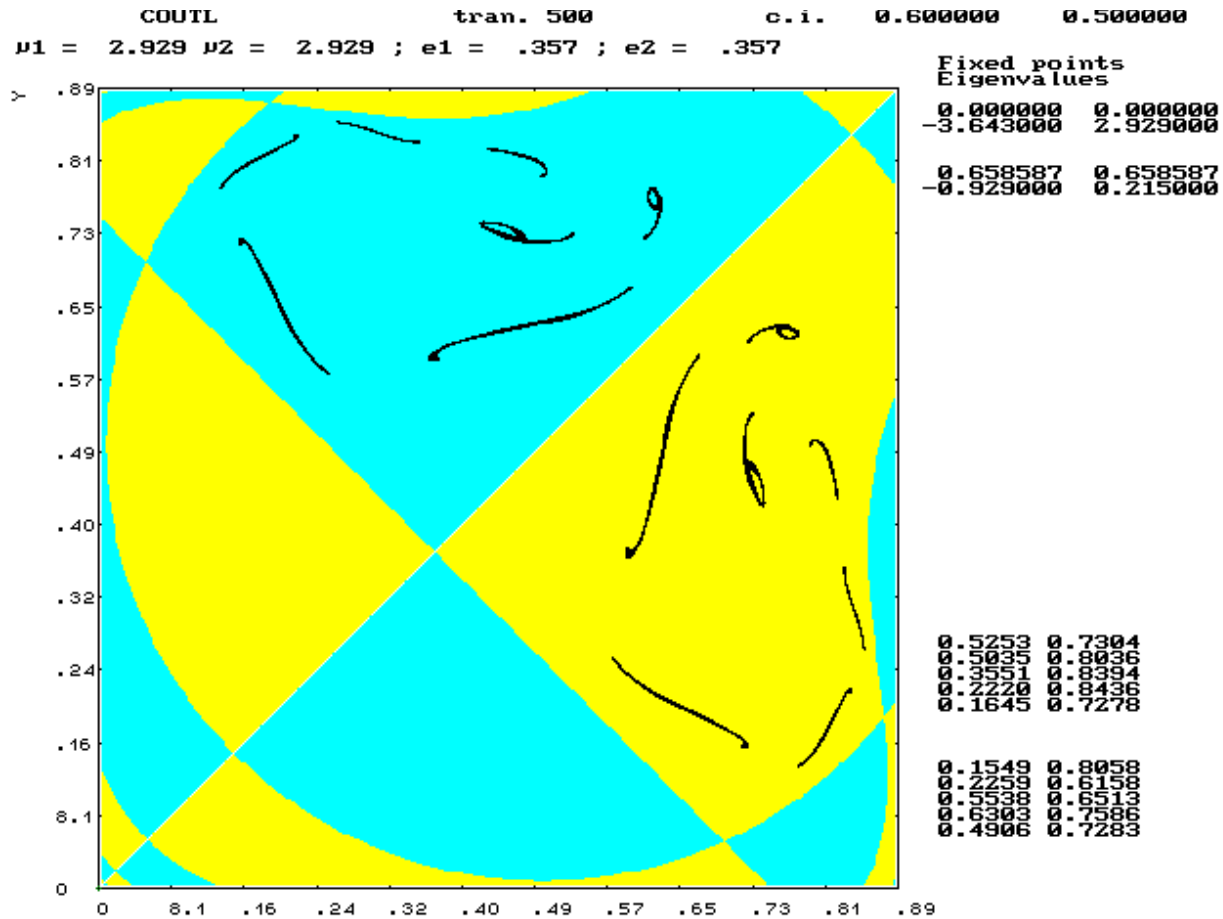
0.8638 0.2456
0.7165 0.1676
0.5562 0.4447
0.8125 0.7071
0.6839 0.4254



