L’espressione dell’arte nella Matematica: la catenaria

Definizione analitica ed applicazione in architettura, da Galileo a Gaudí

Roberto Sala

I.I.S. Alessandrini

Liceo Scientifico – opzione Scienze Applicate

Esame di stato, a.s. 2016/2017

Indice:

Presentazione

Il tema affrontato nella presente trattazione riguarda la scoperta, dal punto di vista matematico, della funzione catenaria e la sua successiva applicazione in architettura. Pur essendo un argomento poco conosciuto, è sorprendente come il tutto parta da un oggetto di uso comune e dalla curiosità di uno scienziato del XVII secolo, che per primo cercò di definirne una funzione matematica che ne descrivesse l'andamento: la traiettoria descritta da un filo appeso alle sue estremità, ipoteticamente inestensibile e flessibile, sottoposto soltanto al proprio peso. Questo scienziato fu Galileo Galilei che, non potendone dimostrare l'effettivo andamento, argomentò qualitativamente della curva descritta a partire dalla "catenella" (questo fu lo strumento utilizzato dal fisico pisano) approssimandola ad una funzione a lui ben nota, la parabola. Successivamente, alcuni dei matematici più importanti di fine '600 riuscirono, effettivamente, a descriverne il reale andamento nel piano, definendone da canonica funzione $f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h * \cosh\left(\frac{x}{h}\right)$, soprattutto grazie alle recenti scoperte in materia di calcolo infinitesimale, successive alla morte di Galileo.

Più di due secoli dopo, un architetto trentunenne fu in grado di sfruttare appieno la caratteristica peculiare di questa curva: la catenaria distribuisce, lungo tutto il suo arco, il proprio peso in modo omogeneo, proprietà dovuta al fatto che la tensione in ogni punto è sempre tangente alla traiettoria della curva. Questo architetto fu Antoni Gaudí che, ancora giovane, realizzò il progetto di quella che sarebbe diventata un'impressionante chiesa, simbolo della città di Barcellona: la Sagrada Familia.

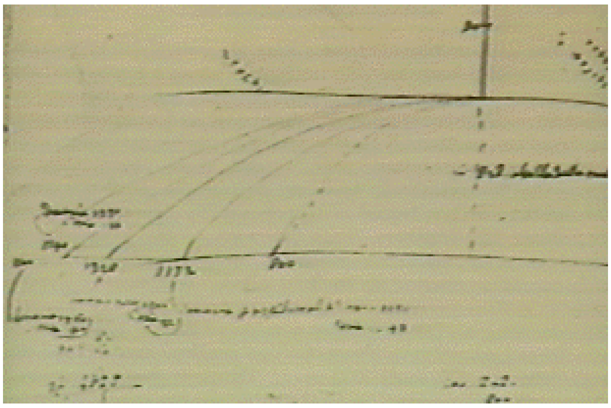
Prima di affrontare l'argomentazione, però, vorrei esprimere, in breve, il motivo della scelta di questo argomento. Durante il corso dell'anno scolastico, grazie ad una proposta della Professoressa Zeccara, ho seguito un corso di sei lezioni presso l'Università Bocconi, attraverso il quale ho potuto entrare in contatto con il mondo universitario. Traendo spunto da un articolo pubblicato dal Centro Pristem della stessa Bocconi (sottopostomi anch'esso dalla Professoressa) ho cercato di dimostrare matematicamente un'interessante proprietà che permette di costruire la catenaria: il fuoco di una parabola che subisce una "rototraslazione" lungo una propria retta tangente genera questa funzione. Inizialmente avevo preso il lavoro come una sorta di sfida personale, anche per il tempo dedicatoci. Essendo riuscito, in qualche settimana, a trovare una risoluzione grafica del problema, ho cercato anche di risolvere analiticamente la situazione in questione, arrivando alla dimostrazione che chiuderà l'intera argomentazione. Lo spunto per una trattazione così articolata l'ho avuto, successivamente, durante il viaggio di istruzione a Barcellona, dove sono entrato in contatto con un mondo che, sinceramente, non aveva suscitato in me interesse più di tanto. Sorprendentemente, sono rimasto stupito dalla bellezza architettonica delle opere realizzate dall'architetto catalano, tanto da aver voluto approfondire l'aspetto strutturale che mi ha incuriosito per il lavoro che già stavo conducendo.

Con questa trattazione, infine, ho cercato di mettere in luce la capacità e la bravura di alcuni uomini, che nella storia moderna e contemporanea sono stati in grado di esprimere la loro genialità attraverso opere che rimangono nella storia, in particolare Galilei e Gaudí. Spero, inoltre, di aver dato risalto non solo alla notevole sezione scientifica, con la definizione in fisica della curva e la dimostrazione matematica, ma di aver dato l'idea di una sorta di viaggio a partire dal 1638, anno di pubblicazione dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, fino ad oggi, toccando il pensiero di alcune delle menti più famose in questo arco temporale.

In conclusione vorrei ringraziare tutti i professori che hanno collaborato a questo lavoro, in particolare la Professoressa Zeccara per avermi seguito durante la realizzazione di tutto il lavoro e la Professoressa Del Gamba per l'aiuto nella stesura della sezione di filosofia. Si ringrazia, inoltre, la Professoressa Curcio dell'Università Bocconi per la collaborazione.

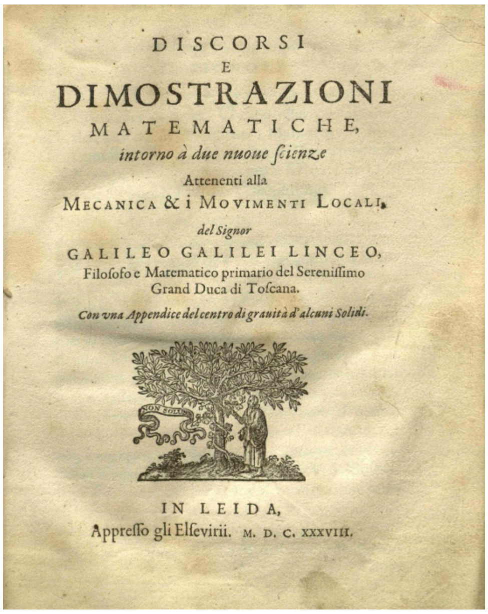
L'errore di Galilei

Intorno al 1600, periodo nel quale non erano ancora stati scoperti il calcolo infinitesimale e tutta una serie di operazioni matematiche, quali limiti, derivate ed integrali, i matematici del tempo si chiesero quale fosse la curva descritta da una "catenella" o da un filo appeso a due chiodi, sottoposta soltanto alla forza di gravità.



Galileo Galilei fu il primo a porsi il problema di una dimostrazione matematica della curva. Inizialmente pensò ad una parabola, non tanto per ciò che le "sensate esperienze" lo inducevano a credere, quanto per un'analogia con il moto dei proiettili che al momento Galileo stava studiando. Lo scienziato pensò che, così come il proiettile in moto in ogni istante è sottoposto a due azioni, una naturale che lo spinge verso il basso per effetto del suo peso e l'altra "equabile" che ha la direzione del movimento, anche ogni anello della catena fosse sottoposto alle stesse due azioni. Galilei riuscì a dimostrare la natura parabolica dell'orbita descritta dal moto del proiettile e pensò, nello stesso modo, di fare con la catena. In questo caso, però, Galileo non capì che, diversamente dal moto del proiettile, ogni anello della catena è sottoposto non solo alla forza peso, ma anche ad una seconda forza, tangente alla curva descritta: la tensione.

