

Lineare o *nonlineare*: questo è il problema

Primo Brandi – Anna Salvadori
Università di Perugia

Lessenziale, Ferrara 13-14-15.10.2023

Premessa

Il concetto di lineare/nonlineare (che pervade la formazione pre-universitaria spesso in modo inconsapevole) dovrebbe essere gradualmente acquisito come competenza.

Curando non solo gli aspetti operativi, ma sottolineando il suo ruolo fondamentale nella comprensione della realtà.

Partiamo dall'obiettivo finale: $T : A \rightarrow B$ è **lineare** se

- 1) (sovrapposizione degli effetti) $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- 2) (invarianza per riscalamento) $T(kx) = kT(x)$

equivalentemente se *conserva la struttura di spazio vettoriale*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Qual è il collegamento fra le **competenze di cittadinanza** con le **formule precedenti**?

E' il compito che la Scuola deve assolvere.

Noi possiamo fornire qualche suggerimento sulla base della nostra esperienza come docenti e coordinatori di Matematica&Realtà

Breve schema dell'intervento

	primaria	I grado	I biennio	II biennio
Esperienze nella vita quotidiana				
Interdisciplinarietà				
Proporzionalità - linearità				
Operatività elementare				
Operatività avanzata				
Linearità di funzioni e operatori				
Approssimazione lineare				

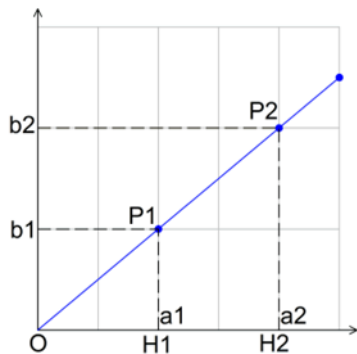
Perché il termine lineare?

1) LINEARITA' \Leftrightarrow PROPORZIONALITA' (diretta) \Leftrightarrow ALLINEAMENTO

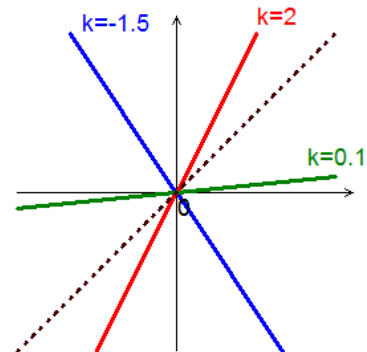
classe \mathcal{A}	classe \mathcal{B}
a_1	b_1
a_2	b_2
...	...

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \frac{b_i}{a_i} = \text{const}$$

numerico



grafico



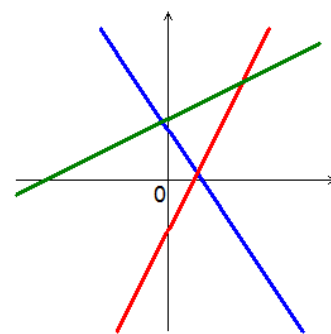
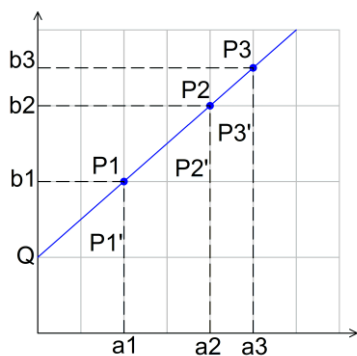
$$y = k \cdot x$$

funzionale

modello lineare *traslato*

classe \mathcal{A}^*	classe \mathcal{B}^*
$a_1 - a_2$	$b_1 - b_2$
$a_2 - a_3$	$b_2 - b_3$
...	...

$$\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \text{const}$$



$$y = k \cdot x + q$$

Primi contatti con la linearità

2) FENOMENI LINEARI o NONLINEARI a scuola e nella vita quotidiana

linearità

Ricette culinarie

Dosi per 4, 12, 30 persone

...



Spesa prodotti alimentari


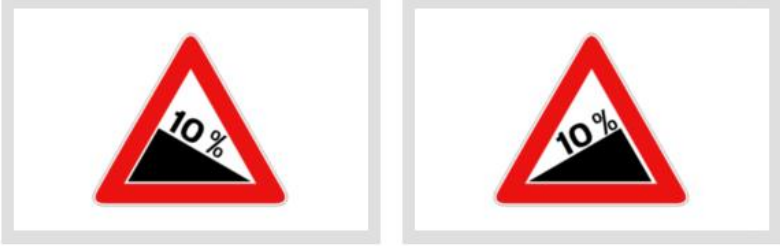


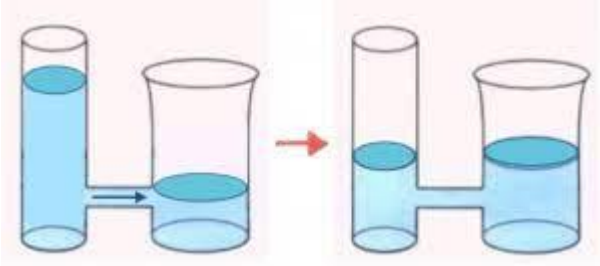


Modellini

Auto, moto, aerei

Tagliare figura



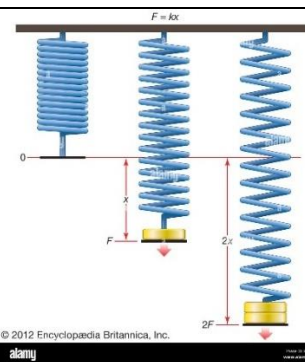
<p>Sconto %</p> <p>-50%-50%=0 ???</p>	 <p>Dizione.it RIPARTI CON I DOPPI SCONTI SU TUTTI I CORSI DI DIZIONE</p> <p>€50 CUI RIBASSATI SUL SITO + €50 DI SCONTI EXTRA</p> <p>CODICE SCONTO RESTART50</p>
<p>Discesa/salita pericolosa</p> <p>Quanto è inclinata una pendenza del 100%??</p> <p>Parete verticale</p>	 <p>Segnale di DISCESA PERICOLOSA CON PENDENZA DEL 10%</p> <p>Segnale di SALITA RIPIDA CON PENDENZA DEL 10%</p>
<p>Mappe geografiche</p> <p>Piante città</p>	 <p>Ferrara</p> <p>Con le località di: With the resorts of: Barco e Pontelagoscuro</p> <p>Pianta della città 1:8.000</p> <p>FERRARA CITY PLAN FERRARA PLAN DE VILLE FERRARA STADTPLAN</p> <p>Pianta della città</p>
<p>Zoom-in / zoom-out</p> <p>Solo se si <i>clicca</i> blocca proporzioni</p>	
<p>Principio dei vasi comunicanti</p> <p>pressione idrostatica</p>	

Spinta di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato


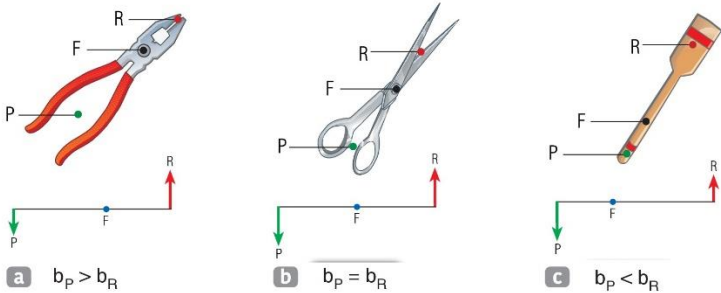



**Legge di Hook**

$$F = -k x$$

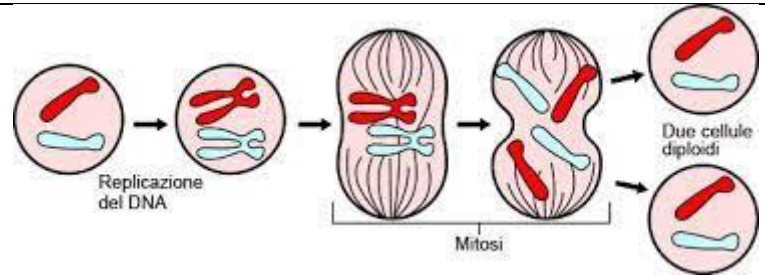
**Allungamento di una barra**

$$l - l_0 = a \cdot l_0 \cdot (t - t_0)$$



Non linearità	
Travaso con un imbuto	
Leve	$b_1 \cdot F_1 = b_2 \cdot F_2$ 
Spazio di frenata	$s_f = \frac{v^2}{250f}$ 
Legge di Joule l'energia elettrica viene trasformata in calore	$Q = k R i^2$ 
Traiettoria di un getto di acqua	

Crescita cellulare



Si tenga conto che 100 g di popcorn corrispondono a circa 370 Kcal (chilo-calorie).