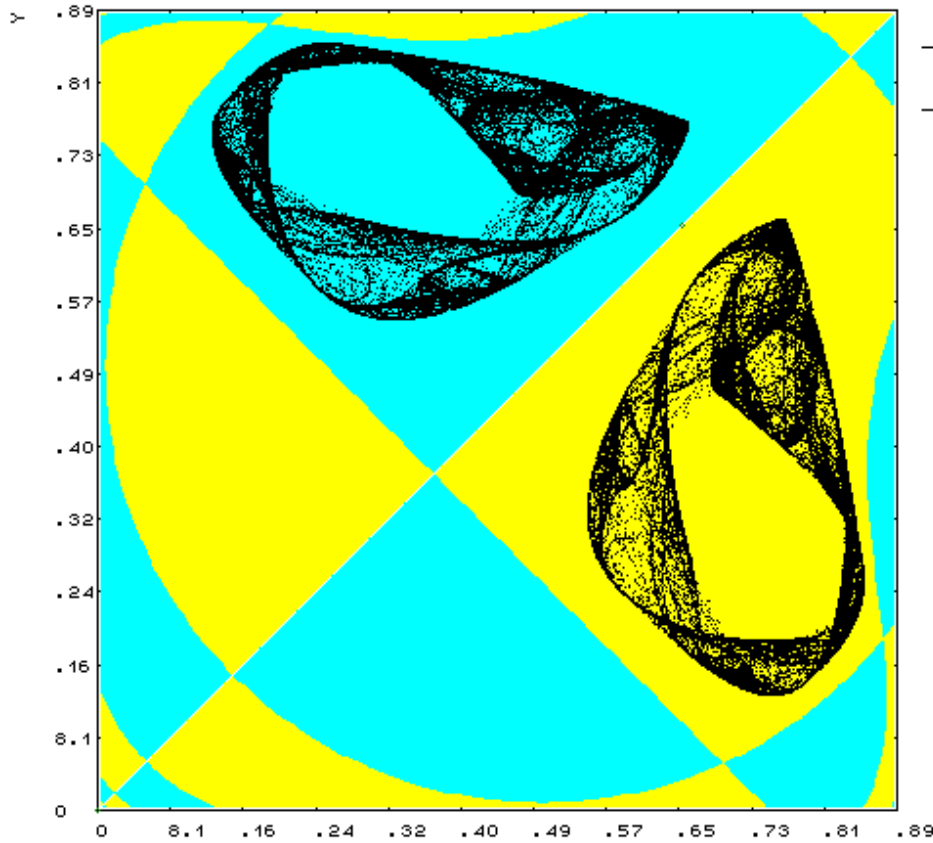
Symmetric case: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$T_s: \begin{cases} x' = \mu y(1 - y) + \varepsilon(x - y) \\ y' = \mu x(1 - x) + \varepsilon(y - x) \end{cases}$$

Coupl simmetrica



COUPL tran. 500 c.i. 0.500000 0.600000
 $\mu_1 = 2.932$ $\mu_2 = 2.932$; $e_1 = .356$; $e_2 = .356$



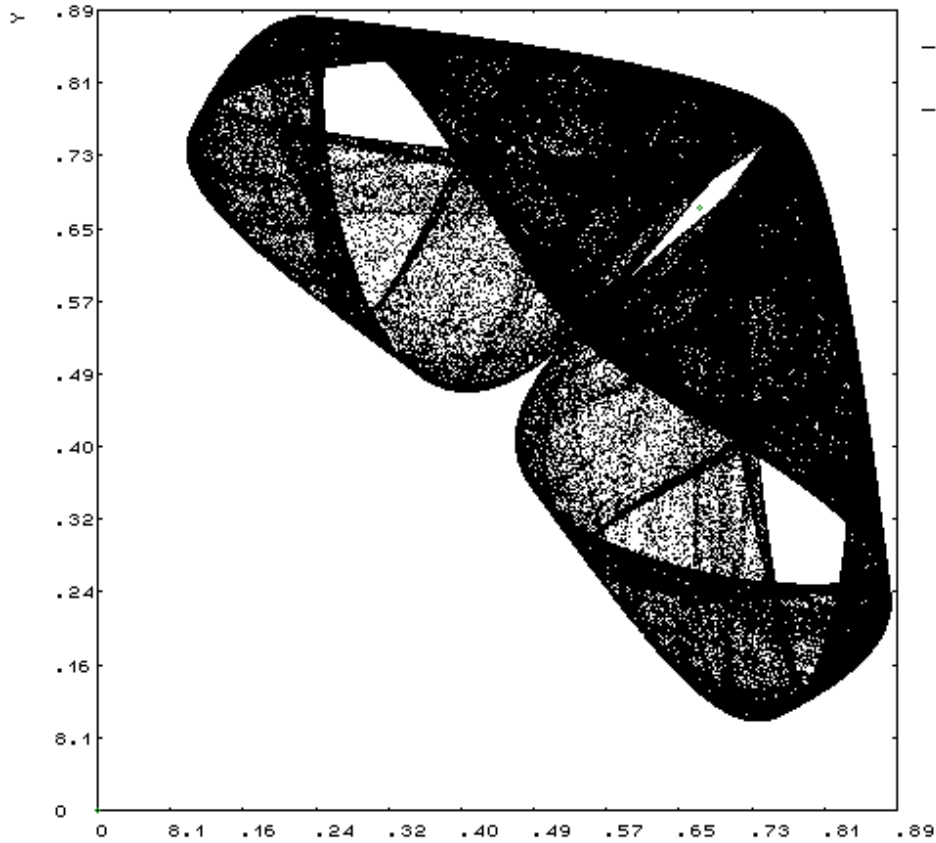
Fixed points
 Eigenvalues
 0.000000 0.000000
 -3.644000 2.932000
 0.658936 0.658936
 -0.932000 0.220000