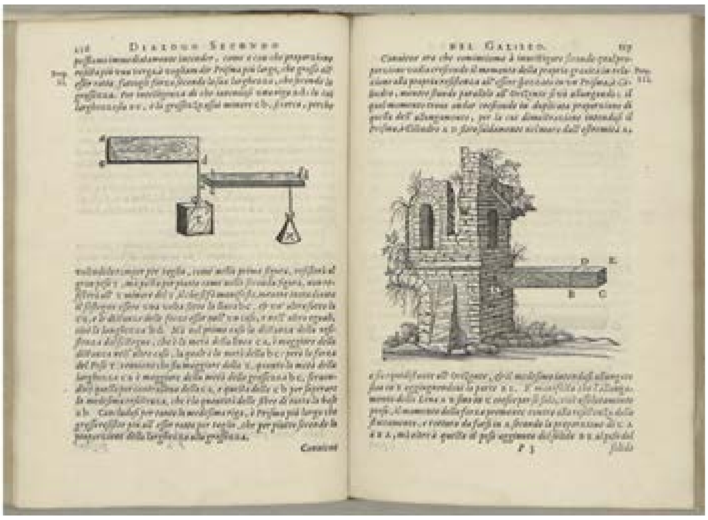
Piuttosto che teorizzarlo, però, Galileo mise in pratica il suo metodo verificando empiricamente la natura di questa curva. L'opera in cui ritroviamo questo argomento è *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, pubblicata nel 1638 nei Paesi Bassi, periodo durante il quale lo scienziato si trovava in confino presso Arcetri dopo il processo del 1633. La trattazione si configura come l'opera galileiana più importante della scienza moderna, che illustra e dimostra i principi della fisica classica (dinamica dei movimenti, in particolare) e della scienza delle costruzioni.


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

I Discorsi si sviluppano come un dialogo fra tre personaggi, gli stessi del celebre *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* del 1632, ambientato nella cornice rinascimentale di Palazzo Sagredo, sul Canal Grande a Venezia. I tre personaggi che dibattono fra loro temi scientifici rappresentano diversi punti di vista: Salviati interpreta il ricercatore innovatore e progressista; Simplicio rappresenta il dotto accademico, ancorato alla tradizione; Sagredo è il mediatore tra questi due opposti orientamenti, interessato anche agli aspetti tecnici ed economici delle nuove scienze.

L'opera si articola in quattro giornate, in ciascuna delle quali vengono dibattuti numerosi argomenti di fisica e matematica del tempo, tra i quali l'esistenza del vuoto, il galleggiamento dei corpi, la caduta dei gravi e le oscillazioni del pendolo (*I giornata*), i principi della dinamica (tra cui il principio d'inerzia), i moti rettilineo uniforme e uniformemente accelerato, il piano inclinato (*III giornata*), Elementi di geometria Euclidea (*IV giornata*) e molti altri. Lo scienziato italiano propose, inoltre, un'argomentazione inerente l'orbita parabolica del moto di un proiettile (*IV giornata*). Di questa teoria riporto il passo in cui Galileo esprime la sua teoria riguardo il moto "equabile" di un proiettile, che segue una traiettoria parabolica.


DIALOGO SECONDO

DEL GALILEO

"Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento: già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all'infinito; se invece intendiamo [questo piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all'estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all'ingiù dovuta alla propria gravità: ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto deorsum naturalmente accelerato, il quale [moto composto] chiamo proiezione. Un proietto, mentre si muove di moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto deorsum naturalmente accelerato, descrive nel suo movimento una linea semiparabolica".

Dal punto di vista filosofico è, quindi, interessante individuare il metodo scientifico di cui Galileo non parla esplicitamente, ma che utilizza nella sua indagine. Lo scienziato individua due momenti fondamentali:

- il momento risolutivo, che consiste nel risolvere un fenomeno complesso nei suoi elementi semplici, quantitativi e misurabili, formulando un'ipotesi matematica sulla legge da cui dipende;
- il momento compositivo, quello di verifica e di esperimento, attraverso cui si cerca di riprodurre artificialmente il fenomeno, di modo da verificare l'esattezza dell'ipotesi formulata, determinando così una legge.

Una prima introduzione a questo metodo la si può trovare nella lettera a Cristina di Lorena, datata marzo 1615, nella quale lo scienziato argomenta sul rapporto tra la conoscenza scientifica e la verità rivelata dalle Sacre Scritture. In quegli anni Galilei sosteneva pubblicamente il sistema copernicano eliocentrico, non conforme all'insegnamento della Bibbia. Della lettera ho cercato di estrarre i punti nei quali lo scienziato focalizza il discorso sul proprio metodo di indagine:

Stante, dunque, ciò, mi par che nelle dispute di problemi naturali non si dovrebbe cominciare dalle autorità di luoghi delle Scritture, ma dalle sensate esperienze e dalle dimostrazioni necessarie: perché, procedendo di pari dal Verbo divino la Scrittura Sacra e la natura, quella come dettatura dello Spirito Santo, e questa come osservantissima essecutrice de gli ordini di

Dio; ed essendo, di più, convenuto nelle Scritture, per accomodarsi all'intendimento dell'universale, dir molte cose diverse, in aspetto e quanto al nudo significato delle parole, dal vero assoluto; ma, all'incontro, essendo la natura inesorabile ed immutabile, e mai non trascendente i termini delle leggi impostegli, come quella che nulla cura che le sue recondite ragioni e modi d'operare sieno o non sieno esposti alla capacità degli uomini; pare che quello degli effetti naturali che o la sensata esperienza ci pone dinanzi a gli occhi o le necessarie dimostrazioni ci concludono, non debba in conto alcuno esser revocato in dubbio, non che condennato, per luoghi della Scrittura che avessero nelle parole diverso sembiante; poi che non ogni detto della Scrittura è legato a obblighi così severi com'ogni effetto di natura, né meno eccelentemente ci si scuopre Iddio negli effetti di natura che ne' sacri detti delle Scritture.

[...]

Mi occorre di considerar, prima, che delle proposizioni naturali alcune sono delle quali, con ogni umana specolazione e discorso, solo se ne può conseguire più presto qualche probabile opinione e verisimil coniettura, che una sicura e dimostrata scienza, come, per esempio, se le stelle sieno animate; altre sono, delle quali o si ha, o si può credere fermamente che aver si possa, con esperienze, con lunghe osservazioni e con necessarie dimostrazioni, indubitata certezza, quale è, se la Terra e 'l Sole si muovino o no, se la Terra sia sferica o no. Quanto alle prime, io non dubito punto che dove gli umani discorsi non possono arrivare, e che di esse per conseguenza non si può avere scienza, ma solamente opinione e fede, piamente convenga conformarsi assolutamente col puro senso della Scrittura. Ma quanto alle altre, io crederei, come di sopra si è detto, che prima fosse d'accertarsi del fatto, il quale ci scorgerebbe al ritrovamento de' veri sensi delle Scritture, li quali assolutamente si troverebbero concordi col fatto dimostrato, ben che le parole nel primo aspetto sonassero altramente; poi che due veri non possono mai contrariarsi.

[...]

Di qui e da altri luoghi parmi, s'io non m'inganno, la intenzione de' Santi Padri esser, che nelle quistioni naturali e che non son de Fide prima si deva considerar se elle sono indubitabilmente dimostrate o con esperienze sensate conosciute, o vero se una tal cognizione e dimostrazione aver si possa: la quale ottenendosi, ed essendo ella ancora dono di Dio, si deve applicare all'investigazione de' veri sensi delle Sacre Lettere in quei luoghi che in apparenza mostrassero di sonar diversamente.

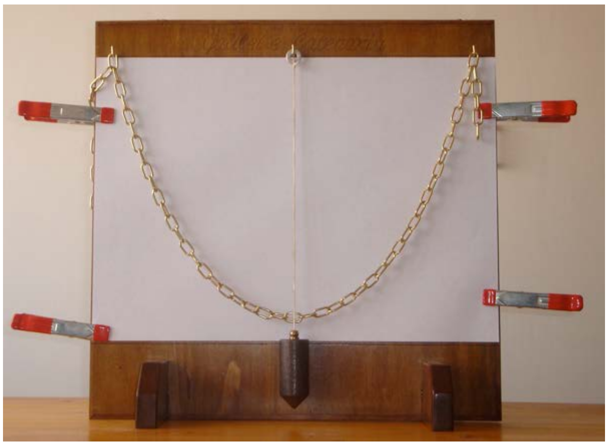
In questi passi è evidente il continuo richiamo alla Bibbia, in quanto lo scienziato cercava di ottenere, intuendo le difficoltà a cui sarebbe andato incontro a breve, il favore della Duchessa affinché lo proteggesse nei dibattiti romani.

