

INVITO A:

Sistemi dinamici e caos deterministico

di

Gian Italo Bischi

Rosa Carini

Laura Gardini

Paolo Tenti

Negli ultimi venti anni, si è parlato molto dei metodi e dei risultati matematici che hanno portato alla definizione di *caos deterministico*. Questi risultati sono stati ottenuti nell'ambito di quel settore della Matematica noto come *Teoria qualitativa dei sistemi dinamici* e sono stati stimolati dall'esigenza di rappresentare, mediante modelli matematici, i sistemi reali che evolvono nel tempo come il moto dei pianeti, le oscillazioni di un pendolo, il flusso delle correnti atmosferiche, lo scorrere più o meno regolare dell'acqua in un fiume, il numero di insetti che anno dopo anno popolano una certa regione, l'andamento giornaliero dei prezzi delle azioni nei mercati finanziari e così via.

L'apparente contraddizione (o paradosso) contenuto nel termine *caos deterministico*, ha molto incuriosito anche il pubblico dei non specialisti. I modelli matematici di tipo *deterministico* vengono in genere associati all'idea di fenomeni regolari, prevedibili, che si ripetono nel tempo, mentre il termine *caotico* viene riferito a situazioni caratterizzate da assenza di regole e da imprevedibilità. La scoperta del caos deterministico spezza questa dicotomia, in quanto mostra come modelli matematici deterministici (cioè privi di ogni elemento aleatorio nelle equazioni che li definiscono) sono in grado di generare andamenti estremamente complessi, sotto molti aspetti imprevedibili, tanto da risultare quasi indistinguibili da sequenze di eventi generati attraverso processi aleatori.

Scopo di questo articolo è di descrivere a grandi linee lo sviluppo storico e introdurre un minimo di terminologia della teoria dei sistemi dinamici, facendo in particolare riferimento alla sua trattazione più moderna, nota come *qualitativa* (o *topologica*).

La teoria dei sistemi dinamici è stata anche chiamata la *Matematica del tempo*. In effetti, anche nel linguaggio comune, il termine *dinamico* si riferisce a processi che producono cambiamenti, ossia evolvono nel corso del tempo. Cerchiamo quindi di capire come si può simulare, matematicamente, l'evoluzione temporale di un sistema reale.

Innanzitutto, occorre individuare un certo numero di grandezze *misurabili*, cioè espresse mediante numeri reali x_1, x_2, \dots, x_n , che permettano di identificare lo stato ossia la configurazione ad un certo istante t , del sistema che si vuol esaminare. Tali grandezze sono dette *variabili di stato*. L'insieme dei loro valori definisce univocamente lo stato del sistema ad un dato istante t , espresso dal vettore a n componenti:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

In molti problemi di Meccanica, lo "stato del sistema" in un dato istante è determinato dall'insieme delle posizioni e delle velocità dei corpi che lo costituiscono. Ad esempio, per un pendolo che oscilla, lo stato ad un certo istante è dato dall'angolo della cordicella rispetto alla verticale e dalla velocità della pallina ad essa appesa. In un ecosistema, lo stato può essere caratterizzato assegnando il numero di individui per ciascuna specie animale che ne fa parte; in un mercato finanziario, i prezzi delle azioni. Pertanto, a prescindere dalla natura del sistema considerato, il suo stato ad un certo istante viene rappresentato da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che, com'è noto, può essere pensato come un punto geometrico riferito agli assi di un riferimento cartesiano, in cui le coordinate corrispondono ai valori delle variabili di stato. Così, lo stato di una popolazione di insetti può essere rappresentato in uno spazio unidimensionale (una semiretta, dato che la numerosità della popolazione può assumere solo valori non negativi). Lo stato di un pendolo semplice è rappresentato da un punto in uno spazio bidimensionale (un piano cartesiano) riportando sugli assi il valore dello spostamento angolare rispetto alla verticale e il valore della velocità angolare. Lo stato di un sistema ecologico, in cui sono presenti 4 specie, è rappresentato da un punto in uno spazio a 4 dimensioni. Lo stato di un mercato finanziario è un punto, in uno spazio le cui dimensioni sono tante quanti i titoli trattati. L'insieme di tutti i possibili vettori di stato è detto *spazio delle fasi* del sistema dinamico.

La variabile t , utilizzata per misurare il tempo che scorre, può essere pensata come un numero reale e allora diremo che il tempo varia in modo continuo, cioè senza

salto (come se fosse misurato con un orologio analogico) oppure come un numero naturale, cioè $t = 0, 1, 2, \dots$ e diremo allora che il tempo varia in modo discreto, assumendo valori multipli di una data unità di misura, che potrebbe essere un'ora, un giorno o un anno, a seconda del sistema che si sta descrivendo. Nel primo caso si parla di sistemi dinamici a tempo *continuo*; nel secondo, a tempo *discreto*.

Quale delle due rappresentazioni sia più adatta a descrivere un sistema reale, dipende dalla situazione che si sta analizzando. Ad esempio, nella descrizione del moto di un pendolo o dello scorrere dei fluidi, si usano sistemi a tempo continuo mentre, nella descrizione dell'andamento temporale di una popolazione di insetti, caratterizzati da stagioni riproduttive, si usano sistemi a tempo discreto con unità di tempo pari all'intervallo che intercorre fra due generazioni successive.

Da un punto di vista formale, conoscere un sistema dinamico significa conoscere una funzione che (una volta assegnato il vettore di stato \mathbf{x}_0 , ad un dato istante iniziale t_0) permetta di determinare univocamente lo stato del sistema ad ogni istante di tempo successivo:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t_0, \mathbf{x}_0; t).$$

Data una *condizione iniziale* $\mathbf{x}_0(t_0)$, l'insieme di tutti i valori $\mathbf{x}(t)$, ottenuti mediante l'applicazione della funzione Φ , costituisce la *traiettoria* del sistema dinamico passante per la condizione iniziale assegnata. In pratica, conoscere le traiettorie significa poter calcolare lo stato del sistema ad un qualunque istante futuro, sulla base della conoscenza dello stato ad un certo istante. In un sistema dinamico a tempo continuo, una traiettoria può essere pensata come una curva nello spazio *n-dimensionale* delle fasi mentre, in un sistema dinamico a tempo discreto, una traiettoria è costituita da una successione di punti.

In realtà, non è affatto facile conoscere l'operatore Φ , ma si cerca di risalire ad esso attraverso la formulazione di leggi di evoluzioni locale o *equazioni del moto*. Nel caso di modelli a tempo continuo, le leggi del moto sono espresse mediante *equazioni differenziali*, che descrivono come la rapidità di variazione di ciascuna variabile di stato (espressa dalla derivata prima rispetto al tempo) dipenda da se stessa e dalle altre variabili:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, \dots, n.$$

Solo nei casi più semplici si può arrivare ad ottenere la soluzione generale del problema che verifica le condizio-

ni iniziali assegnate, ovvero la funzione Φ . Ad esempio, consideriamo l'equazione differenziale lineare:

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. La soluzione è:

$$x(t) = x_0 \exp[r(t-t_0)].$$

In altre parole, partendo da una legge locale, in base alla quale il tasso di variazione di una variabile è proporzionale al valore della variabile stessa, come accade ad esempio nei modelli di crescita di una popolazione (con $r > 0$) o di decadimento radioattivo (con $r < 0$), si ottiene in forma esplicita l'operatore di evoluzione temporale che prevede, rispettivamente, una crescita o un decadimento esponenziale.