000000 .150000 0.730000
 000000 .000000 .000000
 000000 .400000 .160000
 000000 .400000 .160000
 000000 .740000 .820000

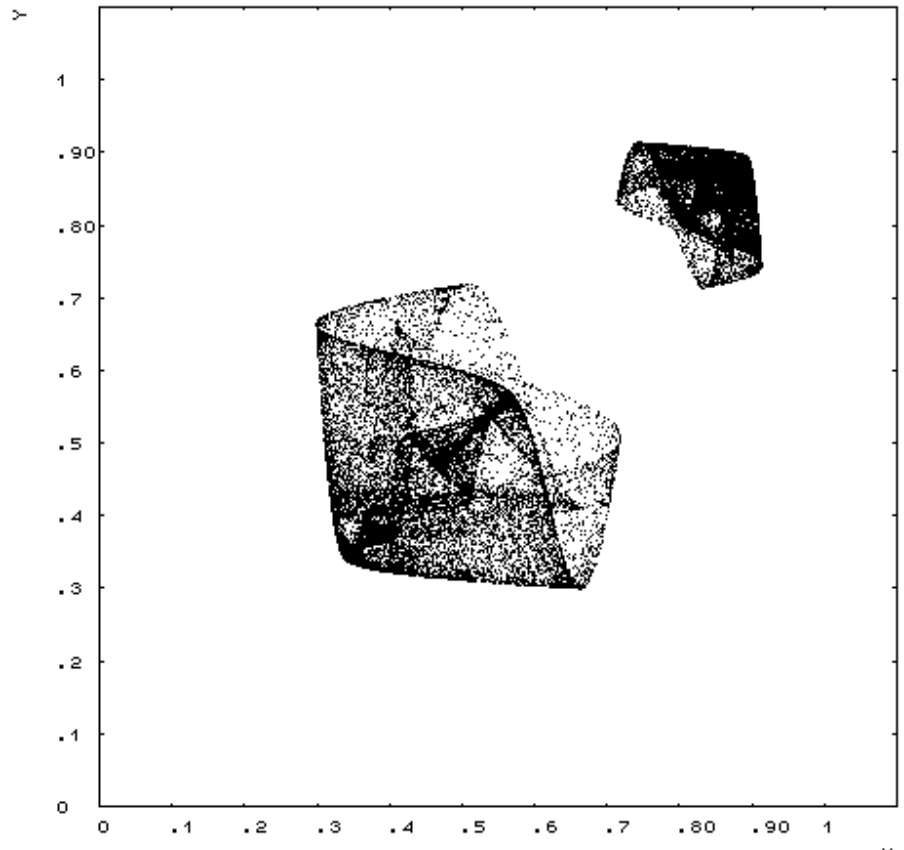
000000 .161000 0.733000
 000000 .000000 .000000
 000000 .400000 .160000
 000000 .400000 .160000
 000000 .740000 .820000

COUPL tran. 500 c.i. 0.500000 0.550000
 $\mu_1 = 3.109$ $\mu_2 = 3.109$; $e_1 = .297$; $e_2 = .297$