Il fisico pisano parla di due elementi fondamentali nella ricerca scientifica:

- le *sensate esperienze*, termine con il quale ha voluto evidenziare il momento osservativo-induttivo della scienza; attraverso un'attenta ricognizione dei fatti e dei casi particolari, la scienza galileiana induce, sulla base dell'osservazione, una legge generale; per questo motivo viene indicato come momento "sperimentale";
- le *necessarie dimostrazioni*, invece, sottolineano il momento ipotetico-deduttivo della scienza. Le "matematiche dimostrazioni" sono i ragionamenti logici, condotti su base matematica, attraverso cui il ricercatore, partendo da un'intuizione di base e procedendo per supposizioni, formula le sue ipotesi, riservandosi di verificarle empiricamente.

Galileo afferma che l'induzione sperimentale e la deduzione teorica necessitano reciprocamente l'una dell'altra. Le "sensate esperienze", infatti, presuppongono sempre un riferimento alle "necessarie dimostrazioni", in quanto vengono assunte e rielaborate in un contesto matematico-razionale. Dall'altra parte le "necessarie dimostrazioni" implicano un richiamo alle sensate esperienze, essendo l'esperienza alla base delle "intuizioni geniali" ed acquisendo esse validità solo per mezzo della conferma sperimentale. Induzione e deduzione sono, quindi, indissolubilmente congiunte e si richiamano a vicenda.

Detto ciò è possibile analizzare ciò che Salviati afferma nella Seconda giornata dei *Discorsi*:



<u>Salviati:</u> *Modi di disegnar tali linee ce ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io: uno de i quali è veramente maraviglioso, poiché con esso, in manco tempo che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta e quaranta linee paraboliche, non men giuste sottili e pulite delle circonferenze di essi cerchi. Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda, non più grande d'una noce; questa, tirata sopra uno specchio di metallo, tenuto non eretto all'orizonte, ma alquanto inchinato, sì che la palla nel moto vi possa camminar sopra, calcandolo leggiermente nel muoversi, lascia una linea parabolica sottilissimamente e pulitissimamente descritta, e più larga e più stretta secondo che la proiezzione si sarà più o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza, il moto de i proietti farsi per linee paraboliche: effetto non osservato prima che dal nostro amico, il quale ne arreca anco la dimostrazione nel suo libro del moto, che vedremo insieme nel primo congresso. La palla poi, per descrivere al modo detto le parabole, bisogna, con maneggiarla alquanto con la mano, scaldarla ed alquanto inumidirla, ché così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigii. L'altro modo, per disegnar la linea, che cerchiamo, sopra il prisma, procede così. Ferminsi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti all'orizonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, aremo descritta un'intera parabola, la quale con un perpendicolo, che penda dal mezo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali. Il trasferir poi tal linea sopra le faccie opposte del prisma non ha difficoltà nessuna, sì che ogni mediocre artefice lo saprà fare. Potrebbesi anco con l'aiuto delle linee geometriche segnate su 'l compasso del nostro amico, senz'altra fattura, andar su l'istessa faccia del prisma punteggiando la linea medesima.*

Lo strumento in figura è molto simile a quello proposto da Galileo e consente di confrontare diverse catenarie con la parabola.

Lo stesso esperimento può essere effettuato punteggiando su un foglio di carta fissato sulla parete verticale dello strumento *la strada che fa essa catenella*. Galileo sostiene inizialmente che la curva descritta sia un arco di parabola.

Nella Quarta giornata dei Discorsi vi è un altro accenno alla catenaria: l'affermazione precedente circa la traiettoria parabolica descritta dalla catena sembra essere, in qualche modo, corretta: Salviati si esprime ora facendo pensare alla catenaria come approssimazione della parabola:

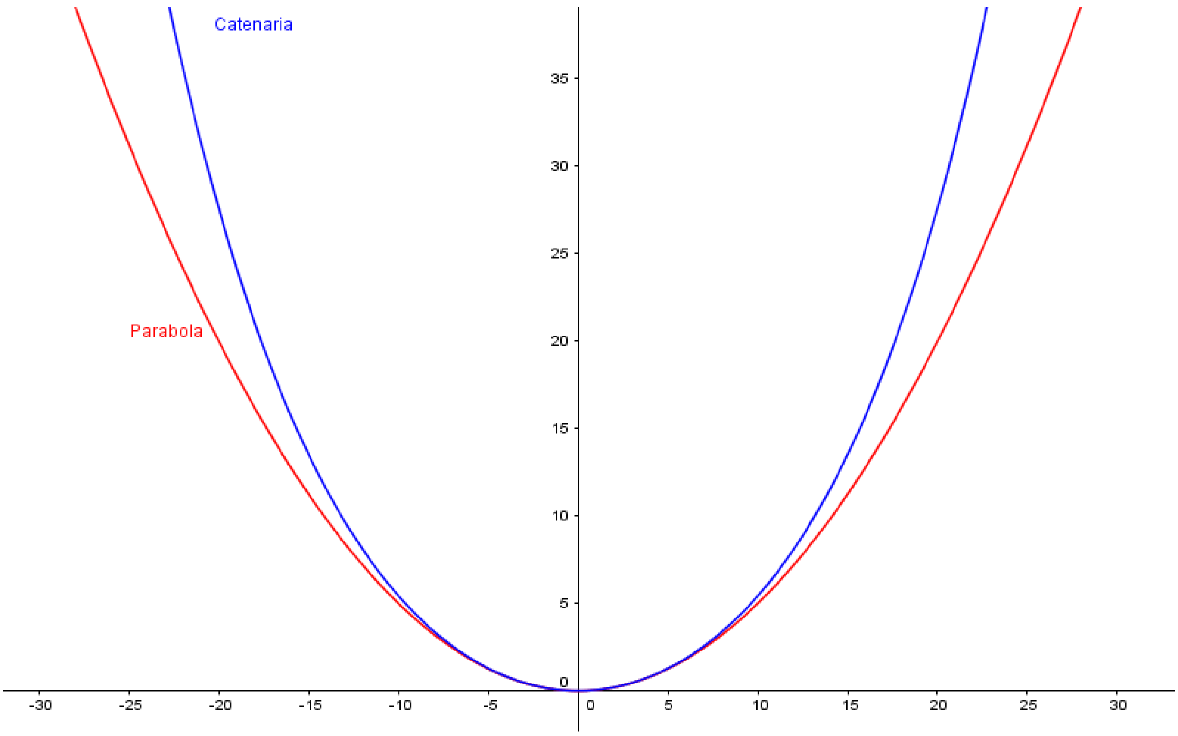
Sagredo: (...) E l'accidente è l'esser impossibile distendere una corda sì, che resti tesa dirittamente e parallela all'orizonte; ma sempre fa sacca e si piega, né vi è forza che basti a tenderla rettamente.

Salviati: (...) Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr. 45, la catenella camina quasi ad unguem sopra la parabola.

Ora Galileo precisa meglio il tipo di esperimento che suggerisce di fare, affermando che si può realizzare con il precedente strumento:

- si fissa sulla parete verticale un foglio sul quale si punteggia il cammino della catena;
- con un filo a piombo equidistante ai due chiodi si individua l'asse di simmetria della curva ottenuta e il suo vertice;
- si fa questo disegno su diversi fogli con catenelle *men curve*.

L'elevazione è l'angolo formato dalla curva e dalla retta orizzontale che passa per i due chiodi: Galileo sostiene che sotto i 45° la catenaria è meglio approssimata dalla parabola (come si può notare nell'immagine seguente).