Listino prezzi	
Vasca	Costo (€)
piccola	3,20
media	4,20
grande	5,45

SE IL FILM DIVENTA UNA BOMBA CALORICA

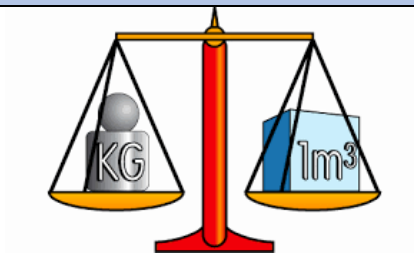
I popcorn mangiati al cinema sono una bomba calorica di rara proporzione: uno studio del Center for Science in the Public Interest ha analizzato in laboratorio i grassi saturi contenuti nelle razioni di mais saltato e salato venduto in tre grandi catene di cinematografi. I risultati sono da incubo. Si va dalle 1.200 calorie (il regime calorico quotidiano consigliato da vari nutrizionisti per restare nel peso forma) con 60 grammi di grassi saturi e 980 milligrammi di sodio per la confezione "big" alle



Fenomeni lineari/nonlineari ...dipende dal punto di vista

Peso specifico

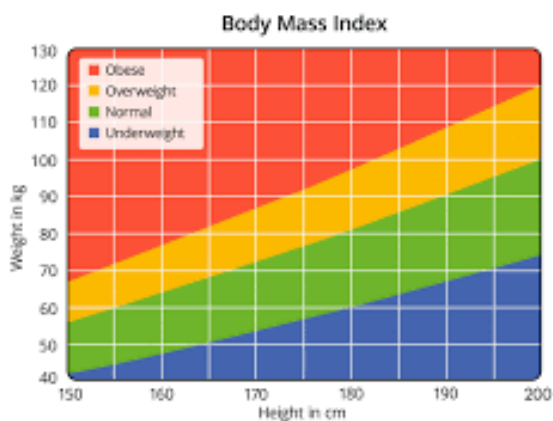
$$Ps = \frac{P}{V}$$



Body mass index

$$BMI = \frac{p}{h^2}$$

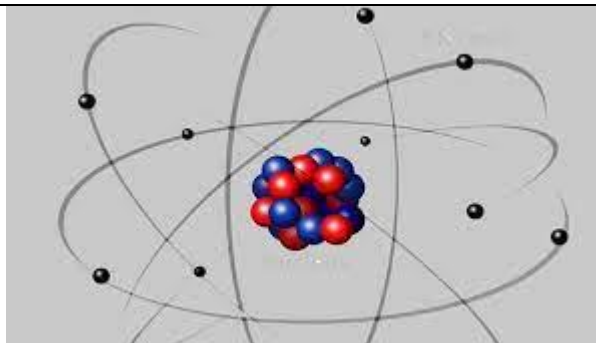
Linee di livello



Forza attrazione-repulsione fra due cariche elettriche

Legge di coulomb

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2}$$



Un contatto un po' più ravvicinato e consapevole

3) EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI LINEARITI

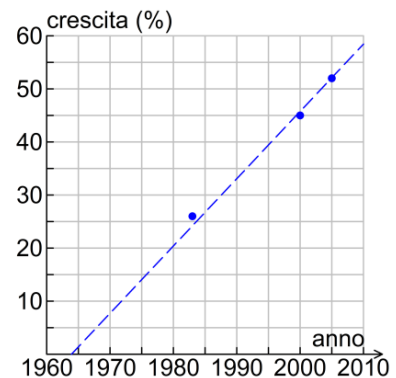
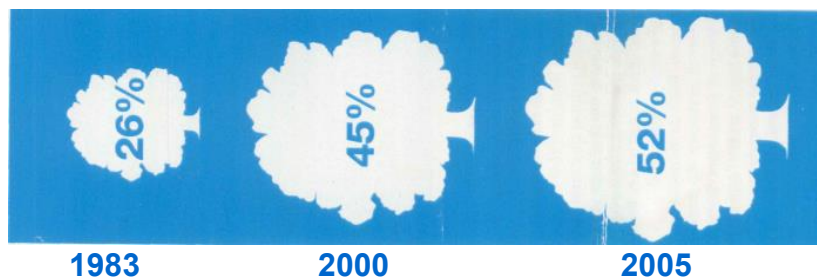
Foreste in crescita

Una buona notizia ... In Costa Rica le foreste stanno ricrescendo lentamente, ma in maniera costante. [Fonte: Venerdì di Repubblica, 2.4.2008]

Come la Costa Rica sa fermare e invertire la deforestazione

Il modello del Costa Rica, capace di passare in 25 anni da paese in forte deforestazione a paese verde e rigoglioso. Come? Dando un prezzo alla foresta. <https://www.futuroprossimo.it/> 20.9.2023

Leggendo questa notizia, sorge spontanea la domanda: quando è iniziato il fenomeno?



Cardio fitness due modelli a confronto

Formula di Karvonen:

la frequenza cardiaca massima (FCmax) (in funzione dell'età)

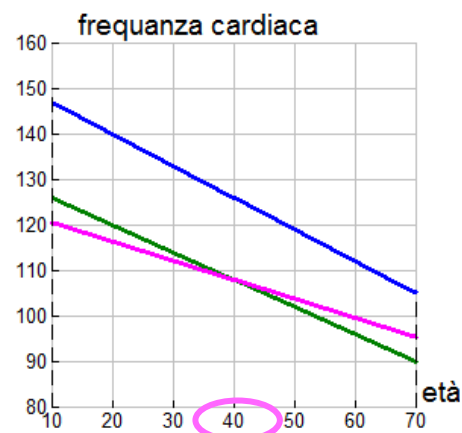
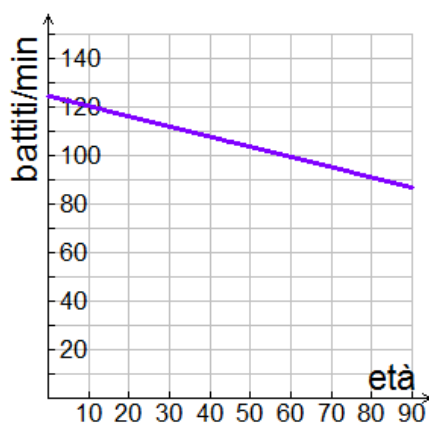
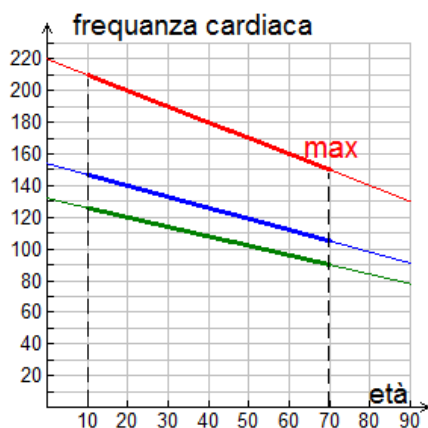
$$FC(e) = 220 - e \quad 20 \leq e \leq 70$$



l'allenamento – per essere efficace - dovrà mantenere il numero di battiti entro un intervallo compreso tra il 60% e il 70% della frequenza cardiaca max.