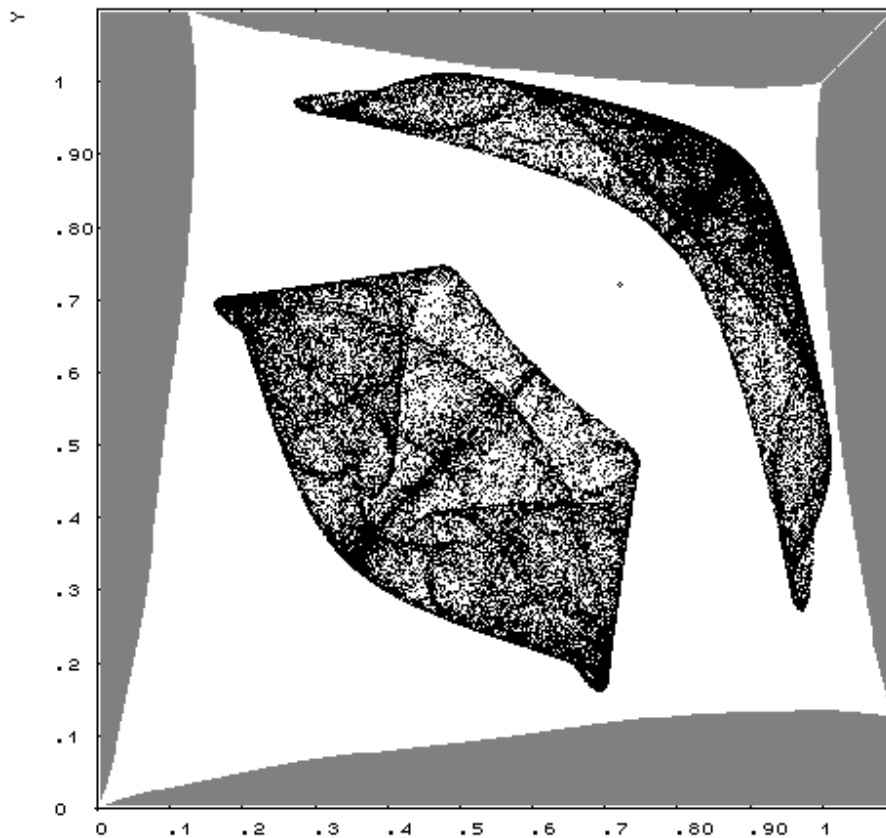
Fixed points
Eigenvalues
0.000000 0.000000
-3.703000 3.109000
0.678353 0.678353
-1.109000 0.515000



tr= 50 c.i. 0.001000 0.001000
 $\mu_1= 3.574805$ $\mu_2= 3.574806$ e1=-.1 e2=-.1

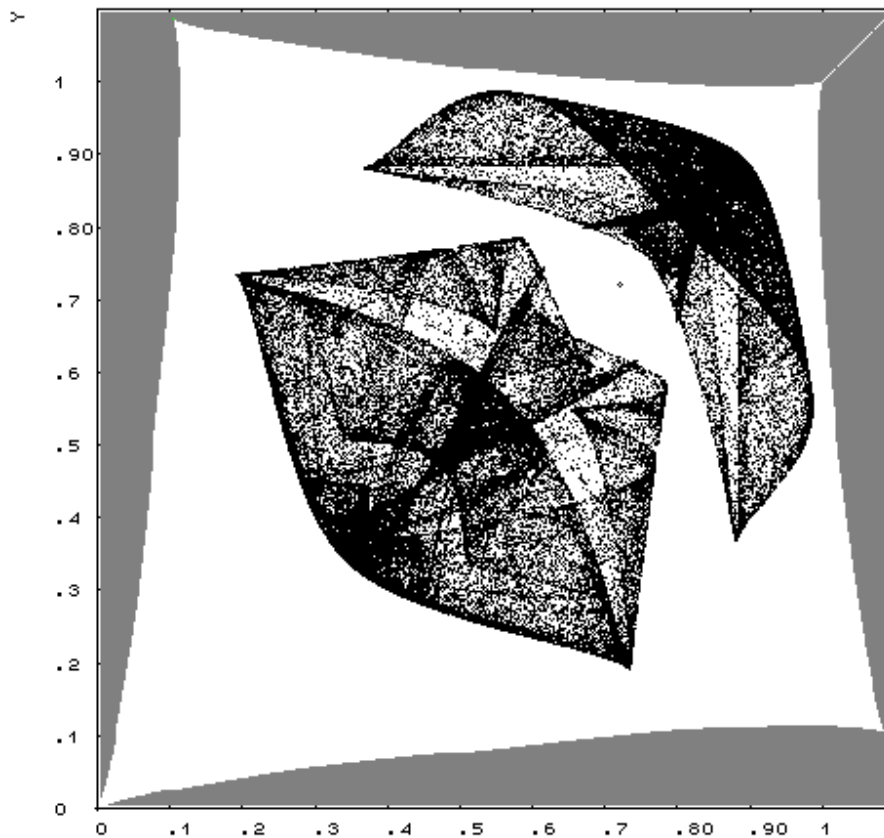


tr= 50 c.i. 0.500000 0.600000
 $\mu_1= 3.570986$ $\mu_2= 3.570986$ $e_1=-.4$ $e_2=-.4$