Un altro esempio famoso è quello di un oscillatore armonico (ad esempio, un corpo appeso a una molla) la cui equazione del moto è espressa dalla seconda legge della dinamica *massa per accelerazione = forza*, che diventa un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

dove la variabile x rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio della molla e $-kx$ è la forza elastica di richiamo. Questo modello si presenta in una forma diversa poiché contiene la derivata seconda, ma può essere trasformato introducendo, come seconda variabile di stato, la velocità istantanea $v = \frac{dx}{dt}$ e ottenendo così un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x.$$

Anche in questo caso è possibile risalire all'espressione analitica della traiettoria: se assumiamo che il corpo parta da fermo, con uno spostamento iniziale x_0 rispetto alla posizione di equilibrio, cioè prendiamo come condizione iniziale $(x(0), v(0)) = (x_0, 0)$, allora la soluzione è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Questa soluzione può essere rappresentata graficamente riportando l'andamento di ciascuna delle due variabili $x(t)$ e $v(t)$ in funzione del tempo (come in Fig. 1A) oppure riportando, per ogni t , i valori di $x(t)$ e $v(t)$ sul piano cartesiano (x, v) , come in Fig. 1B. Quest'ultima rappresentazione è detta *curva di fase* o *orbita*.

In questi esempi, la facilità ad ottenere le soluzioni in forma analitica è legata al fatto che abbiamo ottenuto equazioni differenziali lineari, in cui cioè i secondi mem-

bri erano polinomi di primo grado nelle variabili di stato. Se si considerano *modelli non lineari*, come spesso accade nella descrizione dei sistemi reali, trovare una soluzione in forma analitica è in genere un'impresa difficile, spesso impossibile.

Analoghe considerazioni valgono anche per modelli dinamici a tempo discreto. In questo caso, preso come unità di misura l'intervallo temporale scelto per scandire il tempo, la legge del moto viene rappresentata sotto forma di *equazioni alle differenze*:

$$x_i(t+1) = f_i(x(t)).$$

Figura 1

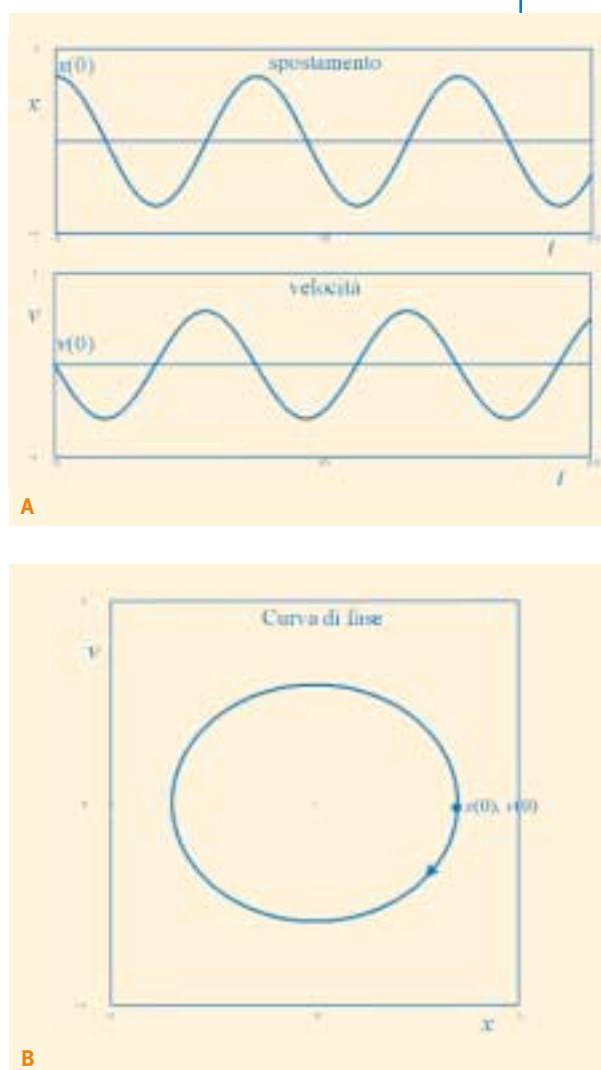




Figura 2

Partendo dalla condizione iniziale, l'intera traiettoria si può ottenere *induttivamente*: da $\mathbf{x}(0)$ si ottiene $\mathbf{x}(1)$, il quale può essere preso come nuovo argomento delle funzioni f_i per ottenere $\mathbf{x}(2)$ e così via, come visualizzato in Fig.2. Ovviamente, questo *procedimento iterativo* si basa sull'ipotesi che ciascuna funzione f_i abbia come dominio l'insieme M degli stati possibili e che anche i codomini delle f_i non escano dallo spazio degli stati, in modo che sia possibile applicare di nuovo le funzioni f_i alle variabili di stato. L'esempio più semplice è l'iterazione di una funzione (o *mappa*) lineare:

$$x(t+1) = a x(t).$$

Partendo dalla condizione iniziale $x(0)$, si ottiene:

$$x(1) = a x(0); x(2) = a x(1) = a^2 x(0); \dots x(t) = a x(t-1) = a (a^{t-1}) x(0) = a^t x(0).$$

Dalla conoscenza esplicita della successione $x(t) = a^t x(0)$, detta *progressione geometrica* di ragione a , è possibile il calcolo diretto dello stato dopo n intervalli temporali in base alla conoscenza dello stato iniziale. Inoltre, si deduce in modo immediato il comportamento asintotico, per $t \rightarrow \infty$, della traiettoria: per $|a| < 1$, $x(t)$ converge a 0; per $|a| > 1$, $x(t)$ diverge. Inoltre, se è $a < 0$, l'andamento è di tipo oscillatorio; mentre se $a > 0$, si ha una successione monotona.

rale sarà estremamente ingombrante e in pratica impossibile da scrivere. Non è facile, quindi, capire il comportamento *asintotico* delle traiettorie, cioè quale sarà il loro destino al crescere di t .

Con queste premesse formali, siamo ora in grado di dare la seguente definizione: *la teoria dei sistemi dinamici è l'insieme dei metodi matematici attraverso i quali si cercano di ottenere, in maniera più o meno esplicita, informazioni sull'operatore di evoluzione temporale Φ partendo da una sua rappresentazione locale (o legge del moto) assegnata in forma di equazioni differenziali o alle differenze.*

Non si tratta di un settore della Matematica particolarmente recente. La sua nascita può essere fatta risalire a Newton, il quale (in una lettera inviata a Leibnitz nel 1677) scrisse che aveva trovato un metodo di lavoro importante, che non poteva rivelare in modo palese. Infatti, lo fece proponendogli un anagramma, in una forma quasi impossibile da decifrare. La frase decodificata, diventata famosa con il nome di anagramma fondamentale del Calcolo, è la seguente: "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*", che significa: "Data un'equazione che con-

"Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i "meccanismi del mondo reale". Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici. Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos. Terza cosa, sembravano voler fare di tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale"

Da: "Jurassic Park" di Michael Crichton (1991).