Regola di Jennifer Aniston (ex moglie di Bradd Pitt)

$$frequenza = 60\% (208 - 70\% età) \Rightarrow F_{Aniston}(e) = 124,6 - 0,42e$$



Pacco ordinario **stringere**

Dal sito delle Poste Italiane: www.poste.it/postali/ordinario:

Il pacco ordinario è il modo economico per spedire, da 0 a 20 kg, in tutta Italia.

Il costo della spedizione è di 7,00 euro.

Le specifiche del pacco ordinario:

peso massimo consentito: 20 kg

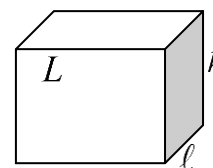
lunghezza massima: 1 metro



lunghezza + giro massimo¹ : 2 metri

¹ misurato in un senso che non sia quello della lunghezza

$$\begin{cases} m = L + 2(\ell + h) \leq 200 \\ 0 \leq L \leq 100 \quad 0 \leq \ell \quad 0 \leq h \end{cases}$$



La relazione

$$\ell + h = \left(100 - \frac{L}{2}\right) = q$$

descrive un fascio di rette parallele ad intercetta q , si deduce che la **regola postale si traduce nella famiglia di triangoli lato**.



Ma attenzione a non prendere abbagli!

Costo della baby pizza

	Diametro (cm)	Costo €
Pizza normale	30	6
Baby pizza	20	4

Stabilire qual è il valore percentuale del sovrapprezzo o sottoprezzo della baby pizza.

Tema proposto dalla Prof. Giovanna Valentino

Unità locale SM Rossi Vairo Agropoli

Gara GMM-Matematica&Realtà



Uno sfregio alla povertà

C'è chi prende il Natale per la festa del lusso sfrenato, sbagliando totalmente visione. A Tokyo, una gioielleria ha realizzato un **albero di Natale** in oro massiccio: 40 chili d'oro, **2,4 metri d'altezza** e un prezzo di **350 milioni di yen**, circa quattro milioni di euro.

La gioielleria ha creato anche delle **copie in scala ridotta**:

25 centimetri, al costo di "soli" mila yen, pari a mila euro.

Completare il testo

Gara GMM-Matematica&Realtà



Altri importanti contatti con linearità/nonlinearità

4) LINEARITA' e SCALE di MISURA

Scale lineari

Scale di lunghezza

Righello di word processor



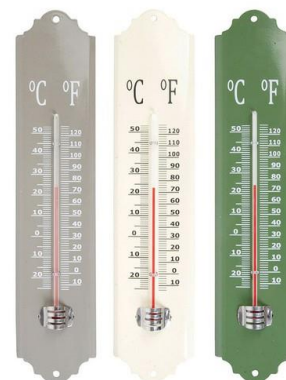
Scale di capacità

Multipli del l		Unità	Sottomultipli del l		
ettolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	millilitro
100	10	1	0,1	0,01	0,001
					
hl	dal	l	dl	cl	ml

Scale di temperatura

Celsius-Kelvin $K = {}^{\circ}C + 273.15$

Celsius-Fahrenheit $F = 1.8 {}^{\circ}C + 32$



Scale apparentemente nonlineari

Scala Richter

$$E_n = 10^{\frac{3}{2} \cdot n} E_0$$

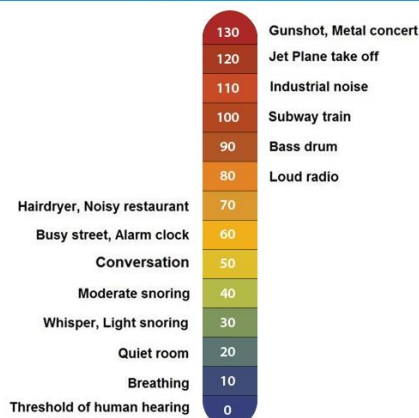
ogni **tacca** (magnitudo) della scala Richter misura un'energia sprigionata **circa 32 volte superiore**
Due tacche in magnitudo corrispondono ad una energia **mille volte superiore!**



Scala decibel

Il **decibel** (simbolo **dB**) è la decima parte del **bel** (simbolo **B**): $10 \text{ dB} = 1 \text{ B}$ ed è un'unità di misura **logaritmica** del rapporto fra due grandezze omogenee (di potenze)

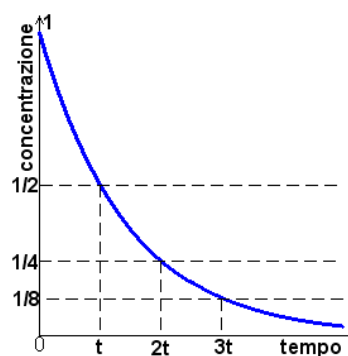
DECIBEL SCALE



Emivita/tempo di raddoppio

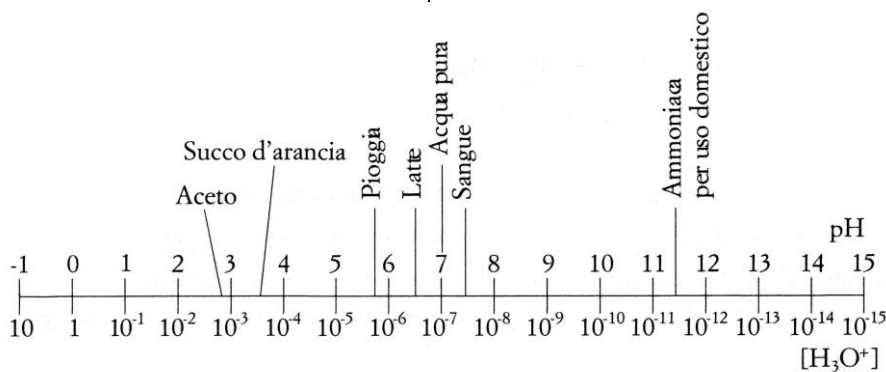
farmaco	emivita
Aspirina	12 ore
Tachipirina	2 ore
Voltaren	3-6 ore
Valium	3 ore

sostanza	emivita
Radio-226	1620 anni
Cobalto	5,3 anni
Uranio-238	$4,5 \cdot 10^9$ anni
Iodio-131	8 giorni
Carbonio C^{14}	5730 anni
Potassio - 40	$1,28 \cdot 10^9$ anni