Fixed points
Eigenvalues
 $\begin{matrix} 0 & 0 \\ -4.370986 & 3.570986 \\ .7199653 & .7199653 \\ -1.570986 & .7709859 \end{matrix}$

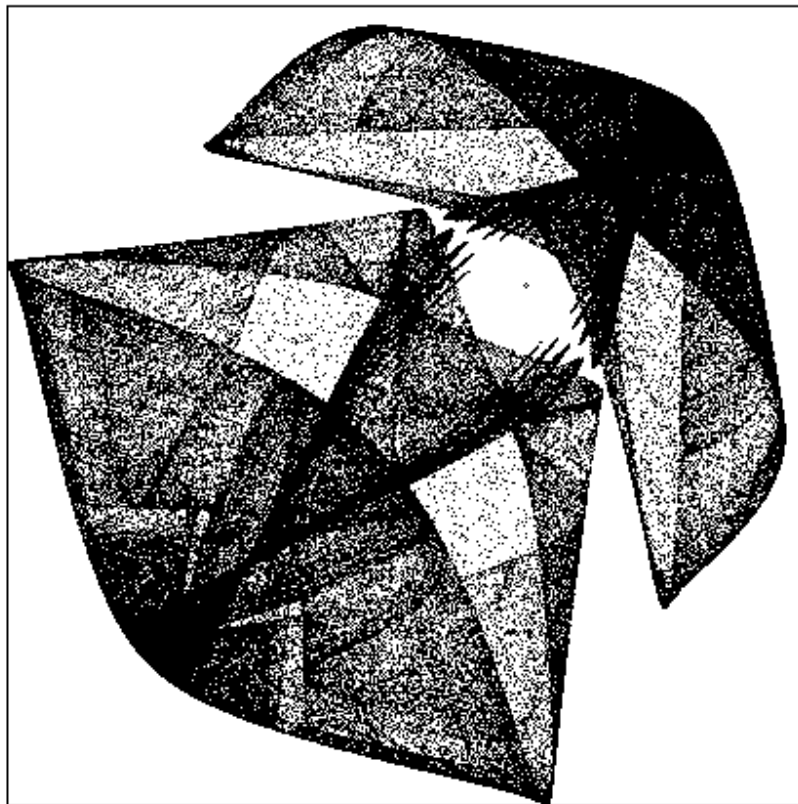
tr= 50 c.i. 0.729965 0.720965
 $\mu_1= 3.570986$ $\mu_2= 3.570986$ e1=-.34 e2=-.34



Fixed points
Eigenvalues
 $\begin{matrix} 0 & 0 \\ -4.250986 & 3.570986 \\ .7199653 & .7199653 \\ -1.570986 & .8909859 \end{matrix}$

tr= 50 c.i. 0.729965 0.720965
 $\mu_1= 3.570986$ $\mu_2= 3.570986$ $e_1=-.322$ $e_2=-.322$

y 1



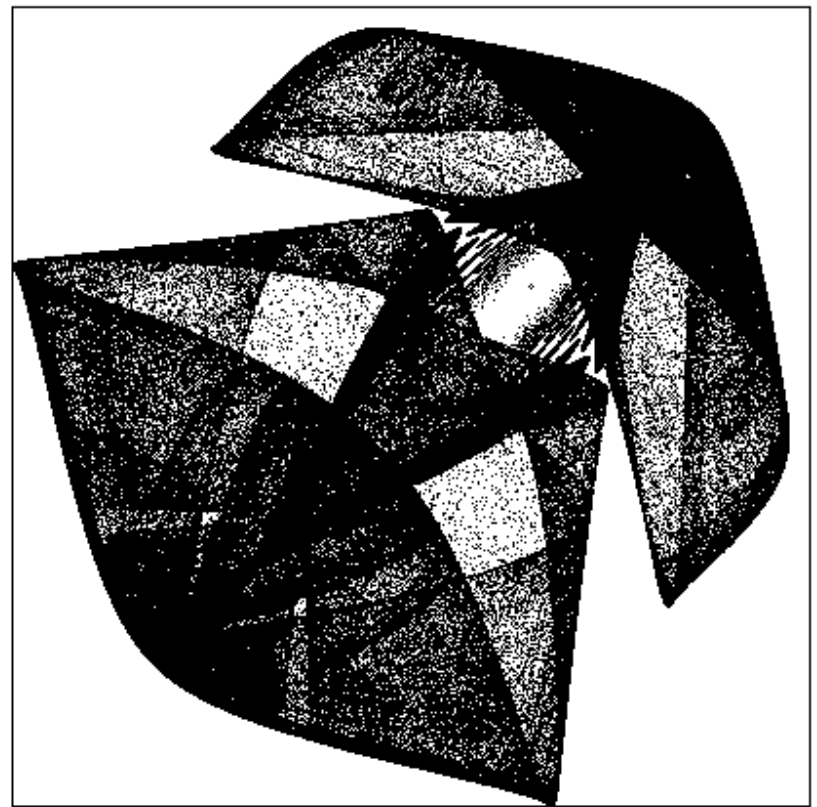
Fixed points
Eigenvalues
 $\overset{\circ}{-}4.214986$ $\overset{\circ}{3.570986}$
.7199653 .7199653
-1.570986 .9269859