Ma la situazione non è così semplice, se si considerano leggi del moto non lineari. Infatti, iterando una generica funzione f partendo da una condizione iniziale (o *punto seme*) $x(0)$, si ottiene:

$$x(1) = f(x(0)); x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)); \dots, x(t) = f(f(x(t-1))) = f^t(x(0)) \text{ dove } f^t \text{ rappresenta la funzione } f \text{ composta con se stessa } t \text{ volte, espressione che in gene-}$$

tiene un numero qualunque di quantità fluenti [oggi, diremmo derivate] trovare le flussioni [oggi, diremmo le primitive] e viceversa".

Ovviamente, il metodo divenne poi patrimonio comune e strumento privilegiato per lo studio dei sistemi naturali che evolvono nel tempo, tanto che Pierre Simon de Laplace, nel 1776, ipotizzava l'esistenza di un sistema

E POINCARÉ DOVETTE PAGARE

Il re di Svezia e Norvegia, Oscar II, appassionato fin da giovane per lo studio della Matematica, istituì un premio da assegnare in occasione del suo sessantesimo compleanno (il 21 gennaio 1889) a chi avesse risolto un importante quesito nel campo dell'Analisi matematica. A tale scopo incaricò un matematico svedese, Gösta Mittag Leffler, di nominare una commissione per proporre i quesiti e per la successiva assegnazione del premio. Di questa commissione fecero parte, oltre a Mittag Leffler, il francese Charles Hermite e il tedesco Karl Weierstrass.

Uno dei quesiti richiedeva di studiare il sistema dinamico che descrive il moto di n corpi soggetti alle reciproche attrazioni esercitate dalla forza di gravità, arrivando quindi a dimostrare in modo rigoroso la stabilità del sistema solare.

Henri Poincaré – a quel tempo matematico già affermato, sebbene non al culmine della propria fama – partecipò al concorso, anche se si rendeva conto che il problema era ben lungi dal poter essere risolto nella sua generalità. Per questo si limitò ad affrontare un caso ridotto, il problema di 3 corpi, che si presentava già così complicato da indurlo a rinunciare ad ottenere una soluzione esatta. Per questo affrontò il problema mediante un'analisi qualitativa o geometrica. In altre parole, cercò di determinare, nello spazio delle fasi in cui le traiettorie erano confinate, l'esistenza di punti di equilibrio o di soluzioni periodiche (i cosiddetti *cicli limite*) e loro proprietà di stabilità. Per effettuare questo tipo di analisi, Poincaré ideò un nuovo modo di affrontare i problemi geometrici – da lui denominato *Analysis situs* – che sarebbe poi diventata l'odierna *Topologia* (detta anche *geometria del foglio di gomma*, in quanto analizza le proprietà geometriche che si conservano in seguito a deformazioni continue, senza strappi né sovrapposizioni).

Nonostante il suo elaborato non fornisse una soluzione al quesito posto, Poincaré vinse il premio in quanto, come scrisse la commissione nel suo giudizio, il suo lavoro introduceva "metodi che aprono una nuova epoca nella Meccanica celeste". Di fatto, quell'elaborato non solo segnava la nascita della teoria qualitativa dei sistemi dinamici, ma questa veniva sviluppata fino ad ottenere la prima chiara formulazione del concetto di *caos deterministico*, anche se ciò non avvenne subito. Infatti, la storia ha un curioso epilogo.

Durante la stampa dell'elaborato vincitore del concorso, un giovane matematico notò qualcosa che non andava bene e questo costrinse Poincaré a riprendere in esame il manoscritto. Ben presto si accorse di un errore, che aveva conseguenze serie su alcuni dei risultati ottenuti. Quando lo comunicò a Mittag Leffler, si creò una situazione alquanto imbarazzante: chi avrebbe avuto il coraggio di comunicare a re Oscar che il premio era stato assegnato ad un lavoro contenente un errore? Mittag Leffler chiese allora a Poincaré di non diffondere la notizia e di adoperarsi per eliminare l'errore, onde procedere poi alla ristampa del manoscritto corretto (a patto che i costi fossero pagati dallo stesso Poincaré). Il punto in cui Poincaré si era sbagliato riguardava l'esistenza di traiettorie che si allontanano da un punto di equilibrio per poi ritornarvi asintoticamente – oggi note come traiettorie *omocline* – la cui esistenza sta alla base dei comportamenti caotici. Poincaré riuscì a rimediare brillantemente all'errore e a mandare in stampa un manoscritto che conteneva anche una pionieristica descrizione del fenomeno del caos deterministico. Un solo rammarico: i costi per la ristampa che Poincaré dovette pagare furono superiori al premio offerto dal re.

19

dinamico in grado di regolare, in modo rigidamente deterministico e prevedibile, l'intero Universo: "lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro".

Laplace sapeva bene che la conoscenza delle diverse entità (quelle che ora chiamiamo variabili di stato) ad un certo istante non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo il frutto di processi di misura. Ma, come spesso si assume in base a regole di buon senso, considerava ovvio il fatto che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avesse conseguenze altrettanto piccole sull'intera traiettoria e che quindi il calcolo dello stato futuro risultasse di poco alterato. In altre parole, il

Riquadro 1. Il premio di re Oscar II e il costo del caos

fatto di poter rappresentare l'evoluzione di un sistema reale mediante un sistema dinamico, sia pur attraverso una sua rappresentazione locale, era considerato equivalente a dire che la sua evoluzione fosse necessariamente regolare, prevedibile, priva di ogni incertezza.

Eppure, qualche piccolo indizio che le cose non stessero proprio così era già presente in quei settori in cui le equazioni del moto erano non lineari. Ad esempio, nella dinamica dei fluidi, si potevano osservare sia andamenti regolari che complessi. Il fumo di una sigaretta, o il flusso dell'acqua nell'alveo di un fiume, possono talvolta evolvere in modo semplice (il cosiddetto *moto laminare*) e altre volte in modo vorticoso e disordinato (il cosiddetto *moto turbolento*) pur essendo governati dalle stesse equazioni del moto. Il passaggio alla turbolenza, che si osserva tal-

LE ALI DI UNA FARFALLA

Nel 1963, il meteorologo americano Edward Lorenz pubblicò un articolo dal titolo *Deterministic Nonperiodic Flow* in cui, partendo da un modello dinamico non lineare per la descrizione dei moti convettivi nell'atmosfera, descriveva il fenomeno del caos deterministico. Le conclusioni alle quali giungeva erano simili a quelle descritte da Poincaré 60 anni prima, ma suscitavano un vasto interesse sia perché potevano essere "visualizzate" attraverso figure ottenute numericamente (grazie all'uso del *computer*) sia perché scaturivano dal contesto delle previsioni del tempo, un argomento al quale l'opinione pubblica è molto interessata. La legge del moto che Lorenz si trovò a studiare era espressa dal seguente sistema di tre equazioni differenziali:

$$\frac{dx}{dt} = -Sx + Sy; \quad \frac{dy}{dt} = -Rx - y - xz; \quad \frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$