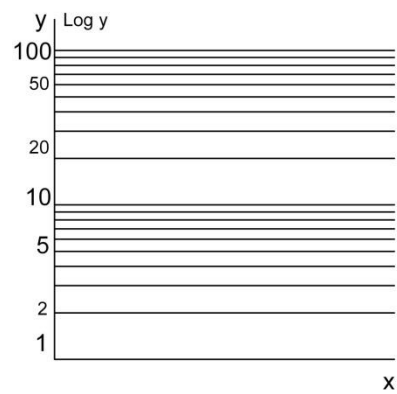
Scala del PH

$$pH = -\text{Log} [H_3O^+]$$

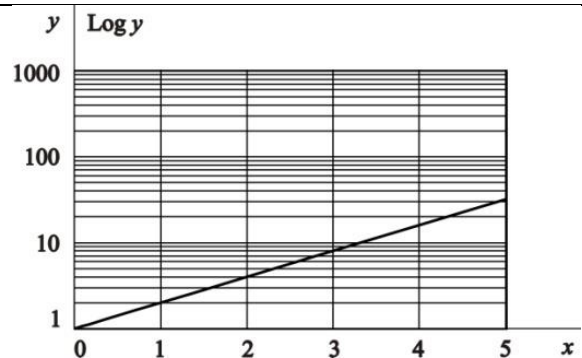
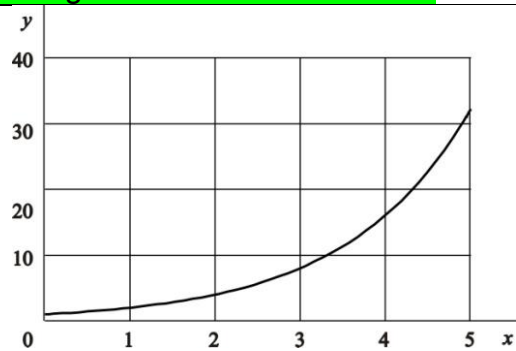


Scala semilogaritmica

$$Y = \text{Log } y \quad \text{con } y > 0$$



Piano semilogaritmico - linearizzazione



Aspetti operativi delle linearità un po' meno "evidenti" a prima vista

5) NORMALIZZAZIONE ALL'UNITA'

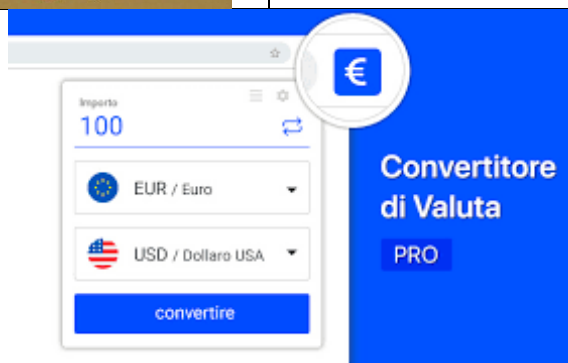
Listini prezzi

Al kg
All'etto



Tasso di cambio di moneta

1€ ⇔ ?\$



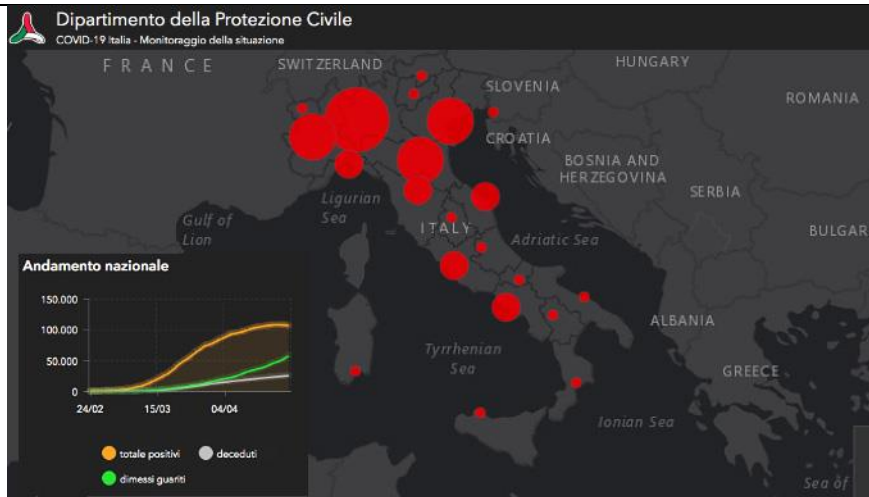
Operazioni finanziarie

Piani di ammortamento
Mutui
Rendite



Dati eoidemologici

Dati assoluti vs dati %



Carburante servito o fai da te ...

La mamma di Marco nel fare il pieno settimanale si rivolge al settore *servito* del distributore vicino casa. Il papà insiste perché lei utilizzi il settore *fai date* in quanto ne avrebbe un notevole risparmio, ma la mamma è convinta che il risparmio sia minimo e non ne valga la pena.

Calcolare quale sarebbe il risparmio della mamma.

Gara GMM-Matematica&Realtà



Autovettura Fiat Panda Hatchback 1.1 active
Cilindrata 1108 cm^3
Alimentazione benzina
Capacità del serbatoio 37 l


Normalizziamo a 1 litro e riportiamo i dati alla scala %:

$$\frac{2,09 - 1,96}{2,09} \cdot 100 \cong 6,22$$

Costo di circa il 30%

Autonomia della nuova 500

Valutare l'autonomia della nuova FIAT 500 lungo un percorso misto: per un terzo urbano e per i restanti due terzi, extraurbano. (Gara Città di Terni 2009)

Alcuni dati dalla scheda tecnica della nuova FIAT 500 1.2 8v Fire

Alimentazione benzina – capacità serbatoio	35 l	
Consumi per 100 km	circuito urbano	6,4 l
	circuito extraurbano	4,3 l
	circuito misto	4,8 l
Fonte: Quattroruote, Gennaio 2012		



Risposta: 700 km

Consumi fortemente diversi stessa autonomia

$$\text{consumo unitario} = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}e$$

$$\text{autonomia} = \frac{\text{capacità serbatoio}}{\text{consumo unitario}} \cdot 100$$



1000 coupé passion Smart fortwo 697 km

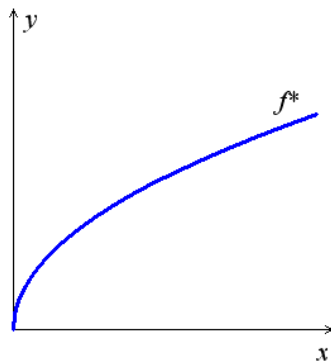


Ferrari 458 Italia 703 km

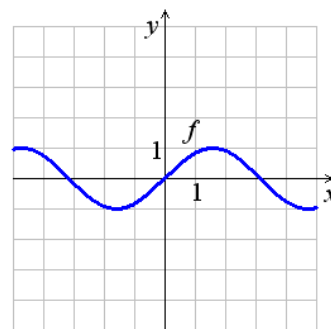
Il ruolo della linearità nell'operatività di funzioni ed operatori

6) OPERATORI LINEARI e NON LINEARI

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad ???$$

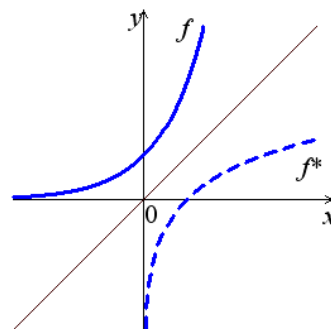


$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) + \sin(\beta) \quad ???$$



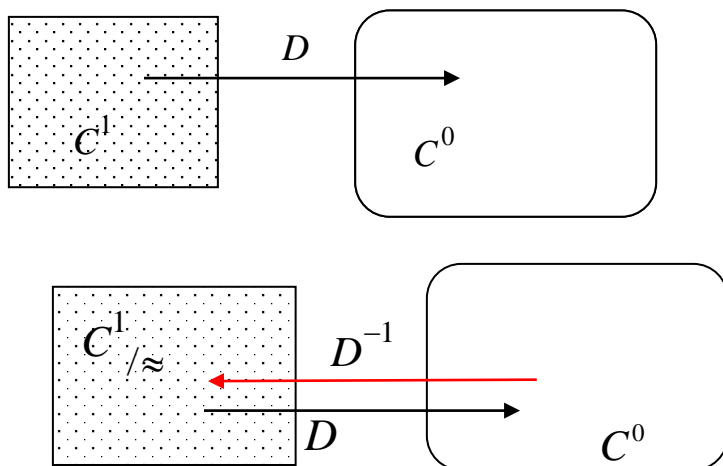
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$