.2

1

tr= 50 c.i. 0.729965 0.720965
 $\mu_1= 3.570986$ $\mu_2= 3.570986$ $e_1=-.3205$ $e_2=-.3205$

y 1



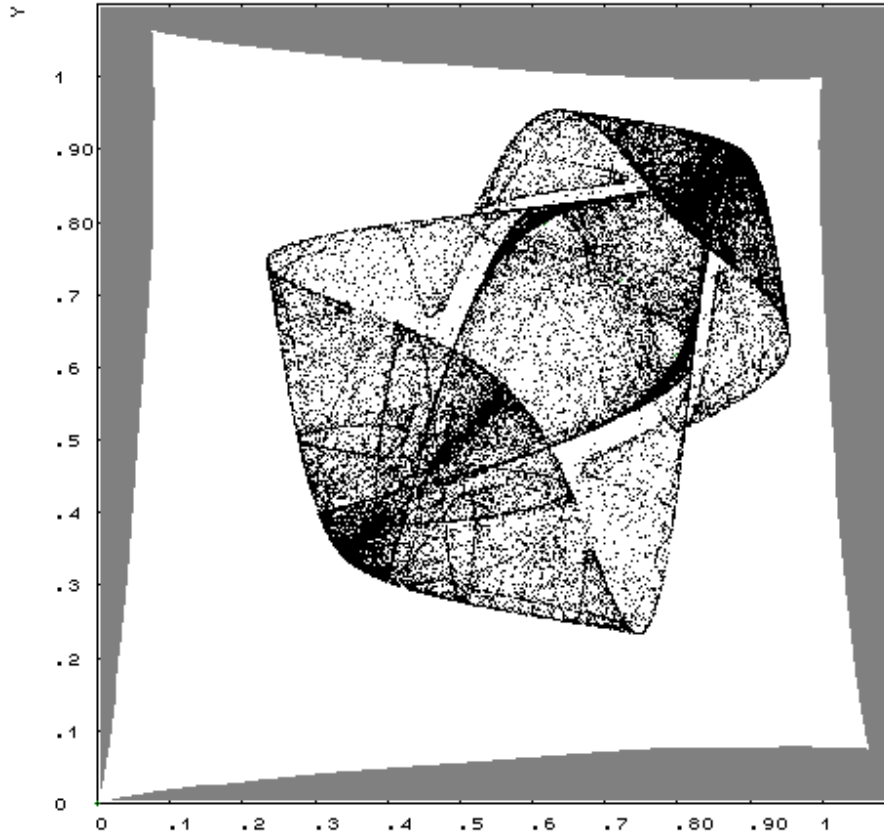
Fixed points
Eigenvalues
 $\begin{matrix} 0 & 0 \\ -4.211986 & 3.570986 \\ .7199653 & .7199653 \\ -1.570986 & .9299859 \end{matrix}$