Perché, allora, ho voluto parlare di "errore di Galilei"? Il fisico toscano, in fondo, non disponeva ancora dei mezzi matematici adeguati a risolvere un problema simile; pertanto ne approssimò la soluzione per "*elevazioni sotto a i gr. 45*", senza mai riuscire a definire una curva adeguata.

Sicuramente meno noto di altri, questo non fu l'unico errore commesso dallo scienziato italiano. Eclatante fu da parte sua l'errore riguardo la teoria delle maree, espressa nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*. Egli affermò che le maree non fossero una conseguenza (evidente, come già sottolineato da Aristotele) dell'attrazione della Luna e del Sole, bensì una conseguenza della combinazione dei moti di rotazione e rivoluzione terrestri. Questa teoria voleva, così, essere una prova a favore del sistema Copernicano. In quel caso Galilei diede prova della sua capacità intuitiva, avendo chiaro come i corpi all'interno di sistemi accelerati siano soggetti a forze "fittizie", ma si scontrò banalmente contro due dei cardini della sua scienza: il principio di inerzia, sostenendo che il moto circolare fosse uniforme, non uniformemente accelerato, e quello di relatività, affermando che dalla combinazione di due moti uniformi se ne generi uno accelerato.

Ancora più banale fu l'errore commesso nel *Saggiatore* (1623), romanzo scritto come una polemica rivolta ad un gesuita, Padre Sarsi, sulla natura delle comete. Mentre quest'ultimo affermava che le comete sono corpi celesti, esattamente come i pianeti, l'astronomo pisano era convinto del fatto che esse fossero soltanto fenomeni ottici provocati dall'atmosfera, come le aurore boreali.

In quest'ultima opera "tutta sbagliata", come afferma Odifreddi ("Hai vinto Galilei" – Lectio Magistralis. 2012, Palazzo Reale), Galileo scrive alcune delle sue parole più famose, estremamente corrette dal punto di vista scientifico:

"*Qualcuno forse stima che la filosofia sia un libro e una fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi è scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*"

Lo scienziato toscano afferma che la natura è un libro scritto a caratteri matematici; soltanto conoscendone il linguaggio è possibile interpretarne i meccanismi. Naturalmente, Galilei non poteva ancora disporre dei mezzi matematici che sarebbero stati inventati da lì a breve, a partire da Newton e Leibniz, affermando, quindi, che i caratteri nei quali questo grande libro è scritto sono le figure geometriche, risalenti alla tradizione greca (Euclide, Archimede, Pitagora). Tuttavia vorrei sottolineare l'importanza che lo scienziato attribuisce alla matematica nell'analisi della natura, la stessa che Antoni Gaudí conferì nei suoi capolavori tre secoli dopo.

Galileo ebbe, quindi, il merito di applicare, per primo, un metodo di indagine inedito agli scienziati del tempo, all'interno di un'opera fondamentale per quelle che oggi chiamiamo "scienza dei materiali" e "meccanica" (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, appunto); tuttavia non fu in grado di dimostrare che il moto effettivo della “catenella” non era una parabola, pur somigliandole, bensì quella che Huygens definì, nel 1690, “catenaria”.

Una sfida di fisica tra grandi matematici

Nel 1669 Joachim Jungius, nell'opera "Geometria empyrica", dimostrò che la curva descritta da una catena appesa a due chiodi, sotto l'azione della gravità, non è una parabola e che Galileo aveva commesso un errore. Quale curva fosse e quale equazione la rappresentasse rimaneva però un problema aperto.

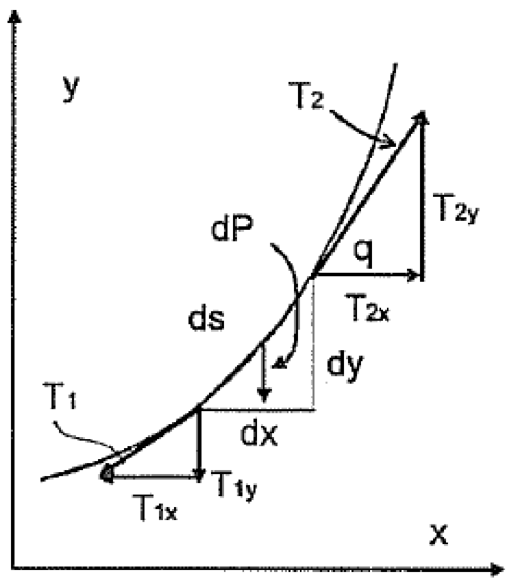
Johann Bernoulli, attraverso una rivista scientifica, lanciò nel 1690 una sfida ai più importanti matematici del suo tempo invitandoli a risolvere il problema di trovare una equazione per descrivere la curva-catena. La risposta fu data poco dopo nel 1691 da Huygens, Leibnitz, Johan Bernoulli, lo stesso Jacob Bernoulli, Herman e Gregory.

Huygens fu il primo ad usare il termine "catenaria" in una lettera a Leibniz nel 1690 e David Gregory scrisse nello stesso anno un trattato su questa curva.

Nello studio di questo come di altri problemi vennero introdotti nuovi metodi che costituirono le basi di quel calcolo che fu poi detto infinitesimale.

Si illustrano, ora, i calcoli effettuati che dimostrano che la curva ottenuta da Galileo è esattamente la funzione coseno iperbolico, come sarà definito, successivamente, nella dimostrazione matematica.

Si consideri una fune omogenea, inestensibile e totalmente flessibile, appesa ai suoi estremi. La corda, essendo totalmente pieghevole, è sottoposta ad una tensione ad essa tangente e si dispone in un piano verticale. Questa proprietà si stabilisce pensando all'equilibrio di un pesetto puntiforme appeso a due cordicelle divaricate ed osservando che le due tensioni e la forza di gravità sono complanari.



Si scomponga la catenaria in tanti archetti infinitesimi, di modo da considerare un tratto *ds* verosimilmente rettilineo, a patto di sceglierlo sufficientemente piccolo. Applicando il terzo principio della dinamica tra le varie parti della curva si perviene alla proprietà che la corda in equilibrio giace su un piano verticale. In questo piano si orientino gli assi cartesiani.

Si definiscono T_1 e T_2 le tensioni di un archetto *ds*, *dP* il suo peso. Per l'equilibrio nelle direzioni orizzontale e verticale si ha:

$$T_{1x} = T_{2x} = T_x$$

$dT_y = dP = \gamma g \; ds,$

con $\gamma = dm/ds$ (densità lineare della corda), dm massa infinitesimale della corda, s lunghezza del tratto e g accelerazione di gravità.

Si definisce α l'angolo formato tra *ds* e *dx*, la proiezione orizzontale del tratto *ds*. Dal significato geometrico di derivata risulta $T_y = T_x \; tan(\alpha) = T_x \; y'(x)$.

Sostituendo nella formula precedente risulta (svolgendo i calcoli):

$$d\big(T_x\, y'(x)\big) = \gamma g\, ds$$

$$T_x\, y''(x)\, dx = \gamma g\, ds$$

$$\frac{T_x}{\gamma g}\, y''(x) = \frac{ds}{dx}$$

Si definisce $\lambda = T_x/\gamma g$ e, applicando il significato fisico di derivata, risulta $\frac{ds}{dx} = s'(x)$. Pertanto,

$$\lambda\, y''(x) = s'(x)$$

L'equazione differenziale ha per soluzione

$$y = \lambda \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c$$

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y''(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Dalla relazione precedente

$$s'(x) = ds/\mathrm{dx}$$

calcolando il tratto *ds*, per il teorema di Pitagora,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Risulta, quindi,

$$s'(x) = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} = \sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}$$

Sostituendo con la soluzione dell'equazione differenziale, risulta

$$s'(x) = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}$$

Dalla relazione tra funzioni iperboliche $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, risulta $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$. Quindi,