I 3 operatori principali del Calcolo **limite, derivata, integrale** sono lineari

Operatore derivata



**Formula
fondamentale
Calcolo
integrale**

$$\int_a^b f(x) dx = (D^{-1} f)(b) - (D^{-1} f)(a)$$

Un ruolo importante della linearità

7) APPROSSIMAZIONE LINEARE

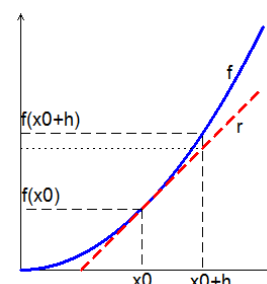
Approssimazione mediante la retta tangente

Dalla definizione di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si deduce

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$



Pressione atmosferica

La funzione $p(h) = 760e^{-0,000126h}$ descrive come varia la **pressione atmosferica**, misurata (in *mm Hg*) mediante un barometro, in funzione della **quota** (in *m* sul livello del mare). Adottando un'approssimazione lineare, giustificare la regola empirica comunemente usata nelle escursioni in montagna:

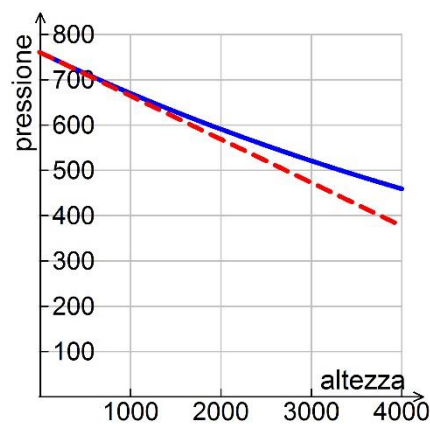
se sali di 10m la pressione diminuisce di 1mm.



La retta tangente

$$y[h] = 760(1 - 0,000126h).$$

$$y[h + 10] - y[h] \cong 0,9576 \text{ mm Hg}$$



Algoritmi di linearizzazione per l'approssimazione degli zeri

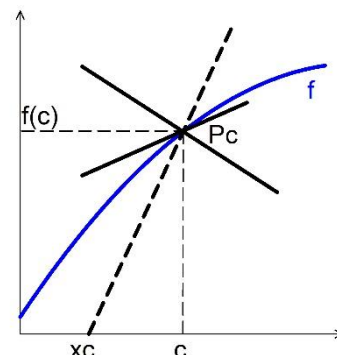
Approssimare le soluzioni di un'equazione

$$f(x) = 0$$

con quelle di una successione di equazioni *lineari*

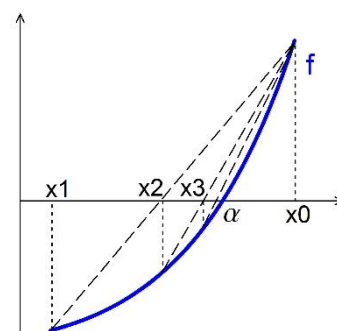
$$m_n x + q_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m_n}$$



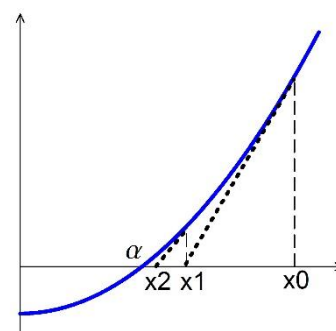
Regola falsi (appr. per difetto)

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ start} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n) \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$



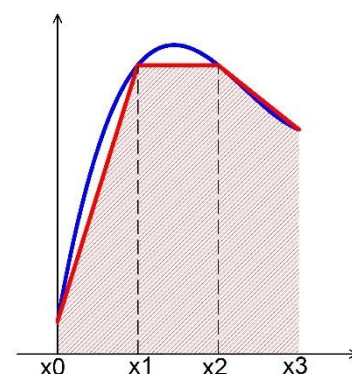
Metodo delle tangenti o di Newton (appr. Per eccesso)

$$\begin{cases} x_0 \text{ start} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$



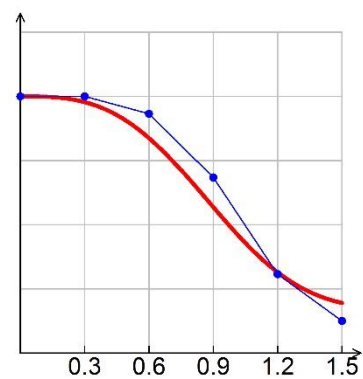
Metodo dei trapezi

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2n} \left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n) \right]$$



Algoritmo di Eulero per eq. Differenziali

$$\begin{cases} t_0 & y_0 = x_0 & \text{start} \\ t_{n+1} = t_n + h & & \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) & & \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$



Relazione di Primo Brandi

Scala universale

Scala Scoville dei peperoncini

La scala di *Scoville SHU* (Scoville Heat Units) misura la piccantezza dei peperoncini.

Questi frutti contengono una sostanza detta *capsaicina* che a contatto con la lingua provoca "bruciore". A seconda della quantità di capsaicina contenuta, i peperoncini sono più o meno piccanti.

Nel 1912 il chimico statunitense Wilbur Scoville ha ideato una scala, da 0 a 16.000.000 che misura tale sensazione. Il valore 0 corrisponde al peperoncino dolce (privo di capsaicina), il valore di fondo scala corrisponde alla capsaicina pura.



Fonti: depliant pubblicitario, https://it.wikipedia.org/wiki/Scala_di_Scoville

Per apprezzare meglio l'indice SHU, si riporta il valore ad una scala centesimale (da 0 a 100).

Per il peperoncino Habanero (300.000 SHU) il valore nella scala centesimale è 1,875.

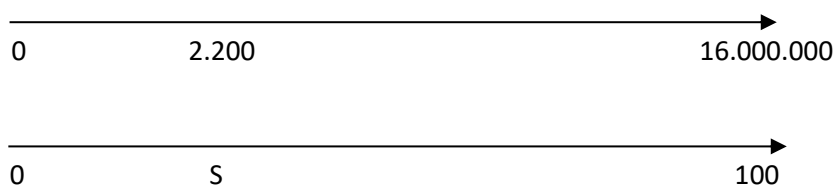
Il Guinness dei primati appartiene al peperoncino Carolina Reaper con 2.200.000 SHU.

Quale è il corrispondente valore sulla scala centesimale?



