Georg Cantor: una singolarita' nel corso della storia?

Giovanni Sambin

Dipartimento di Matematica, Univ. di Padova

Pura o Applicata?
La Matematica tra Teoria e Problemi
Padova, 12-14 Aprile 2013

Aritmetizzazione dell'analisi

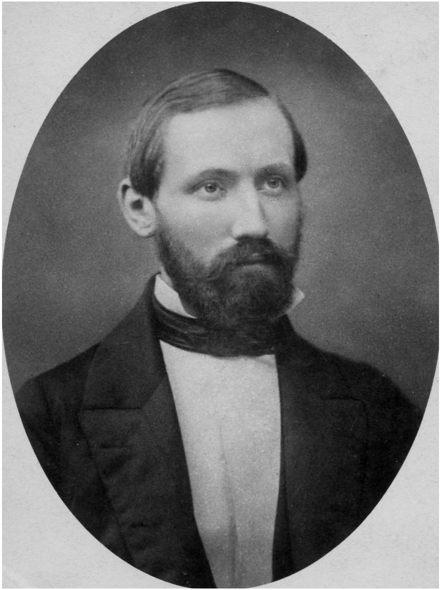
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 -1859

l'analisi matematica deve essere ridotta ai numeri naturali $\mathbb{N}$
$+$ sottoinsiemi di numeri naturali

i numeri reali si possono identificare con le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove ogni cifra a_n è 0 oppure 1.

corrispondenza tra successioni di $0, 1$ e sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{N}$:

> dato $A \subseteq \mathbb{N}$, poni $a_n = 1$ se $n \in \mathbb{N}$, e $a_n = 0$ altrimenti
>
> data la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, poni $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$



Bernhard Riemann 1826-1866

Richard Dedekind 1831-1916

Karl Weierstrass 1815 - 1897

Leopold Kronecker 1829 - 1891

Georg Cantor 1845 - 1918

Prime scoperte sulle cardinalità infinite

Definizione: due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità, scritto $A \sim B$, se esiste una funzione $f : A \to B$ con f iniettiva e suriettiva.

A ha cardinalità inferiore a B se se esiste $f : A \to B$ con f iniettiva.

Galileo osservò che c'è una corrispondenza tra numeri naturali e i loro quadrati.

L'osservazione di Galileo dice che $\mathbb{N}$ e il suo sottoinsieme $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ hanno la stessa cardinalità.

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
2	$\frac{2}{1}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{2}{5}$	$\cancel{\frac{2}{6}}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\cdots$
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{3}{3}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\cdots$
4	$\frac{4}{1}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$	$\frac{4}{3}$	$\cancel{\frac{4}{4}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\cdots$
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\cdots$
6	$\frac{6}{1}$	$\cancel{\frac{6}{2}}$	$\cancel{\frac{6}{3}}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\cdots$
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\cdots$
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\cdots$
⋮	$\vdots$								

L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile

Data una famiglia di insiemi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se A_n è numerabile per ogni n, allora anche l'unione $\bigcup A_n$ è numerabile

Idea per convincersi: c'è una biiezione tra tutto $\mathbb{N}$ e i soli numeri primi.

Per ogni n, dato che A_n è numerabile, è in biiezione con $\{{p_n}^k : k \in \mathbb{N}\}$

E ancora c'è posto... (vedi albergo di Hilbert)

Consequenza: i numeri algebrici sono numerabili (posso fare una numerazione di tutti i polinomi, e ogni polinomio ha un insieme finito di soluzioni)

Esistono cardinalità infinite diverse: discreto e continuo

Cantor 1873-4:

la cardinalità dei numeri reali $\mathbb{R}$ è maggiore di quella di $\mathbb{N}$

prova: vedi sotto quella data 20 anni dopo

conseguenza: esistono tantissimi numeri reali trascendenti, anzi, quasi tutti

contro ogni intuizione (lo vedo, ma non ci credo):

$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ piano e retta hanno la stessa quantità di punti!!!

Georg Cantor 1845 - 1918

Teorema di Cantor

Per ogni insieme A, indichiamo con $\mathcal{PA}$ l'insieme delle parti di A.

Teorema: Qualunque sia A, la cardinalità di $\mathcal{PA}$ è maggiore di quella di A

Prova: facciamo vedere che non può esistere una suriezione $F : A \to \mathcal{PA}$.

Per ogni $F : A \to \mathcal{PA}$ poniamo $D = \{a \in A : a \notin F(a)\}$.

Allora $D = F(b)$ per qualche b (in quanto F suriezione), da cui

$b \in F(b)$ sse $b \in D$ sse $b \notin F(b)$, contraddizione.

conseguenza: esiste una successione infinita di cardinalità crescenti

Bertrand Russell 1872 - 1970

Paradosso di Russell

Principio di comprensione: per ogni proprietà $P(x)$, la sua estensione $\{x : P(x)\}$ è un insieme.
Naturalmente, vale $y \in \{x : P(x)\}$ sse $P(y)$.

Scegliamo come proprietà: $x \notin x$. Allora $y \in \{x : x \notin x\}$ sse $y \notin y$.
Se chiamiamo $R = \{x : x \notin x\}$, si ha in particolare $R \in R$ sse $R \notin R$, contraddizione.

Ernst Zermelo 1871 - 1953
Assiomatizzazione delle teoria degli insiemi ZFC

David Hilbert 1862- 1943

La teoria ZFC (come ogni teoria assiomatica) deve essere non-contraddittoria, e la prova deve essere finitaria.

Kurt Gödel 1905 - 1978

La teoria ZFC (come ogni teoria assiomatica decente) non può dimostrare la proprio non-contraddittorietà.

Dalla consistenza alla conservatività

Gli insiemi infiniti sono enti ideali (=non esistono nealla realtà, servono solo a semplificare il nostro quadro mentale)

Nella storia, enti ideali sono stati: i numeri complessi, i punti all'infinito.

Questi sono stati accettati quando è stato chiaro (ad es. piano di Argand-Gauss) che gli enti ideali non modificano le conoscenze reali precedenti.

Richiesta di conservatività: ogni ente ideale introdotto deve essere conservativo sugli enti reali precedenti.

La conservatività è ancora più difficile della consistenza.

Via d'uscita: umiltà, un pezzetto alla volta...

la storia non ha fine...