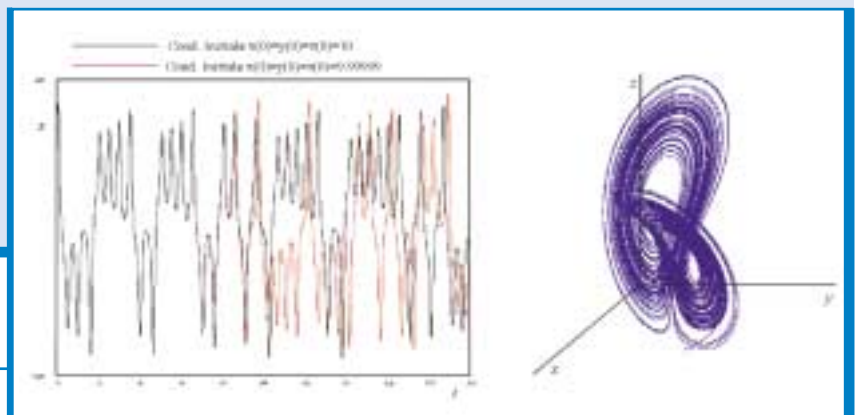
dove x , y e z sono le variabili di stato che servono a descrivere le modalità di movimento del fluido mentre S , R e B sono parametri legati a proprietà del sistema (quali temperatura, viscosità, densità). Lorenz era interessato al tipico problema delle previsioni meteorologiche, che è poi il problema dei sistemi dinamici: note le equazioni del moto e dati i valori delle variabili di stato ad un certo istante (ottenuti, ad esempio, mediante misure da stazioni meteorologiche o da satellite), cercare di calcolare quale sarà l'evoluzione dello stato in tempi successivi.

Se non fosse per i termini xy e yz , le equazioni del moto studiate da Lorenz sarebbero lineari e quindi si potrebbe ottenere la soluzione esatta in forma analitica. Lorenz non si aspettava che la presenza di quelle piccole non linearità avrebbe creato grandi problemi. Ma quando passò a calcolare gli andamenti delle $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, questi risultarono alquanto bizzarri e caratterizzati da oscillazioni molto irregolari (si veda la figura, dove la traiettoria nera rappresenta l'andamento di $x(t)$ ottenuto con $S = 10$, $R = 28$, $B = 8/3$ partendo da condizioni iniziali $x(0) = y(0) = z(0) = 10$). Lorenz rimase colpito, e nello stesso tempo affascinato, dagli andamenti ottenuti. La sorpresa fu ancor più grande quando si accorse che, partendo da condizioni iniziali che differivano in maniera quasi impercettibile, le corrispondenti traiettorie si allontanavano fra loro con rapidità esponenziale, per poi avvicinarsi di nuovo e poi riallontanarsi e così via. In altre parole, dopo un breve periodo iniziale in cui i comportamenti erano quasi uguali, quelli di lungo periodo risultavano completamente diversi.

Per descrivere questa proprietà, che sarà poi denominata *sensitività rispetto alle condizioni iniziali*, Lorenz usò il seguente esempio: la perturbazione provocata dal battito delle ali di una farfalla a Città del Capo potrebbe provocare, dopo qualche giorno, radicali cambiamenti delle condizioni atmosferiche a Londra. Si confrontino, ad esempio, i due andamenti della variabile $x(t)$ della figura, dove quello in rosso è ottenuto partendo da $z(0) = 9.99999$, anziché $z(0) = 10$, ovvero con una differenza di 10^{-6} (proprio il battito di ali di una farfalla).

Rappresentando le traiettorie nello spazio delle fasi (x, y, z) , Lorenz si rese anche conto che queste andavano a disporsi su una particolare figura che non mutava cambiando le condizioni iniziali. Si trattava di un *attrattore caotico* che venne chiamato *attrattore strano di Lorenz* (figura a destra). La sua forma ci dà informazioni di regolarità perché ci dice che, per quanto bizzarre, le traiettorie rimarranno intrappolate all'interno di quella figura. Inoltre, la forma e l'estensione dell'attrattore dipendono dai parametri. Da questo si può dedurre, ad esempio, come un aumento di temperatura possa influire sull'ampiezza delle oscillazioni climatiche, pur non permettendo di fare previsioni a lungo termine circa le condizioni meteorologiche.

Riquadro 2. Le previsioni del tempo, l'attrattore di Lorenz e l'effetto farfalla



volta in modo improvviso durante il moto di liquidi o gas, è stato uno dei problemi che maggiormente hanno stimolato gli studi sui sistemi dinamici non lineari. Si racconta che Heisenberg, uno dei padri della Fisica quantistica e premio Nobel per la Fisica nel 1932, pochi minuti prima di morire abbia detto: “quando nell’aldilà avrò l’opportunità di interrogare il Creatore, gli voglio chiedere due cose: perché la relatività e perché la turbolenza. Almeno sulla prima spero di ottenere una risposta”.

In effetti, agli inizi del XX secolo l’interesse per questo settore sembrava destinato a ridursi, per mancanza di argomenti nuovi da proporre. C’erano problemi non risolti, come la turbolenza dei fluidi, ma la loro soluzione appariva così difficile e lontana che sembrava non valesse la pena dedicarvi ulteriori sforzi.

I motivi per il risveglio di interesse vennero dagli studi del matematico, fisico e filosofo francese Henri Poincaré (1854-1912) che può essere considerato il fondatore della teoria qualitativa (o topologica) dei sistemi dinamici ovvero di un modo di studiare le leggi del moto che rinuncia a ogni pretesa di conoscenza analitica o numerica delle soluzioni e si basa su metodi di tipo geometrico-visivo. Partendo da un problema apparentemente semplice, il moto di tre corpi che interagiscono tra loro attraverso la forza di gravità, Poincaré arrivò a descrivere in modo chiaro il fenomeno del caos deterministico, scrivendo nel 1903: *“una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l’effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell’universo all’istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile”*.

In effetti, la visione di Laplace (oltre che nei sistemi lineari) è corretta anche nei sistemi non lineari, purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Ma in modelli non lineari, anche semplici, le traiettorie possono risultare molto simili a successioni di stati aleatori, cioè ottenu-

ti con l’intervento di elementi casuali (come le uscite nel lancio di un dado).

I risultati ottenuti da Poincaré erano probabilmente troppo avanzati rispetto ai suoi tempi e non suscitavano subito l’interesse che meritavano. Ma la rivoluzione scientifica provocata dalla scoperta del caos deterministico era solo ritardata. Dopo ulteriori importanti contributi alla teoria qualitativa dei sistemi dinamici, forniti dalla grande scuola russa dagli anni ’30, con Lyapunov, Kolmogorov, Andronov, Pontrjag e dagli studi di Birkhoff negli Stati Uniti, due articoli diedero un decisivo contributo alla diffusione e alla crescente popolarità di questo settore della Matematica: quello del 1963 del meteorologo americano Edward Lorenz e quello del 1976, dal titolo *Semplici modelli matematici con dinamiche molto complicate*, in cui Robert May – un fisico inglese che studia modelli per l’Ecologia – illustrò con un linguaggio accessibile anche a non specialisti l’insorgere di dinamiche caotiche attraverso lo studio di un sistema dinamico a tempo discreto, ottenuto iterando un polinomio di secondo grado (una “banale” parabola).