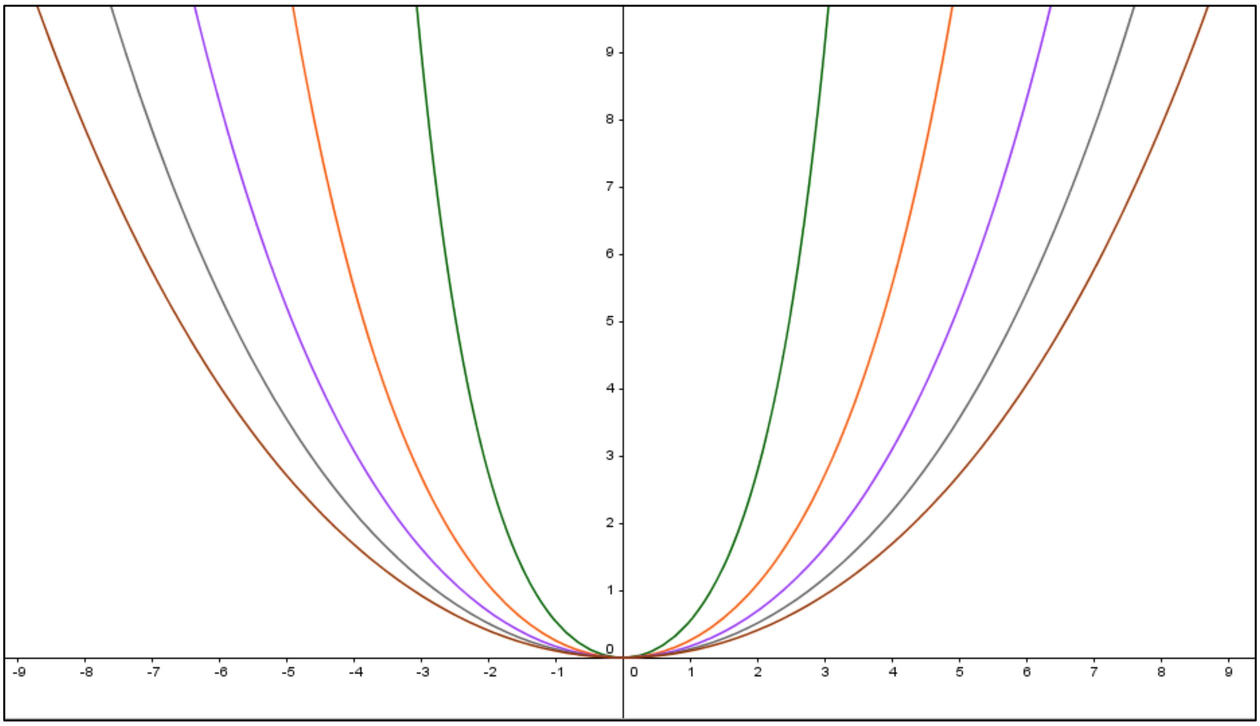
$$s'(x) = \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

che verifica l'equazione differenziale di partenza.

Si determini, ora, y_1: dal grafico risulta $y'(0) = 0$, $y''(0) > 0$; quindi la curva avrà un minimo nell'origine, $y(0) = 0$. Sostituendo nella funzione risulta $c = -\lambda$. La funzione che risolve il problema risulta

$$y = \lambda\left[\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - 1\right]$$

Graficamente, dando a λ i valori da 1 a 5, risulta quanto segue:



Si noti come la funzione risultante consideri la densità lineare della corda, che rimane pur sempre una costante. L'addendo "-1" tiene in considerazione il fatto che, in questo problema, la funzione passa necessariamente per l'origine. Non considerando tale addendo, risulta

$$y = \lambda \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\lambda\left(e^{\frac{x}{\lambda}} + e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)}{2}$$

l'equazione canonica della catenaria generica. Il problema proposto da Galileo fu così risolto poco più di 50 anni più tardi e fu utilizzato da un genio architettonico, che a cavallo tra XIX e XX secolo cambiò, con le sue opere, il volto della città di Barcellona, Antoni Gaudí.

La nascita e lo sviluppo di un genio

Antoni Gaudí Cornet, uno dei più grandi architetti degli ultimi due secoli, nacque il 25 giugno 1852 a Reus, nel periodo in cui la Catalogna era in piena rinascita economica e culturale, detto Reinaixença; a Barcellona si costruirono università, musei e vennero modernizzate le strutture pubbliche, giungendo ad un'innovazione architettonica senza precedenti.

Gaudí discendeva da una famiglia di modeste origini sociali, di calderai (artigiani che riuscivano a vedere un oggetto tridimensionale da una lastra di metallo), che gli permise da giovane, aiutando il padre ed il nonno, di acquisire una particolare abilità nel concepire gli spazi e la trasformazione dei materiali, fino a convertirsi nella genialità di cui diede prova nelle sue maestose opere architettoniche.

Da bambino trascorse lunghi periodi nelle montagne di Riudoms, a causa di una salute delicata, dove passò ore ed ore a contemplare e memorizzare i segreti della natura, considerata sua grande maestra e fonte della conoscenza più elevata in quanto opera del Creatore. Fu così che Gaudí ritrovò l'essenza ed il senso dell'architettura nel seguire i modelli da essa stessa creati, rispettandone sempre le leggi. Gaudí affermava che: "L'originalità consiste nel ritorno alle origini."

Nel 1870 si traferì a Barcellona per frequentare i corsi di architettura e svolgere contemporaneamente vari lavori che gli permettevano di pagare gli studi; fu uno studente irregolare che manifestava comunque indizi di genialità. Quando nel 1878 concluse gli studi presso la scuola di Architettura, il direttore dichiarò: "Non so se abbiamo conferito il titolo a un pazzo o a un genio, con il tempo si vedrà." Emerse da subito per la sua abilità nei lavori manuali, appresi fin da bambino, per l'eccellenza nel calcolo matematico e per l'acuto senso d'osservazione. In quegli anni iniziò a maturare in lui quel carattere innovativo proprio di un artista all'avanguardia. Ancora da studente collaborò come assistente alla modernizzazione del Parc de la Ciutadella, parco pubblico del quale l'architetto ridisegnò il sistema idrico naturale. Dopo aver ottenuto la laurea, Gaudí si stabilì per conto proprio presso l'ufficio della via Call, a Barcellona da dove cominciò a lavorare sulla sua inconfondibile eredità architettonica, in gran parte classificata come Patrimonio dell'Umanità.

Nel 1878 conobbe Eusebi Güell, importante imprenditore dalla spiccata propensione per le arti. In quel momento nacque non solo un rapporto cliente-architetto, bensì un vincolo di mutua ammirazione e passioni condivise su cui si basò un'amicizia che diede all'artista lo slancio professionale per sviluppare tutte le sue qualità artistiche. Oltre ai lavori svolti per Güell, Gaudí ricevette un gran numero di commissioni ed avviò numerosi progetti.

Il suo grande sogno era far rinascere l'architettura catalana con un nuovo stile, tramite forme espressive completamente nuove. La sua ricerca, però, restò confinata e non si trasformò in un movimento artistico vero e proprio, né coinvolse altri architetti.

Il primo incarico che rese famoso Gaudí risale al 1878, quando progettò Casa Vicens, ultimata dieci anni dopo. Emerse, così, il suo amore per le architetture gotiche e moresche, oltre che un esuberante gusto per la decorazione.

Durante la fase della maturità i capolavori si succedettero uno dopo l'altro: Torre Bellesguard, Park Güell, il restauro della cattedrale di Maiorca, la chiesa di Colonia Güell e Casa Batlló. Nel 1883 ricevette l'incarico per la realizzazione della Sagrada Familia ed il 3 settembre 1901 ottenne il Premio dal Municipio di Barcellona per la realizzazione della Casa Calvet.

Nel 1910 Gaudí ottenne un grande successo all'Esposizione del "Societé Generale des Beaux Arts" di Parigi. In questi anni si registrò nel suo stile un allontanamento dall'arte classica, riscontrabile nella costruzione di casa Milà. La sua tecnica, la ricerca di una sintesi tra il ricco bagaglio decorativo degli edifici e la struttura lineare e razionale, risulterà una tra le più innovative del '900.