.2

1

c. i. 0.500000 0.500100

$\mu_1 = 3.574805$ $\mu_2 = 3.574805$ $e_1 = -.245$ $e_2 = -.245$

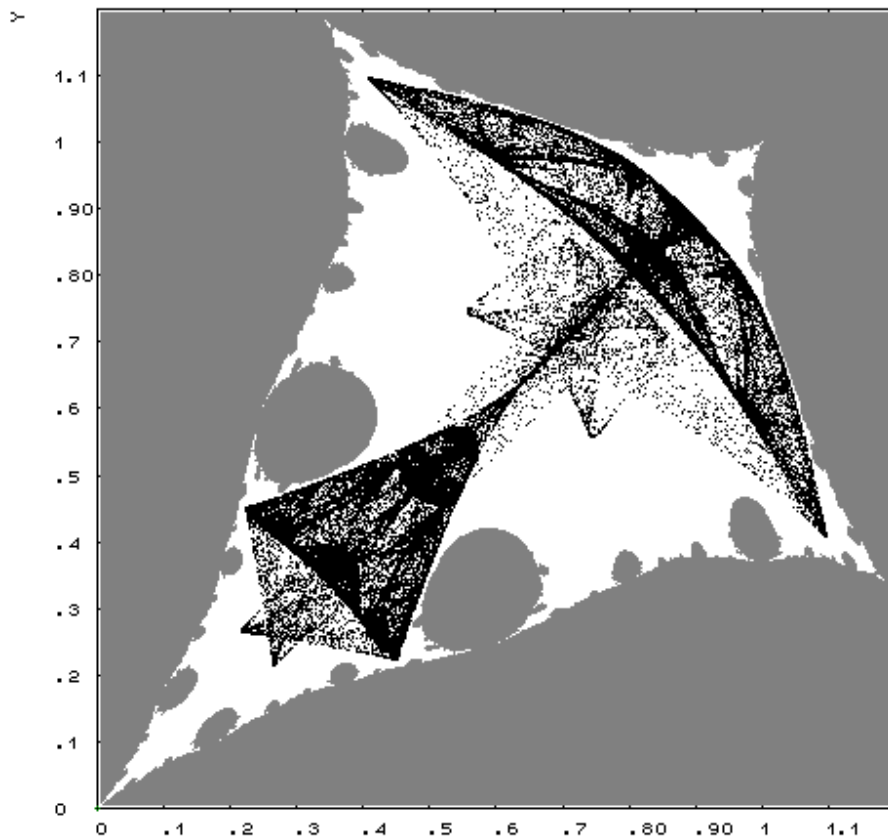


Fixed points
Eigenvalues

$\begin{matrix} 0 & 0 \\ -4.064805 & 3.574805 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} .7202644 & .7202644 \\ -1.574805 & 1.084805 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} .8000693 & .6167367 \\ -1.303539 & .8135389 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} .6167367 & .8000693 \\ -1.303539 & .8135389 \end{matrix}$	