Scala Scoville illustrata a un mercato di Houston, [Texas](#)

Disegniamo le due scale

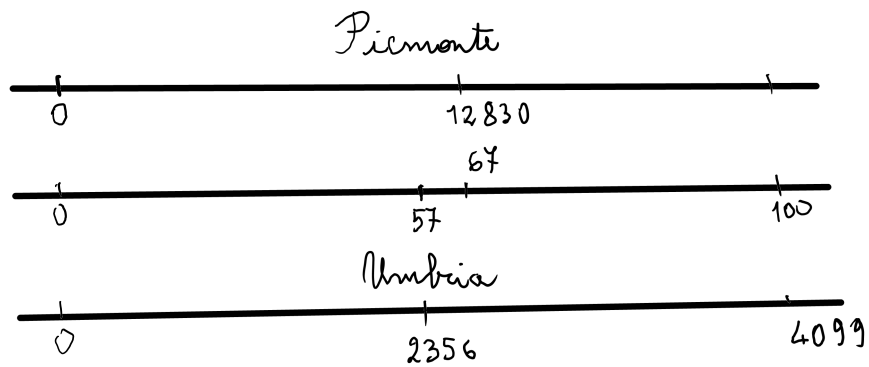


Dataset:Laureati -					
Anno di conseguimento					2011
<u>Territorio</u>					occupati nel 2015
Nord-ovest	12356	54803	6791	3361	77311
Nord-est	8500	35348	5441	2899	52188
Centro	11431	39501	10978	4076	65985
Mezzogiorno	13301	39028	24933	6271	83534
Totale	46504	180277	49454	17289	279018
Dati estratti il 11 ott 2023 15:22 UTC (GMT) da I.Stat					

Popolazione totale residente (migliaia)	rapporto % regionale Laureati/Popolaz	prodotto=L*p	%
15766	0,49	1218885226	28,3
11448	0,46	597448224	13,9
11601	0,57	765491985	17,8
20619	0,41	1722387546	40
59434		4304212981	100
Laureati occupati	media pesata	72420,05	

Valori assoluti e valori relativi

Anno di conseguimento	2011	
Selezione periodo	2015	
Condizione occupazionale	lavorano avendo iniziato dopo il	Totale laureati nel 2011
Territorio		
Piemonte	12830	18931
Umbria	2356	4099
Dati estratti il 11 ott 2023 da I.Stat		



Verso la non linearità

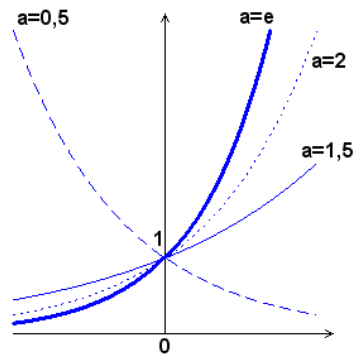
La funzione esponenziale

Modello generale

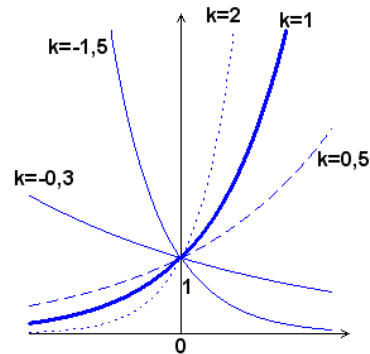
$$f(x) = B a^x$$

ove B è l'intercetta all'origine ed $0 < a \neq 1$ è la base.

Famiglie di funzioni esponenziali



$$f_a(x) = a^x$$



$$f_k(x) = e^{kx}$$

$B > 0$

Formulazione alternativa

$$f(x) = B a^x = B(1+r)^x \quad \text{con } -1 < r \neq 0$$

Fattore di crescita o decadimento

ove r è detto **fattore di crescita** o **di decadimento** a seconda che sia positivo o negativo.

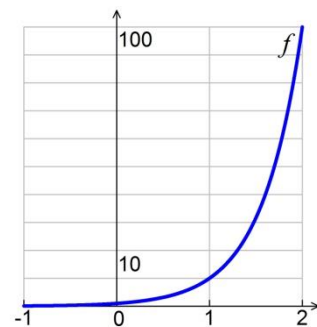
Esponenziale in base 10

$$f(x) = 10^x$$

Trasforma la progressione aritmetica "canonica"

$$-n, -(n-1), \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$$

nelle potenze



$$10^{-n}, 10^{-(n-1)}, \dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^{n-1}, 10^n$$

Rappresentano gli ordini di grandezza

Così, ad esempio, considerata l'unità di lunghezza $u = 1 m$, i multipli e sottomultipli decimali di ordine $k = 0, 1, 2, 3$ sono

$$\begin{array}{llll} 10^0 m = 1 m & 10^1 m = 1 dam & 10^2 m = 1 hm & 10^3 m = 1 km \\ & 10^{-1} m = 1 dm & 10^{-2} m = 1 cm & 10^{-3} m = 1 mm \end{array}$$

3. Uso del modello per affrontare le problematiche del quotidiano

Riscaldamento globale

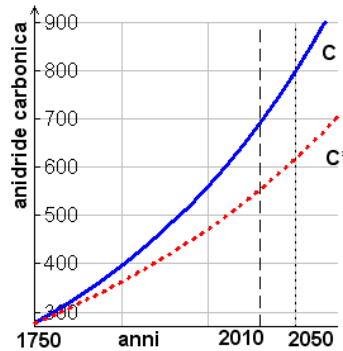
Il gas maggiormente responsabile dell'effetto serra è l'anidride carbonica. In base alla previsione più pessimistica delle Nazioni Unite, la quantità di anidride carbonica nell'atmosfera (in parti di volume per milione) è approssimabile con il seguente modello esponenziale

$$C(t) = 277e^{0.00353t} \quad 0 \leq t \leq 350$$

ove t è il tempo in anni trascorsi dal 1750.

Un altro modello di previsione basato su uno scenario "intermedio" sempre delle Nazioni Unite è il seguente

$$C^*(t) = 277e^{0.00267t} \quad 0 \leq t \leq 350$$

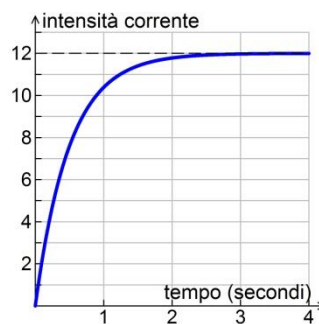
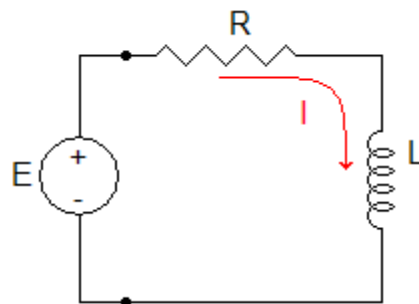


Circuito RL

In un circuito RL costituito da una resistenza R , un induttore L e un generatore di corrente E , la circolazione della corrente I è descritta dalla funzione

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right)$$

ove t è il tempo in secondi.



Studenti stranieri in Italia

Gli studenti stranieri in Italia dal 1995 al 2009 sono passati da 50.000 a 500.000, in quanti anni raggiungeranno il milione?

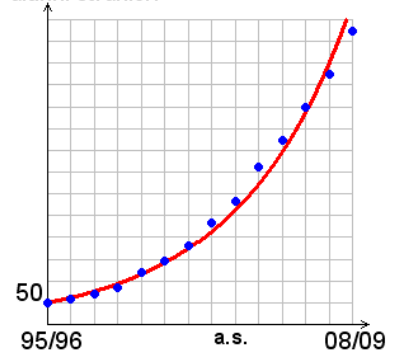
Studenti stranieri in Italia							
anno scolastico	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02
studenti (migliaia)	50	57	70	85	119	147	181
anno scolastico	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09
studenti (migliaia)	232	282	361	424	500	575	675

Fonte: Ministero dell'Istruzione
alunni stranieri

$$A_n = A_0 (1.22)^n = 50 \cdot (1.22)^n$$

come curva sostegno il grafico della funzione esponenziale

$$f(x) = 50 \cdot (1.22)^x$$



Si ottiene quindi $n = 50$ corrispondente all'anno 2045.