Lo splendore dell'architettura Gaudíana coincise, curiosamente, con il progressivo ritiro dalle apparizioni pubbliche. Gaudí, che in gioventù aveva frequentato teatri, concerti e dibattiti, passò dall'essere un giovane dandy dai gusti culinari raffinati, a trascurare il proprio aspetto personale (andava in giro con una lunga barba e vestiti logori), mangiare frugalmente e rifuggire la vita sociale per dedicarsi ad un sentimento mistico e religioso.

Il 7 giugno del 1926, mentre camminava, assorto nei suoi pensieri, dalla Sagrada Família verso la chiesa di Sant Felip Neri, dove quotidianamente si recava a pregare ed a confessarsi, venne investito da un tram sulla Gran Via de les Corts Catalanes. Non avendo l'architetto documenti con sé, il conducente lo scambiò per un barbone e si limitò a spostare di lato il corpo per riprendere la corsa. Grazie all'intervento di due passanti, che non lo riconobbero a loro volta, fu trasportato all'Hospital de la Santa Creu dove morì due giorni dopo. Gaudí desiderava morire tra la gente semplice e pensava solo a prepararsi al meglio per l'imminente incontro con Dio. Per questo, dopo esser stato riconosciuto, rifiutò la proposta di esser spostato in una lussuosa clinica privata. Il giorno dei funerali tutta la città scese in strada per rendere l'ultimo omaggio a quello che venne riconosciuto come "l'interprete del popolo catalano".

Gaudí venne sepolto nella cripta della Sagrada Família, la sua opera più imponente.

Gaudí è considerato uno dei massimi esponenti del movimento del Modernismo catalano, colui che diede espressione di una genialità eccezionalmente rivoluzionaria e che fu artefice della nascita di un linguaggio architettonico personale ed incomparabile. Il suo segreto si nasconde nella natura: partendo da un'attenta osservazione dell'elemento naturale elabora un'idea che riesce a liberare e a innalzare all'estrema potenza, grazie al potere dell'immaginazione. Da grande uomo religioso, l'architetto crede che essa sia il dono che Dio conferisce ad ogni architetto. Senza metter freni all'immaginazione, Gaudí riesce a dar vita ad opere uniche ed irripetibili. Egli venne chiamato "l'architetto di Dio" per la spiritualità che traspare dalle sue opere.

È importante sottolineare le caratteristiche principali del movimento da cui Gaudí, pur creando uno stile architettonico proprio, emerse e sviluppò la propria arte.

Il Modernismo catalano

Il movimento artistico investì tra la fine del 1800 e i primi del '900 tutti i campi espressivi, dall'architettura alla pittura, dalla scultura alle arti decorative, che si manifesta con l'uso di forme irregolari e sinuose con ornamenti floreali. Questi furono anni caratterizzati da una crisi profonda, a metà tra l'ottimistica fede nel progresso scientifico, apparentemente inarrestabile, e un'apparente felicità che derivava da ciò, dato che la ricca borghesia appariva sfruttatrice e che lo sviluppo tecnologico rendeva l'uomo simile ad una macchina. All'interno di questo clima culturale si sviluppò, a partire dalla Francia, culla del Decadentismo, questa corrente artistica che si diffuse in breve tempo in tutta Europa.

Quello che in Italia è conosciuto come *Liberty*, in Francia è *Art Nouveau*, in Inghilterra *Modern Style*, in Spagna assunse il nome di *Modernismo*. Essi fanno in realtà parte di un'unica corrente artistica fiorita in tutta Europa a cavallo tra il *XIX* e *XX* secolo. Nonostante la diversità dei nomi, le caratteristiche del movimento sono simili in ogni paese:

- l'utilizzo del tema naturalistico: fiori, animali e creature fantastiche che inondano le facciate degli edifici, trasformandoli abilmente in un racconto fiabesco;
- la preferenza per i ritmi morbidi impostati sulla curva e sulle sue varianti come spirali e volute;
- l'insofferenza delle proporzioni e dell'equilibrio simmetrico che porta alla rottura della forma e del razionalismo architettonico.

Osservando un edificio modernista si è colpiti dai ritmi "musicali", dalla maestosità dell'edificio e dall'andamento morbido, ondulato e sinuoso, che conferisce vitalità ad un materiale rigido e freddo come la pietra.

Il movimento catalano cercò di recuperare motivi ed elementi della cultura tradizionale all'interno di nuove forme architettoniche, in relazione ai fenomeni artistici del resto dell'Europa, dando corpo all'aspirazione della ricca borghesia di modernizzare il paese, rilanciando le aspirazioni nazionalistiche ed autonomiste. Il Modernismo entra, così, a far parte della cosiddetta Renaixença, il movimento culturale, letterario e politico che auspicava il rinnovamento della cultura e della società catalana e la sua autonomia politica.

Della contemporanea cultura europea accolse le novità tecnologiche, i nuovi materiali e le decorazioni art nouveau, anticipando forme curve ed asimmetriche, l'uso frequente di motivi vegetali nei dettagli e l'integrazione nell'architettura di sculture e quadri. Si recuperarono, inoltre, forme e decorazioni della tradizione medievale, tecniche e materiali tradizionali come il mattone, il ferro battuto e la ceramica.

La rivoluzione industriale di questo periodo portò nelle varie città europee una voglia di novità e di ottimismo, sentimenti tradotti in arte dal Modernismo; non è casuale l'utilizzo insistente del motivo floreale, simbolo della primavera portata alla società dallo sviluppo tecnologico. Questa corrente si espresse unicamente in quei paesi in cui era stato raggiunto un certo grado di sviluppo industriale quale, unica in Spagna, la città di Barcellona: i capolavori dell'architettura modernista, infatti, possono essere ammirati soltanto in Catalogna. Nel quartiere della Dreta de l'Eixample si trova il nucleo degli edifici modernisti più importanti di tutta Europa.

Tra il 1900 e il 1912 vennero edificati veri e propri capolavori architettonici, commissionati dai ricchi borghesi dell'epoca, che volevano ostentare la propria ricchezza ed il proprio prestigio attraverso edifici originali e spettacolari: Batlló, Güell e Milà, ad esempio, per i quali Antoni Gaudí realizzò gli edifici che da essi presero il nome. Questa volontà di innovazione, tra fine Ottocento e inizio Novecento, colpì non soltanto gli edifici privati, ma anche farmacie, pasticcerie, forni e negozi vari, che iniziarono ad imitare lo stile decorativo delle residenze borghesi. L'arte e la bellezza inondarono la vita quotidiana di Barcellona in un momento di grandi trasformazioni culturali, economiche, sociali ed urbanistiche che trasformarono la città in una metropoli.

Gaudí creò all'interno del Modernismo uno stile personale che ancora oggi stupisce per la capacità visionaria. Pur essendone il personaggio meno organico ne è divenuta la figura emblematica, fino ad oscurare la complessità del movimento stesso.

Avendo, così, inquadrato il movimento artistico, si può parlare delle opere più importanti di Gaudí, nelle quali l'architetto catalano utilizza l'intuizione di alcuni matematici del *XVII* secolo per realizzare edifici maestosi e spettacolari.

Casa Milà

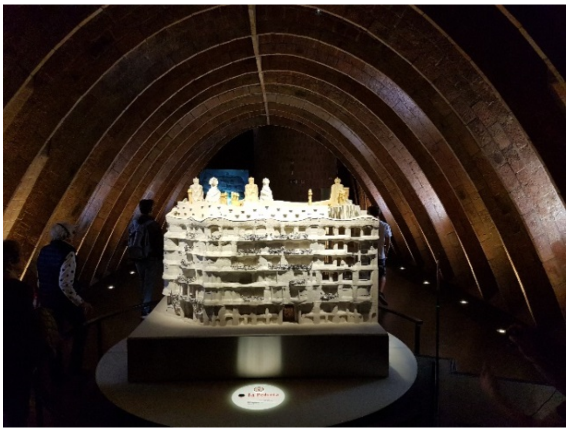
Casa Milà, detta La Pedrera (cava di pietra), è certamente una delle opere più importanti realizzate da Gaudí a Barcellona. Essa fu costruita tra il 1905 e il 1912 al numero 92 del celebre Passeig de Gràcia, su incarico del grande industriale dell'epoca, Pere Milà, e della futura moglie.