Seguiamo anche noi la strada indicata da May, analizzando il seguente modello dinamico a tempo discreto:

$$x(t+1) = f(x(t)) = (1 - r - sx(t)) x(t) - h.$$

Questa equazione alle differenze ci permette di introdurre alcuni importanti concetti che caratterizzano anche i sistemi dinamici non lineari a tempo continuo. Essa costituisce anche un modello per descrivere l’andamento temporale di una popolazione di densità x dove il parametro r rappresenta il tasso di crescita nell’unità di tempo, il termine $-sx$ rappresenta un termine di mortalità dovuta a sovraffollamento (competizione per il cibo o per lo spazio vitale) e $-h$ il tasso di prelievo (ad esempio, se parliamo di popolazioni ittiche, un’attività di pesca a quote fisse).

Il primo passo per affrontare lo studio qualitativo di un sistema dinamico consiste nell’identificarne i *punti di equilibrio* (o *stati stazionari*) definiti come quei valori della variabile di stato che rimangono costanti sotto l’azione della legge del moto: $x(t+1) = x(t)$. Si tratta quindi dei punti fissi della funzione f , soluzioni dell’equazione $f(x)=x$, rappresentati graficamente dalle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta bisettrice di equazione $y = x$. Nel caso del nostro modello, è $f(x) = -sx^2 + (1-r)x - h$ e quindi l’equazione $f(x)=x$ dà $sx^2 + rx + h = 0$. Per $h < r^2/(4s)$ si ottengono allora due punti fissi:

$$q^* = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}, \quad p^* = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}.$$

Se la condizione iniziale viene presa in corrispondenza di un punto fisso x^* , la traiettoria che si ottiene è stazionaria, cioè $x(t) = x^*$ per ogni t .

È allora naturale chiedersi cosa succede se, anziché partire esattamente da x^* , si parte da una condizione iniziale $x(0)$ vicina a x^* . Per analizzare questo problema, ricorriamo a una comoda costruzione grafica per studiare le traiettorie ottenute dall'iterazione di una funzione di una sola variabile.

Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$, che nel nostro esempio è una parabola concava, e sovrapponiamo ad esso il grafico della bisettrice $y = x$. Partendo dalla condizione iniziale $x(0)$, presa sull'asse delle ascisse, tracciamo un segmento verticale fino a incontrare il grafico della funzione e poi procediamo in orizzontale fino all'asse y per ottenere $x(1) = f(x(0))$. Per procedere nell'iterazione, occorre ora riportare $x(1)$ sull'asse delle ascisse, in quanto dovrà diventare il nuovo argomento su cui applicare la funzione per ottenere $x(2)$. Questo può essere ottenuto sfruttando la presenza della bisettrice che, essendo il luogo di equazione $y = x$, permette di riportare $x(1)$ sull'asse orizzontale mediante uno spostamento orizzontale verso destra e uno verticale verso il basso, usando la bisettrice come punto di svolta. Ora siamo pronti a ripetere lo stesso procedimento per ottenere $x(2) = f(x(1))$ e così via. Si può notare l'inutilità del segmento che congiunge il grafico della funzione con l'asse delle y (che viene subito ripercorso all'indietro verso la

bisettrice) e lo stesso ragionamento si può applicare al segmento verticale: per non percorrerlo due volte, prima in salita e poi in discesa, è conveniente fermarsi sulla bisettrice e da qui subito dirigersi verso il grafico per determinare l'iterato successivo. In tal modo, la sequenza di passi da un iterato al successivo diventa: $x(t)$ (sulla bisettrice) \rightarrow tratto verticale \rightarrow grafico della funzione \rightarrow tratto orizzontale $\rightarrow x(t+1)$ (sulla bisettrice) come visualizzato in Fig. 3. Si viene così a sostituire l'asse x con la bisettrice ed è su essa che si rappresenta la sequenza $\{x(0), x(1), \dots, x(t), \dots\}$.

Dalla Fig. 3 (ottenuta con parametri $r = 1.5$, $s = 1$, $h = 0.2$) ci rendiamo conto che i due equilibri si comportano diversamente. Partendo da una condizione iniziale in un intorno di q^* , la traiettoria si allontana da esso (e non vi ritorna più); partendo da una condizione iniziale vicina a p^* , la traiettoria generata si avvicina invece asintoticamente ad esso cioè converge a p^* . Si dice allora che q^* è un *equilibrio instabile* (o repulsivo) mentre p^* è *asintoticamente stabile* (o attrattivo).

La differenza fra i due equilibri si può giustificare osservando la pendenza con cui il grafico della funzione attraversa la bisettrice in corrispondenza dei punti fissi: in q^* la pendenza è superiore a quella della bisettrice, cioè il coefficiente angolare $f'(q^*)$ della retta tangente al grafico, $x(t+1) = q^* + f'(q^*) (x(t) - q^*)$, è maggiore di 1. Quindi la funzione iterata si comporta, in un intorno del punto fisso, come una mappa lineare di ragione maggiore di 1 (una progressione geometrica espansiva). Applicando lo stesso ragionamento all'equilibrio p^* , possiamo invece dire che l'approssimazione lineare della funzione in un suo intorno si comporta come una progressione geometrica contrattiva, essendo il coefficiente angolare della tangente minore di 1 in valore assoluto. Inoltre, la convergenza è di tipo oscillatorio (con oscillazioni smorzate) in quanto il coefficiente angolare in p^* è negativo.

La stabilità è un concetto locale, poiché viene definita in base al comportamento delle traiettorie che partono da condizioni iniziali prese vicino all'equilibrio. La domanda che sorge spontanea – *quanto vicine?* – porta al concetto di *bacino di attrazione*, definito come l'insieme dei punti che generano traiettorie convergenti a un dato attrattore. Nel nostro caso, il bacino è delimitato dal punto fisso instabile e dalla sua *pre-immagine*, indicata con q^{*-1} in Fig. 3 (pre-immagine di q^* significa che $f(q^{*-1}) = q^*$). Nella