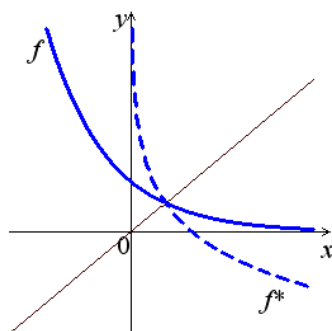
Equazioni esponenziali

Ogni funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

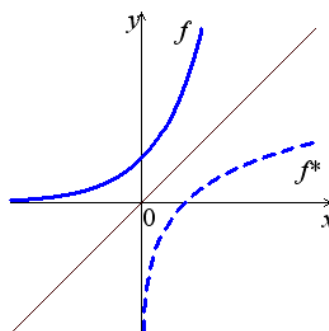
$$f(x) = Aa^x \quad \text{con } 0 < a \neq 1$$

è monotona, quindi è invertibile. La sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione logaritmo

$$f^{-1}(y) = \log_a y.$$



$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$

Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo

Dualità esponenziale e logaritmo

Identità
esponenziale e
logaritmica

(i) $\log_a(a^x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (identità logaritmica)

(ii) $a^{\log_a y} = y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ (identità esponenziale)

Proprietà algebriche duali

Prodotto di potenze (1) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

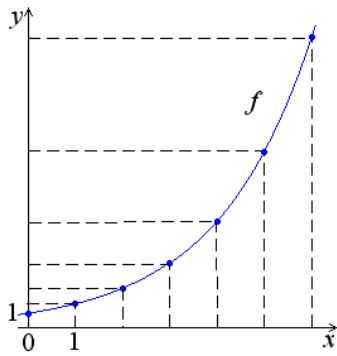
Rapporto di potenze (2) $a^b / a^c = a^{b-c}$

$$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$$

Potenza di potenza (3) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Isomorfismo esponenziale - logaritmico



esponenziale per due punti in dualità

Retta per due punti $P_1 P_2$
Sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} y_1 = m x_1 + q \\ y_2 = m x_2 + q \end{cases}$$

Esponenziale per due punti $P_1 P_2$
Sistema **non lineare** di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} y_1 = B a^{x_1} \\ y_2 = B a^{x_2} \end{cases}$$

Passando al logaritmo

Il sistema diventa lineare

$$\begin{cases} \ln y_1 = \ln B + x_1 \ln a \\ \ln y_2 = \ln B + x_2 \ln a \end{cases}$$

Assorbimento di un farmaco

Nel foglietto illustrativo del Ceftriaxone (un antibiotico) si legge: Avvertenze speciali. In caso di ridotta funzionalità renale non è necessario ridurre la posologia ,poiché anche in tale circostanza **il tempo di emivita** risulta solo leggermente aumentato.

Su Wikipedia si legge la seguente definizione di emivita di un farmaco.

L'emivita $t_{1/2}$ è un parametro farmacocinetico che indica il tempo richiesto per ridurre del 50% la quantità di farmaco nel sangue. La formula

dell'emivita è la seguente $t_{1/2} = 0,7 \cdot \frac{V_d}{C_l}$ ove V_d

e C_l sono parametri relativi al farmaco e 0,7 è un'approssimazione del logaritmo naturale di 2, $\log 2 \cong 0,693$.

Per un "comune" lettore resta il mistero di quel logaritmo di 2. Può essere quindi interessante approfondire la questione.



Anche nel caso delle sostanze radioattive si studia il tempo di dimezzamento

sostanza	emivita	fattore di decadimento (% annuale) λ
Radio-226	1620 anni	0,00043
Cobalto	5,3 anni	0,12
Uranio-238	$4,5 \cdot 10^9$ anni	0,000000000154
Carbonio C^{14}	5730 anni	0,00012
Potassio - 40	$1,28 \cdot 10^9$ anni	0,00000000054

Tempo di dimezzamento o raddoppio

Dato un processo di evoluzione di tipo esponenziale decrescente del tipo

$$y = f(x) = Aa^x$$

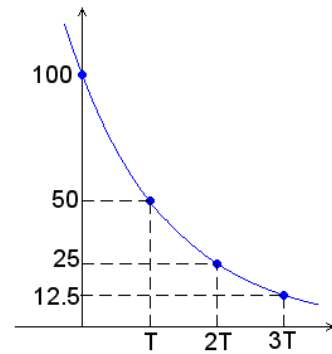
con $A > 0$ ed $0 < a < 1$, parametro caratteristico del fenomeno, il *tempo di dimezzamento* T (o emivita) è la soluzione della equazione

$$Aa^T = \frac{Aa^0}{2} = \frac{A}{2}$$

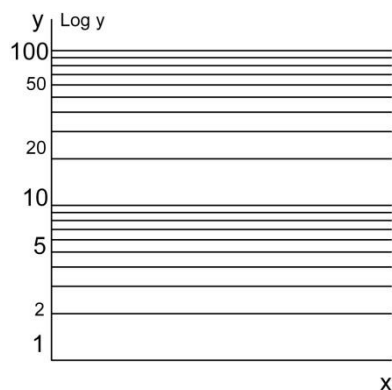
cioè

$$T = \log_a \frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{\ln a}$$

Abbiamo operato un cambiamento di base (base 2), una normalizzazione delle ordinate al valore 100 e determinato la nuova unità di misura T della scala lineare dell'asse dei tempi.



Piano semilogaritmico



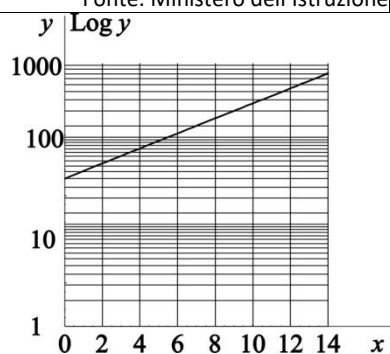
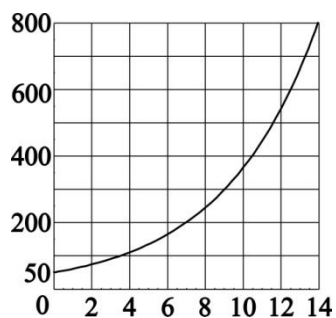
Processi di linearizzazione mediante logaritmo

Studenti stranieri in Italia

La tabella seguente mostra l'evoluzione del numero di studenti stranieri in Italia dal 1995 al 2009.

Studenti stranieri in Italia							
anno scolastico	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02
studenti (migliaia)	50	57	70	85	119	147	181
anno scolastico	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09
studenti (migliaia)	232	282	361	424	500	575	675

Fonte: Ministero dell'Istruzione

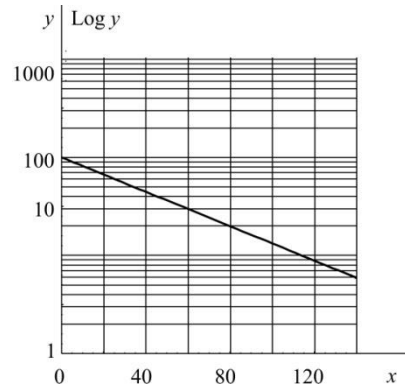
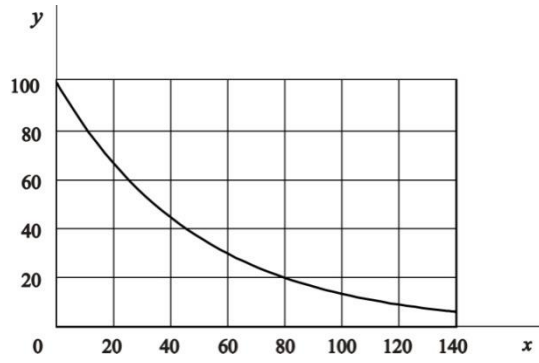


Legge di Bigelow

Seguendo la prima Legge di Bigelow, nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di 120°C la distruzione di spore del microrganismo *Bacillus Stearothermophilus* è regolata dalla legge

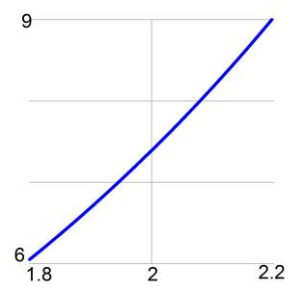
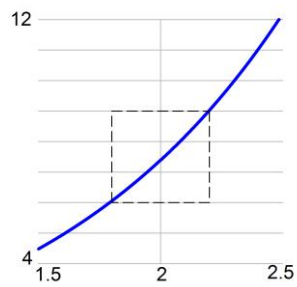
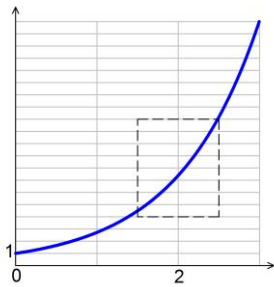
$$f(t) = 100 \cdot 0,98^t$$

ove t è la durata in secondi del processo di sterilizzazione.