Come si può notare passeggiando lungo il viale sempre affollato, l’edificio occupa un lotto angolare ed è composto da sei piani, ognuno dei quali costituito da otto appartamenti; due cortili interni, visibili sia dal piano inferiore, sia dal tetto, garantiscono un’elevata luminosità a tutti gli appartamenti.

Gaudí progettò l'abitazione mantenendo fede all'indirizzo del Modernismo catalano da lui personalizzato, esaltando appieno il suo spirito innovatore per quanto riguarda sia le strutture, sia le forme architettoniche e le decorazioni, ed adottando come elemento fondante la linea curva, zoomorfa, richiamante l'immagine delle onde del mare, che trionfa in svariati motivi presenti nella struttura tra i quali la facciata, gli ambienti interni e gli stessi mobili che l’architetto disegnò.

La facciata esterna è rivestita di pietra grezza, particolarità che le valse l'appellativo de La Pedrera: l'edificio, privo di linee rette, presenta l'aspetto di parete rocciosa, ondulata, plasmata da forze geologiche: perfino le piante dei cortili interni e degli appartamenti seguono un disegno curvilineo. La struttura, infatti, è costituita da una griglia irregolare di travi metalliche e di pilastri di dimensioni e materiali variabili, all'interno della quale si trovano le tradizionali volte catalane in laterizio che permettono una disposizione libera delle divisioni interne.

Il piano interrato è costituito da un grande vano coperto con una struttura metallica a "ruota di bicicletta", mentre il sottotetto presenta una copertura sostenuta da un gran numero di archi a sezione catenaria, che danno l'idea di una struttura scheletrica. È interessante notare come questa struttura, oltre ad essere un motivo ricorrente nelle opere di Gaudí, garantisca il sostegno al tetto sovrastante essendo la struttura che meglio distribuisce il peso lungo tutto il suo arco come dimostrato nella sezione “Una sfida di fisica tra grandi matematici”).



Interessanti sono, poi, le decorazioni sul tetto che, distribuendosi in modo irregolare lungo vie ondulate, curve, attraverso le quali si passa mediante una serie di scale e sotto archi catenari, risultano perfettamente inserite all’interno del ricamo paesaggistico della città di Barcellona. Ponendo l’attenzione a due degli archi catenari del tetto, è interessante notare come questi “inquadrino” da un lato la Sagrada Familia e, dall’altro, Montjuïc.

A livello tecnico l’architetto catalano decise di utilizzare il cemento armato come elemento base, sul quale poi sovrappose i materiali di copertura, come azulejos frammentati e la pietra viva. Grazie al cemento armato (egli fu tra i primi ad utilizzarlo) poté permettersi di creare corpi fortemente aggettanti (che sporgono fortemente verso l’esterno) che stupirono i contemporanei per l'assenza di piloni che li reggessero. Anche le pareti interne degli appartamenti sono semplici muri divisori, in quanto sono totalmente assenti i muri portanti.

Tra gli altri materiali fortemente innovativi dal punto di vista tecnico, utilizzati per realizzare La Pedrera, si trovano il ferro battuto, utilizzato nelle porte, nei balconi, nel cancello di ingresso e nella struttura stessa dell'abitazione, e il vetro armato che costituisce la pavimentazione trasparente di diversi balconi presenti nella struttura.

Dell’intero edificio attualmente è possibile visitare l'androne, il tetto e un appartamento arredato con mobili d'epoca, in parte progettati dallo stesso Gaudí.

Dal 1984 Casa Milà è stata dichiarata dall'Unesco Patrimonio Mondiale dell'Umanità.

Parc Güell

Parc Güell, uno dei simboli di Barcellona, è un parco pubblico di 18 ettari, con giardini ed elementi architettonici, situato nella parte superiore della città di Barcellona sul versante meridionale del Monte Carmelo. Disegnato dall'architetto catalano Antoni Gaudí a carico dell'impresario Eusebi Güell, fu costruito tra il 1900 e il 1914 e fu inaugurato come parco pubblico nel 1926.

Il Parco, riflesso della pienezza artistica di Gaudí, appartiene alla sua tappa naturalista (primo decennio del ‘900), periodo in cui l'architetto perfeziona il suo stile personale, fondato sul Modernismo catalano, attraverso l'ispirazione delle forme organiche della natura. L'architetto raggiunge una grande libertà creativa e un'immaginativa creazione ornamentale; partendo dall’architettura barocca, le sue opere acquisiscono una grande ricchezza strutturale, di forme e volumi sprovvisti di rigidità o di una qualsiasi premessa classica. In Parc Güell, Gaudí ha espresso tutto il suo genio architettonico e ha messo in pratica molte delle sue innovazioni strutturali.

Il conte Güell progettò di convertire il versante di Monte Carmelo in una struttura urbanistica nella quale si sarebbero situati alcuni alloggi di alto livello, con tutti i progressi tecnologici dell'epoca per procurarsi il massimo comfort, con alcuni elaborati di grande qualità artistica. La sua richiesta, commissionata a Gaudí, era quella di un parco-giardino in stile inglese, dove cittadini e turisti potessero rilassarsi godendo di una vista mozzafiato di tutta Barcellona. Allo stesso tempo, crearono un complesso colmo di un forte simbolismo che il committente e l'architetto condividevano, provenienti dal catalanismo politico (nella scalinata di accesso, dove si rappresentano i paesi catalani) e dalla religione cattolica (nel Monumento al Calvario ideato come parrocchia).

Il progetto, però, fu un disastro commerciale: si prevedevano di costruire circa 60 abitazioni disseminate in un immenso giardino, con una vista panoramica su tutta la città; esso prevedeva, inoltre, alloggi, studi, una cappella ed un parco, ma fu acquistato solo uno dei lotti e furono completate soltanto due abitazioni. In una delle due abitazioni edificate abitò lo stesso Gaudí fino al suo trasloco definitivo nel cantiere della Sagrada Família. La città di Barcellona, nel 1922, acquistò e trasformò Parc Güell in parco pubblico.

Gaudí cercò di conservare l'andamento naturale del terreno in rilievo, lasciando libero sfogo alla sua immaginazione e generando un'opera originale dal profilo sinuoso. Per la sua costruzione fece ricorso alla tecnica del *trencadìs*, consistente nell'unione di frammenti di ceramica e pezzi di vetro colorati, al fine di riprodurre una sorta di mosaico con materiali di scarto. Oltre alle variopinte tessere colorate, è possibile ammirare le sculture in calcestruzzo, che rappresentano tutto un universo di animali fantastici. Nello stile Gaudíano c'è quello di legare la natura all'arte, come si può notare lungo la passeggiata coperta fatta di colonne che hanno le forme dei tronchi degli alberi o delle stalattiti, le fontane e le arcate artificiali di roccia.

In cima alla scalinata principale con la fontana a forma di salamandra (simbolo dell'alchimia e del fuoco) si trova la "sala delle 100 colonne" (benché soltanto 85 siano state completate), situata sotto la piazza centrale del parco. La piazza è delimitata da un sedile sinuoso, un serpente di 150 m di lunghezza costituito da mosaici e tessere colorate. La panchina è uno degli elementi decorativi più straordinari dal punto di vista architettonico e artistico del Parco.

Nelle altre zone del parco Gaudí creò spazi altrettanto fantastici, dove ponti in cemento armato sembrano strutture ottenute dalla scultura della roccia, dissimulando l'incredibile sforzo architettonico.