tran. 1000
 $\mu_1 = 3.570986$ $\mu_2 = 3.570986$ $e_1 = -.937$ $e_2 = -.937$

c.i. 0.500000 0.510000



Fixed points
Eigenvalues

0.000000 0.000000
-5.444986 3.570986

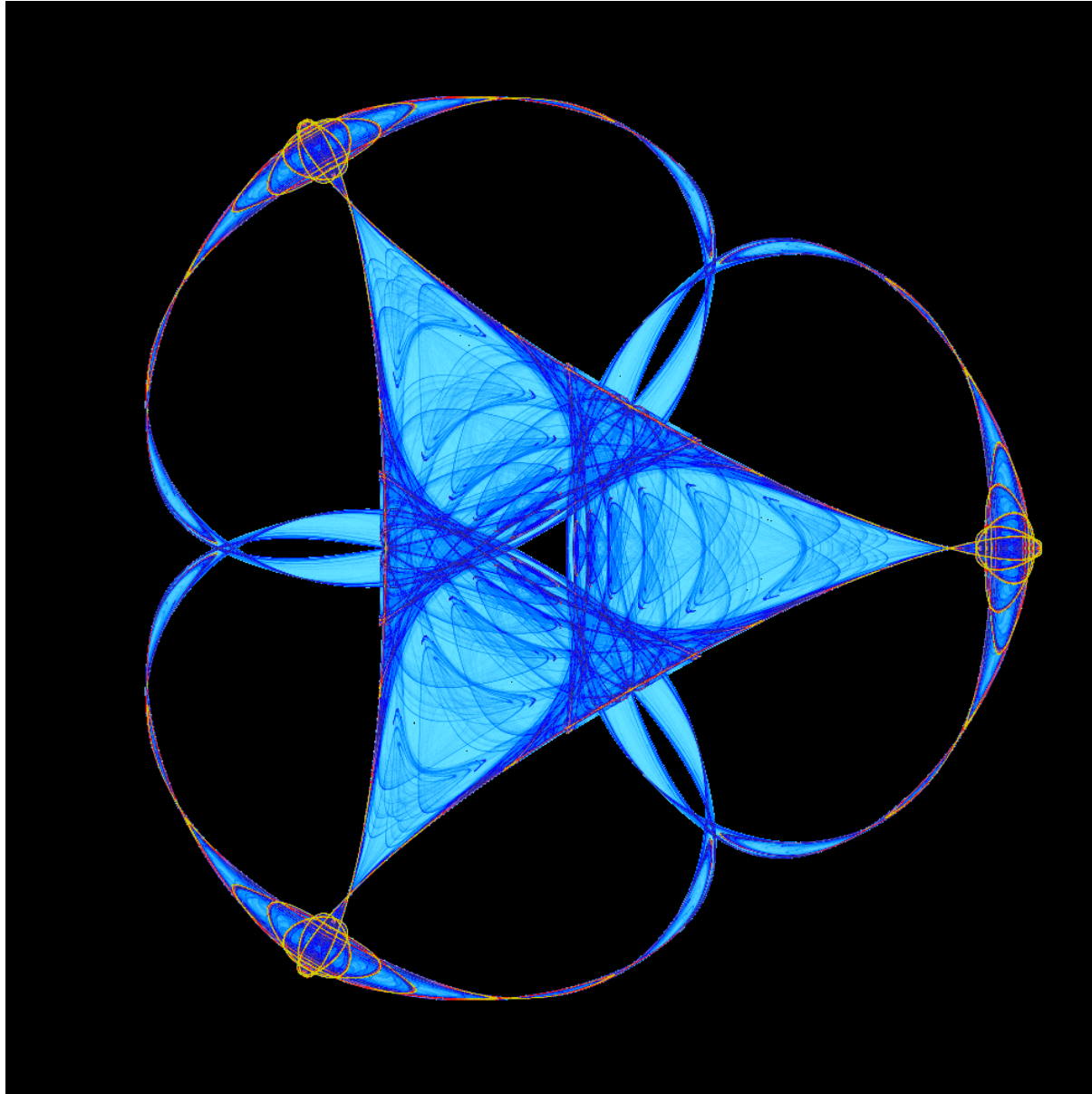
0.719965 0.719965
-1.570986 -0.303014

2-cycle synch.

.4138137 .866221
L -1.60997 T -1.84609

Chaos and Symmetry. Mike Field , Martin Golubitsky,

<http://people.mbi.ohio-state.edu/mgolubitsky/>



Symmetric Icons Program

```
DEFDBL I, P-Q, X-Z
```

```
ON ERROR GOTO errortrap
```

```
DEF fnxpix (x) = nstartx + scalex * (x + scale)
```

```
DEF fnypix (y) = npixelx - scalex * (y + scale)
```

```
GOSUB initialize
```

```
GOSUB menu
```

loops:

```
GOSUB iterate
```

```
x = xnew: y = ynew
```

```
PSET (fnxpix(x), fnypix(y))
```

```
a$ = INKEY$
```

```
IF a$ = "c" THEN iterates = 1: CLS : GOSUB parameters
```

```
IF a$ = "i" THEN GOSUB parameters
```

restart:

```
IF a$ = "m" THEN GOSUB menu
```

```
iterates = iterates + 1
```

```
GOTO loops
```

iterate:

```
zzbar = x * x + y * y
```

```
p = alpha * zzbar + lambda
```

```
zreal = x: zimag = y
```

```
FOR i = 1 TO n - 2
```

```
za = zreal * x - zimag * y
```

```
zb = zimag * x + zreal * y
```

```
zreal = za: zimag = zb
```

```
NEXT i
```

```
zn = x * zreal - y * zimag
```

```
p = p + beta * zn
```

```
xnew = p * x + gamma * zreal - omega * y
```

```
ynew = p * y - gamma * zimag + omega * x
```

```
RETURN
```

menu:

```
GOSUB parameters
```

```
PRINT USING "(X,y) = ##.##### ##.#####"; x; y
```

```
PRINT "Scale =", scale
```

```
PRINT "ESC to exit program"
```

```
PRINT "R for RETURN"
```

CLS

```
GOTO menu
```

initialize:

```
CLS
```

```
scale = 1!
```

```
nscreen = 12: npixelx = 640: npixelx = 480
```

```
nstartx = 160
```

```
SCREEN nscreen
```

```
GOSUB setscreen
```

```
x = .01: y = .003: n = 4: iterates = 1
```

```
lambda = -1.8: alpha = 2: beta = 0: gamma = 1!: omega = 0
```

```
RETURN
```

initialpoint:

```
CLS
```

```
PRINT "Enter r to reset coordinates automatically"
```

```
PRINT "Enter x to INPUT coordinates"
```

setscreen:

```
CLS
```

```
scaley = npixelx / (2 * scale)
```

```
scalex = (npixelx - nstartx) / (2 * scale)
```

```
RETURN
```