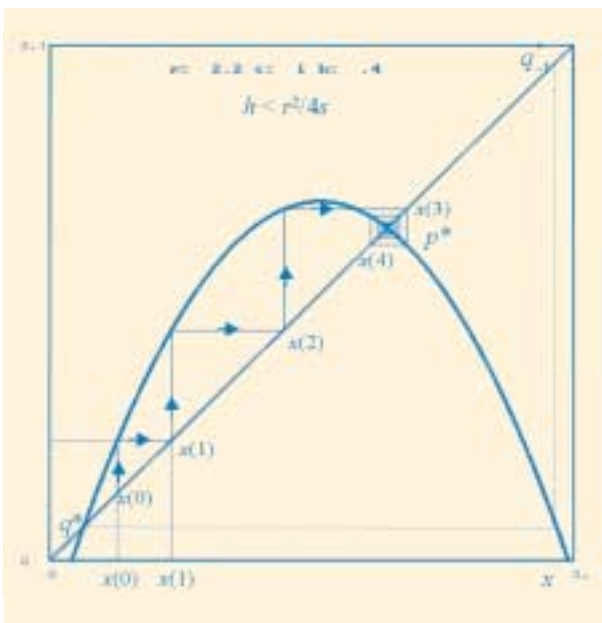


Figura 3

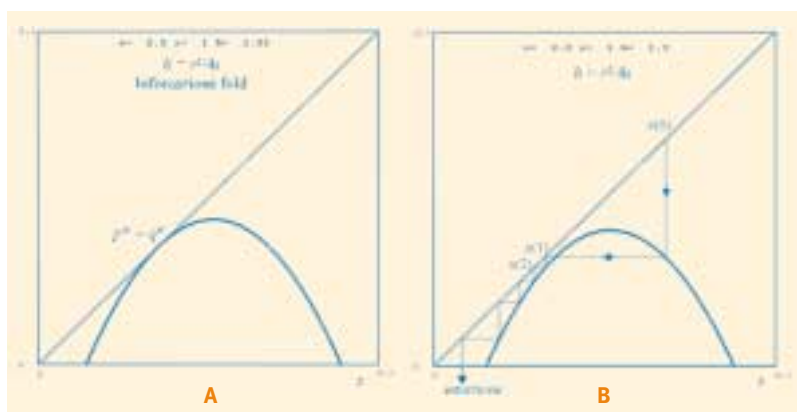


Figura 4

situazione di Fig. 3, si hanno quindi due tipi di dinamiche asintotiche: se $x(0) \in (q^*, q^*_{-1})$, allora la traiettoria che parte da $x(0)$ converge all'equilibrio p^* ; per $x(0) < q^*$ oppure $x(0) > q^*_{-1}$, la traiettoria diverge invece a $-\infty$ (per l'applicazione considerata, questo equivale all'estinzione della popolazione).

Entrambi i valori di equilibrio dipendono dal parametro h e al crescere di h si avvicinano tra loro: p^* diminuisce e q^* aumenta (aumentando la quota prelevata nell'unità di tempo, il valore di equilibrio stabile diminuisce e il valore di soglia, sotto il quale la specie andrà all'estinzione, aumenta ovvero il sistema diventa più vulnerabile).

Quando il parametro h raggiunge il valore $h = r^2/4s$, i due punti di equilibrio si sovrappongono e la parabola diventa in tali punti tangente alla bisettrice (Fig. 4A). Un ulteriore aumento di h provoca la scomparsa dei due equilibri, dopodiché l'unica evoluzione possibile è quella che conduce all'estinzione (Fig. 4B).

Il valore $h = r^2/4s$ è un valore di *biforcazione*, che prende il nome di *biforcazione tangente* (o *biforcazione fold*). In generale, si dice che un parametro attraversa un valore di biforcazione quando determina il passaggio fra due situazioni dinamiche *qualitativamente* diverse, dovuto ad esempio alla creazione o scomparsa di punti fissi o altri tipi di attrattori, oppure cambiamenti di stabilità.

Nell'esempio proposto, le biforcazioni che portano al caos si verificano agendo sui parametri in modo da rendere più acuminata la parabola. Per mostrare ciò, fissiamo $h = 0$ (popolazione non sfruttata) e facciamo aumentare il parametro r , usandolo come una "manopola" per innalzare il vertice. Per $h=0$, i punti fissi diventano $q^*=0$ e $p^*= r/s$ (valore di equilibrio della popolazione non sfruttata). Al crescere di r , il grafico della funzione in corrispondenza

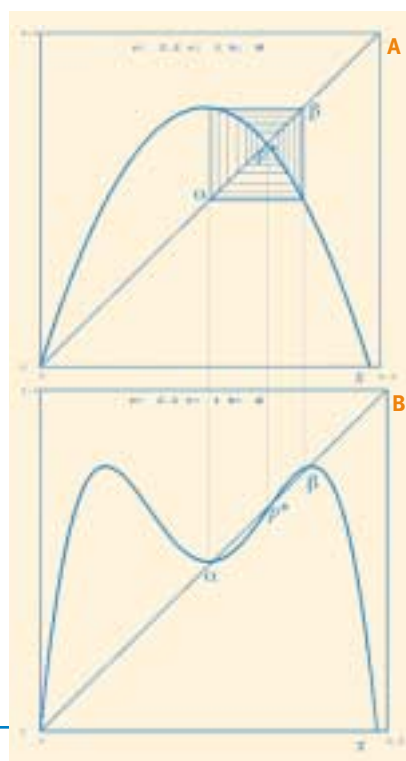


Figura 5

del punto fisso p^* diventa via via più ripido, fino a che la pendenza raggiunge il valore -1 , cioè la tangente diventa perpendicolare alla bisettrice. Questo accade per $r = 2$, poiché il coefficiente della retta tangente al grafico in p^* è $f'(p^*) = 1+r - 2sp^* = 1-r$. Un aumento ulteriore di r provoca quindi una perdita di stabilità dell'equilibrio positivo; $r = 2$ costituisce pertanto un valore di biforcazione. Per cercare di capire il tipo di biforcazione, esaminiamo il comportamento dinamico delle traiettorie per valori di r poco maggiori di 2 e con condizione iniziale prossima a p^* . Quello che si può vedere è che la traiettoria si allontana da p^* , oscillando, e tende a un'oscillazione periodica fra due punti (indicati con α e β in Fig. 5A). Partendo da uno di questi due punti, si ottiene una traiettoria che saltella tra α e β , essendo $f(\alpha) = \beta$ e $f(\beta) = \alpha$. Inoltre, allo stesso *ciclo-2* tende ogni traiettoria che parte da una condizione iniziale $x(0) \in (q^*, q^*_{-1}) = (0, (1+r)/s)$, esclusa $x(0) = p^*$ naturalmente. Questo tipo di biforcazione si chiama *biforcazione con raddoppio del periodo* o, più brevemente, *biforcazione flip*.

Per capire meglio quello che accade, consideriamo la funzione composta $F(x) = f(f(x)) = f^2(x)$, il cui grafico è mostrato in Fig. 5B. Poiché $F(x)$ è un polinomio di quarto grado, può avere fino a 4 intersezioni con la bisettrice, ossia quat-

tro punti fissi. Due sono necessariamente gli stessi di f , ossia q^* e p^* , mentre eventuali altri corrispondono ai punti periodici (di periodo 2) di f essendo $F(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\beta) = \alpha$ e, analogamente, $F(\beta) = \beta$. In effetti, iterare la mappa f significa generare gli stati del sistema a salti di 2.

La biforcazione che avviene nella mappa f per $r=2$ corrisponde a una perdita di stabilità di p^* anche per l'iterata: è $F'(p^*) = [f'(p^*)]^2$ e quindi abbiamo $F'(p^*) \geq 1$ per $r \geq 2$. Aumentando ulteriormente il parametro r , anche la pendenza di F nei suoi punti fissi α e β raggiunge il valore -1 e quindi avviene una *biforcazione flip* che fa diventare α e β instabili per F , mentre attorno a ciascuno di loro si crea un ciclo di F di periodo 2. Tali *cicli-2* stabili rappresentano un *ciclo-4* stabile per f , che diventa l'attrattore "di turno" del sistema dinamico, e contemporaneamente costituiscono 4 punti fissi stabili per f^4 . Aumentando ancora r , tale *ciclo-4* diventerà instabile lasciando il posto a un *ciclo-8* così via. È naturale chiedersi cosa avverrà nel seguito: si raggiungerà un ciclo di periodo massimo (dopo il quale, le biforcazioni con raddoppio del periodo finiranno) o i raddoppi continueranno all'infinito?