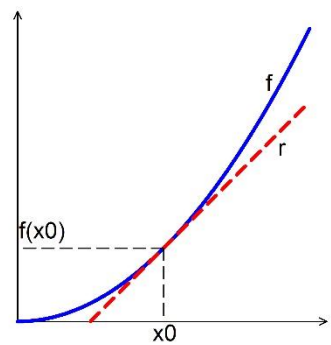


APPROSSIMAZIONE LINEARE

Operando uno zoom la curva si "rettifica"



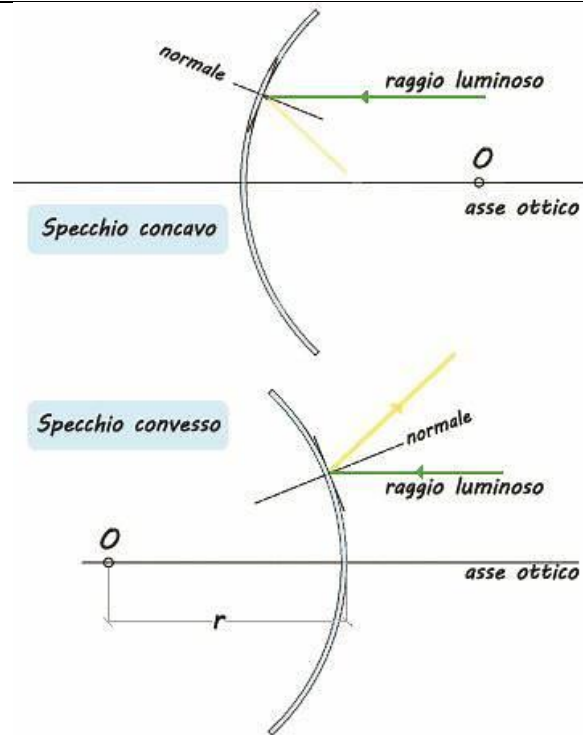
Retta tangente approccio grafico



Retta tangente approccio funzionale $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

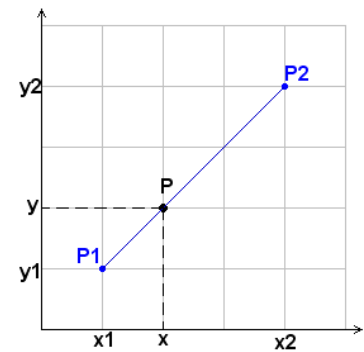
La superficie del mare appare localmente piatta

Lo specchio è approssimato con la retta tangente

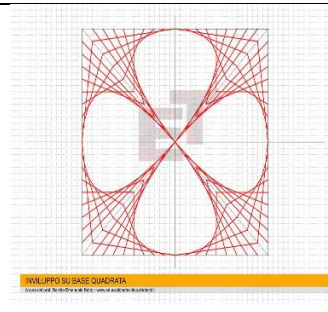
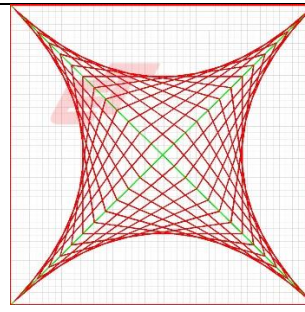
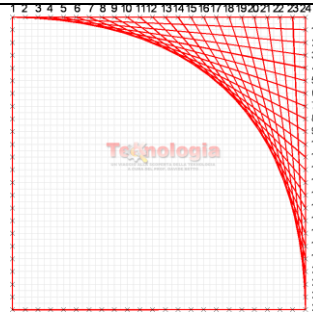
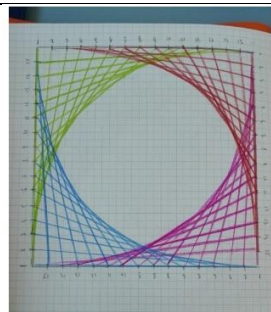


Interpolazione lineare

$$p(x) = f(x_1) + [f(x_2) - f(x_1)] \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Inviluppi



Data una curva $y=f(x)$ determinare il suo inviluppo

$$\begin{cases} y(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Concetto chiave: la derivata (l'operatore derivata)

Viceversa

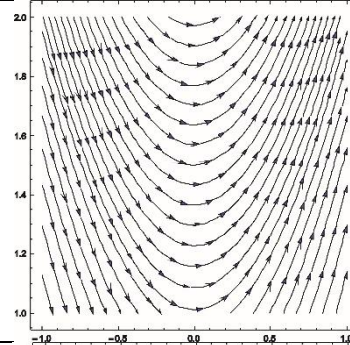
Data un involuppo determinare la curva relativa

(il problema è ben più arduo)

Campo di direzioni

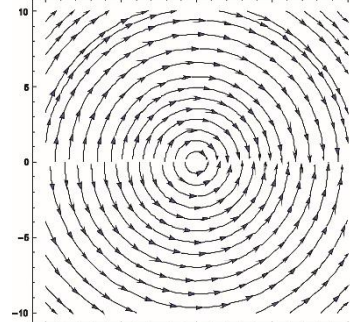
$$y'(x) = 2x$$

Fascio di parabole



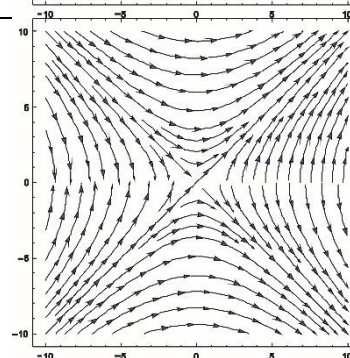
$$y'(x) y(x) = -x$$

Circonferenze concentriche



$$y'(x) y(x) = x$$

Fascio di iperboli equilateri



Concetto chiave: l'operatore antiderivata

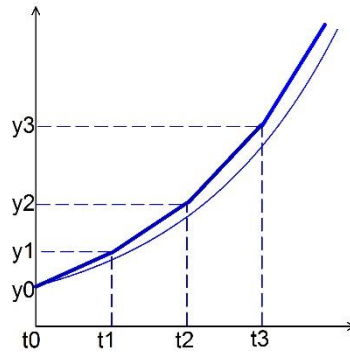
(concetto di primitiva, teoria dell'integrazione)

Discretizzazione del processo

Risoluzione per via numerica mediante linearizzazione

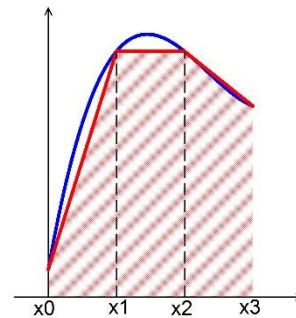
Algoritmo di Eulero

$$\begin{cases} t_0 & y_0 = x_0 & \text{start} \\ t_{n+1} = t_n + h & & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) & & \end{cases}$$



Integrazione numerica

Metodo dei trapezi



Grazie per l'attenzione

www.matematicaerealta.cloud