Per analizzare ciò, si ricorre alla costruzione di un *diagramma di biforcazione*. Si considera un piano cartesiano in cui si riportano sull'asse orizzontale i valori del parametro r preso in un certo intervallo, ad esempio $r \in [1,3]$ e per ogni valore del parametro si calcolano i primi N punti della traiettoria, dove N è un numero sufficientemente grande (ad esempio $N = 500$). Sulla verticale passante per il valore di r utilizzato, si riportano i valori "asintotici" della x , cioè i valori più avanzati fra quelli calcolati, ad esempio i valori $\{x_{201}, \dots, x_{500}\}$. Infatti, una volta eliminato il *transitorio* $\{x_0, \dots, x_{200}\}$, i valori rappresentati si troveranno sull'attrattore "di turno" e quindi la loro posizione può essere considerata come una rappresentazione dell'attrattore per il valore del parametro considerato.

In *Fig. 6* (seguendo il diagramma di biforcazione) possiamo osservare che, al crescere di r , si hanno successivi raddoppi di periodo: da 4 a 8, poi a 16, 32, ... e tutta la successione delle potenze di 2.

Inoltre è importante osservare che i valori di r , per i quali avvengono le biforcazioni di raddoppio del periodo, da 2^k a 2^{k+1} , sono sempre più vicini fra loro al crescere di k . Infatti, la variazione di r necessaria per passare dalla creazione del *ciclo-2* (che avviene per $r = r_1 = 2$) alla creazione del *ciclo-4*, che avviene per $r = r_2 = \sqrt{6}$, è di

$(\Delta r)_1 = (r_2 - r_1) \cong 0.449$, mentre la variazione di r che intercorre fra la creazione del *ciclo-4* e del *ciclo-8* è $(\Delta r)_2 = (r_3 - r_2) \cong (3.544 - 3.449) = 0.095$. I raddoppi di periodo diventano sempre più frequenti, ovvero gli intervalli $(\Delta r)_k$ diventano sempre più piccoli. Ciò si può osservare nel diagramma di biforcazione di *Fig. 6*, in cui è evidente che il ciclo attrattivo di turno rimane tale per un intervallino dell'asse delle ascisse sempre più piccolo.

In realtà, per $r > 2.56$ si ha una sequenza di valori di biforcazione così numerosi e ravvicinati da far pensare appunto ad una *cascata*. La cosa più sorprendente è che, per valori di r vicini a 2.57, gli infiniti cicli di periodo 2^k , $k \in \mathbb{N}$, sono stati tutti creati. In altre parole, la sequenza di valori di biforcazione $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ ha un punto di accumulazione, noto come *numero di Feigenbaum*, e dato da $r_\infty = 2.56994\dots$

Dopo questo valore di r compaiono delle traiettorie che non sono periodiche. Sono cioè costituite da valori che non coincidono mai con un valore già ottenuto, caratterizzate dal fatto che i punti riempiono densamente uno o più intervalli. Infatti, nel diagramma di biforcazione cominciano a comparire, lungo la verticale, delle zone nere (densamente riempite di punti). Se prendiamo una di tali traiettorie e la rappresentiamo lungo l'asse dei tempi, otteniamo sequenze di punti come quelle mostrate in *Fig. 7A*, ottenuta per $r = 2.678$. Da questi andamenti, si intuisce l'origine del termine *caos deterministico*: sebbene i valori delle $x(t)$ siano ottenuti attraverso l'applicazione ripetuta della funzione f - un meccanismo puramente deterministico - questi sembrano susseguirsi in modo apparentemente casuale, senza alcuna regolarità o ricorrenza.

Una delle cause di un comportamento così disordinato è da ricercarsi nel fatto che, intrappolati all'interno dell'in-

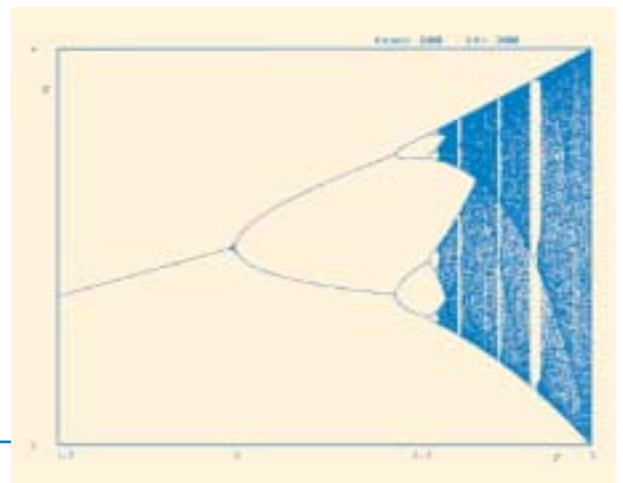


Figura 6

tervallo in cui si muovono le traiettorie caotiche, ci sono infiniti punti periodici repulsivi. Essendo le traiettorie limitate, poiché i valori ottenuti iterando la mappa non possono uscire dall'intervallo $I = (0, r/4)$, e non convergendo ad alcun ciclo attrattivo, esse “rimbalzano” continuamente, respinte dai punti periodici repulsivi che sono sparsi (e densi) all'interno dell'intervallo I .

Un altro fatto importante, e per molti aspetti stupefacente, caratterizza le traiettorie caotiche: la difficoltà di ottenerne due identiche. In linea di principio, data la stessa mappa e data la stessa condizione iniziale, le traiettorie dovrebbero essere identiche. Ma quando le traiettorie sono caotiche, basta una minima differenza fra due condizioni iniziali per ottenere traiettorie completamente diverse. E minime differenze possono anche essere intro-

dotte a causa della precisione limitata con cui vengono rappresentati i numeri ovvero dal numero delle cifre usate per fare i calcoli.

Questo fatto è illustrato in *Fig. 7B*, dove la prima traiettoria è stata ottenuta partendo da una certa condizione iniziale mentre la seconda è stata ottenuta con una condizione iniziale, che differisce di pochissimo, solo un milionesimo ovvero $10^{-6} = 0.000001$. Ebbene, dopo alcune iterazioni in cui si ottengono valori simili, le due traiettorie cominciano a differenziarsi sempre di più, fino a diventare completamente diverse. Il fatto che una piccola variazione nelle condizioni iniziali (anche quasi impercettibile o difficilmente misurabile) abbia conseguenze così notevoli nell'evoluzione di un sistema dinamico caotico è stato chiamato *sensibilità rispetto alle condizioni iniziali* o anche *effetto farfalla*.

“Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti ; proprio come in Aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero.”

Da “Il mistero di Marie Rogêt” di Edgar Allan Poe (1842).

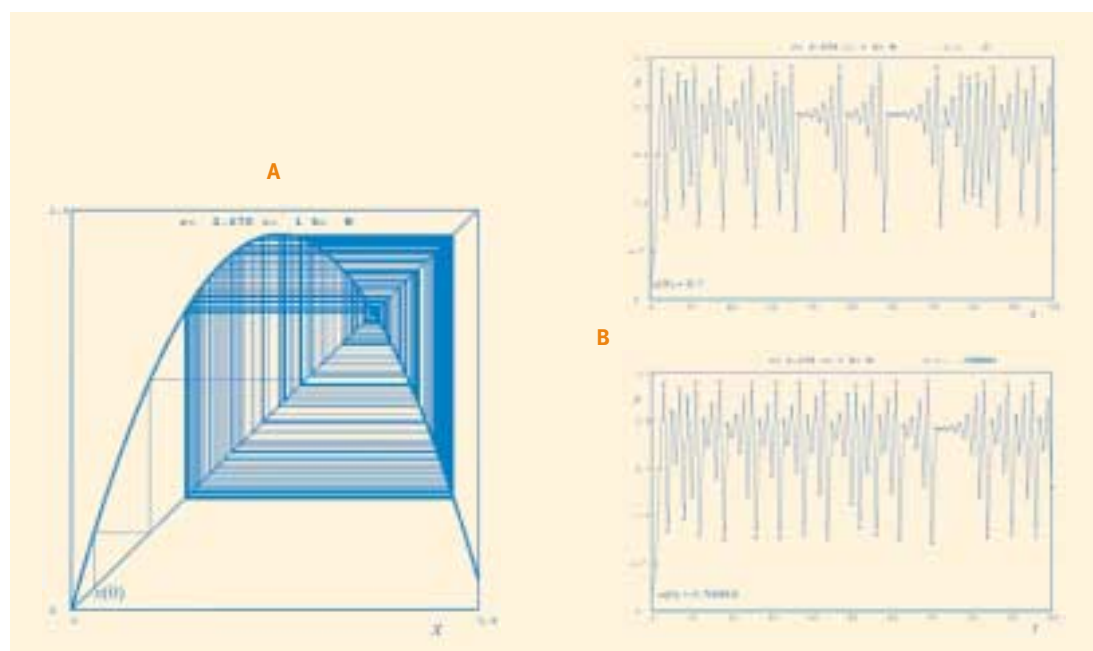
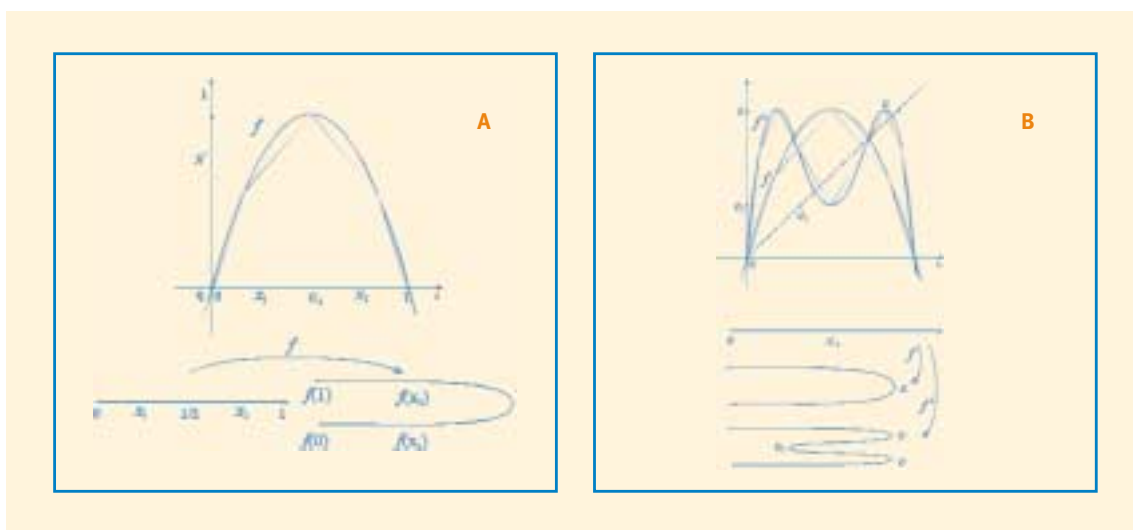


Figura 7



Cos'è quindi il caos deterministico? In realtà, una sua definizione generale, applicabile a tutti i casi in cui tale fenomeno si manifesta, non esiste ancora. Si riconosce la presenza del *caos* in tutti i casi in cui si ottengono traiettorie limitate che soddisfano le seguenti tre condizioni:

- (1) *Sensitività rispetto alle condizioni iniziali*: partendo da due diverse condizioni iniziali, arbitrariamente vicine fra loro, la distanza fra le rispettive traiettorie cresce esponenzialmente e, dopo un numero finito di iterazioni, diventa dello stesso ordine di grandezza della variabile di stato.
- (2) *Transitività (o mixing)*: i punti della traiettoria generata, partendo da una generica condizione iniziale, ricoprono densamente una zona dello spazio delle fasi.
- (3) *Esistenza di infiniti cicli repulsivi*, con i punti periodici densi nella regione ricoperta dalle traiettorie caotiche.

Si può dimostrare che le proprietà (2) e (3) implicano la (1), ma la proprietà di sensitività alle condizioni iniziali viene in genere riportata in quanto è quella più semplice ed evidente (ed è anche la più famosa).

Per capire le caratteristiche geometriche, o topologiche, del caos deterministico, si deve tenere presente che la mappa considerata (la parabola) agisce su un segmento allungandolo in certe zone e comprimendolo in altre. Se il segmento include il punto critico $x=1/2$, lo ripiega anche (si veda Fig. 8A). Alla seconda applicazione della f , tali azioni si ripetono (si veda Fig. 8B) e così via. L'iterazione della funzione equivale quindi all'applicazione di ripetute azioni di stiramento, piegamento, compressione.

L'azione combinata di queste azioni è possibile solo con mappe non lineari, in quanto una mappa lineare o dilata o contrae (ma non entrambe le cose contemporaneamente) e non può certo causare piegamenti.

L'insorgere del caos deterministico è invece legato alle trasformazioni che provocano stiramenti e ripiegamenti. Spesso viene usata la metafora dell'azione geometrica che si esercita sull'impasto di farina e acqua quando, con il noto procedimento casalingo, si prepara la sfoglia. La principale caratteristica geometrica delle trasformazioni che generano successioni caotiche consiste in azioni combinate (e ripetute durante l'iterazione) di stiramento e ripiegamento (*stretching & folding*).

Il significato geometrico delle proprietà (1) e (2) risulta meglio comprensibile proprio attraverso la metafora della sfoglia. Iterando tante volte il processo di allungamento (*stretching*) e ripiegamento (*folding*), due particelle di impasto, che si trovano vicine ad un certo istante, verranno a trovarsi lontane dopo un numero finito di iterazioni (*proprietà 1*); un pizzico di farina inizialmente concentrato in un punto finirà con il trovarsi uniformemente distribuito su tutto l'impasto (*proprietà 2*).

Anche per la proprietà (3) possiamo fornire una semplice giustificazione intuitiva. Se le traiettorie di un sistema dinamico sono limitate, ovvero sono costrette a rimanere intrappolate in una regione compatta dello spazio delle fasi e tale regione è densamente ricoperta di punti periodici repulsivi, allora le traiettorie non possono che essere estremamente irregolari, come il moto di una particella che si muove in uno spazio densamente riempito ad altre particelle che la respingono.