Da qualsiasi prospettiva Parc Güell appare straordinario e difficilmente si dimenticano le forme, i colori e lo stile di Gaudí. Essendo il Parco molto ampio, è interessante evidenziarne alcune caratteristiche peculiari:

- le due case con i tetti a forma di fungo e le cupole ornate da dettagli colorati;
- la scalinata dominata dalla salamandra decorata con ceramiche e vetri rotti;
- la "sala delle 100 colonne", che sostengono la terrazza. Il soffitto è costellato da simboli religiosi, mitologici e astrologici elaborati con il mosaico;

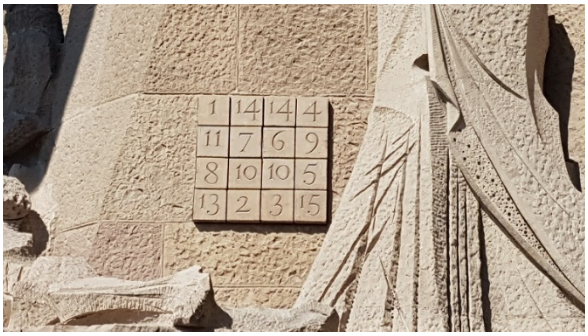
- la panca della terrazza di Parc Güell, dalla quale è possibile godere di una vista spettacolare di Barcellona. Completamente adornata a mosaico delimita l'area di tutta la terrazza panoramica;
- il monumento al Calvario, situato in uno dei punti più alti del parco, dal quale è possibile anche vedere il versante opposto di Monte Carmelo.

Passeggiando per il Parco, si possono particolarmente apprezzare le passeggiate coperte, delimitate dalle colonne che creano una sorta di ponti tra le diverse vie percorribili all'interno del parco. Alcune di esse presentano la struttura ad arco catenario come sostegno, prova del fatto che l'architetto catalano ha voluto imprimere la propria firma non solo con le peculiarità del Modernismo catalano, ma anche attraverso la sua intelligenza architettonica e matematica. La catenaria può essere considerata la firma visibile e tangibile di Gaudí a Barcellona.

Nel 1984 l'Unesco ha incluso, assieme a Casa Milà, il parco Güell nell'elenco dei patrimoni dell'umanità nella sezione "Opere di Antonì Gaudí".

Sagrada Familia

Il "Temple Expiatori de la Sagrada Família" è considerato il simbolo della città di Barcellona, oltre che il capolavoro rappresentativo dell'architetto Antoni Gaudí, che le dedicò l'ultima parte della sua vita. Dal 1884 sino al giorno della sua improvvisa morte, l'architetto si dedicò instancabilmente alla costruzione della "cattedrale dei poveri", senza mai allontanarsi dal cantiere, neppure per dormire. Infatti, nonostante avesse una piccola casetta nel centro storico di Barcellona, si era ricavato un angolino nella Sagrada Familia dove studiare e lavorare, giorno e notte.



Iniziati nel 1882 in stile neogotico dall'architetto diocesano Villar, i lavori per l'enorme chiesa vennero assunti l'anno seguente da Gaudí, che subentrò come progettista all'età di 31 anni e ridisegnò completamente il progetto dell'opera. In quegli anni l'architetto elaborò la pianta definitiva che prevedeva una struttura a croce latina a cinque navate e un deambulatorio in cui si aprivano cappelle radiali secondo una configurazione planimetrica tipicamente gotica; l'altare maggiore sarebbe sorto sopra la cripta, circondato da sette cappelle absidali, un transetto a tre navate con i portali della

Natività e della Passione. La chiesa avrebbe avuto una dimensione di 110 × 80 metri, per una capacità di 14000 persone.

Nel progetto erano previste diciotto torri che avrebbero dovuto simboleggiare i dodici apostoli, i quattro evangelisti, la Vergine e Gesù; la torre dedicata a Cristo, alta 170 metri, dovrebbe sovrastare in altezza tutte le altre, sormontata da una croce a sei bracci alta 15 metri. L'altezza totale dell'edificio sarà, a progetto concluso, inferiore di mezzo metro rispetto a quella del Montjuïc, poiché Gaudí riteneva che la sua creazione non dovesse superare quella di Dio.

Nel progetto erano previste tre facciate, ciascuna dedicata ad un episodio della vita di Cristo, due delle quali già realizzate: la facciata della Natività, l'unica che l'architetto riuscì a compiere, e la facciata della Passione; su quest'ultima è possibile notare il cosiddetto "quadrato magico", in quanto la somma dei numeri per righe, colonne e diagonali dà lo stesso risultato (in questo caso 33 a simboleggiare gli anni di Cristo). Da ultima la facciata della Gloria, non ancora realizzata. Il discorso sulle facciate sarà approfondito successivamente.

Quando Gaudí prese in mano la direzione dei lavori della Sagrada Familia, soltanto la cripta era stata realizzata. Il nuovo architetto decise di non stravolgere quello che già era stato costruito: modificò soltanto i capitelli, passando da uno stile corinzio ad uno ispirato alle forme vegetali. Il progetto di Gaudí evolveva, quindi, da uno stile neogotico ad uno naturalista, ispirandosi a tronchi di alberi ed allo scheletro umano, ritenendo che non esistesse struttura migliore.

Gaudí concepì la struttura della chiesa attraverso un elemento fondamentale: l'arco parabolico o catenario, utilizzato in quanto elemento più appropriato a sopportare le pressioni. L'architetto determinò la forma migliore che la struttura potesse avere per resistere alla pressione degli archi e delle volte mediante simulazioni polifunicolari, modelli in scala costituiti da corde intrecciate con piccoli sacchi di juta sospesi a simulare i pesi. Partendo dallo stato dei carichi determinò sperimentalmente la forma idonea della struttura: la catenaria riproduceva la struttura ideale per lavorare in trazione e, ribaltandola, quella più adatta per lavorare in compressione. L'architetto afferma che" Le *volte siano dei paraboloidi iperbolici, simbolo della Trinità*". Gaudí progettò l'interno della Sagrada Familia come se fosse un bosco, con colonne a forma di alberi che si dividono formando i rami che sostengono la struttura. Le colonne sono inclinate in modo da ricevere al meglio la pressione perpendicolare alla loro sezione, secondo la struttura ad arco catenario, e sono realizzate a forma elicoidale a doppia elica, a riprodurre rami e tronchi.

Vicino alla chiesa, Gaudí costruì vari edifici, quali la casa del cappellano, un semplice edificio di mattoni cui furono affiancati altri vani destinati al lavoro di Gaudí, e la scuola della Sagrada Familia, un piccolo edificio realizzato per i figli degli operai che lavoravano nel cantiere dell'opera.

L'architetto concepì una complessa iconografia basata unicamente sulla condizione della Chiesa Cattolica e sul culto religioso. Per Gaudí, infatti, la Sagrada Familia è un inno di lode a Dio: l'esterno del Tempio dovrebbe rappresentare la Chiesa attraverso gli Apostoli, gli Evangelisti, la vergine Maria e Gesù, la cui torre principale simboleggerebbe il trionfo della Chiesa; l'interno, invece, dovrebbe simboleggiare la Chiesa universale e la Gerusalemme celeste. Una delle necessità primarie di Gaudí era quella di realizzare «un'opera aperta», in perpetua costruzione. Il compimento della Sagrada Familia avrebbe dovuto fondarsi su principi teorici secondo cui la linea dritta sarebbe propria dell'uomo, quella curva della natura e soprattutto di Dio. Gaudí era certo di assolvere un compito assegnatogli dal cielo: "*Nella Sagrada Familia tutto è frutto della Provvidenza, inclusa la mia partecipazione come architetto… è la Provvidenza che, secondo i suoi disegni, porta a termine i lavori".* L'architetto era consapevole del fatto che non avrebbe potuto completare l'opera nell'arco della sua vita e lavorò in modo da lasciare un modello sul quale le generazioni future avrebbero proseguito i lavori.

Alla morte dell'architetto, nel 1928, risultava terminata solo la prima delle quattro torri della facciata della Natività, portata a compimento solo dieci anni più tardi. Nel 1976, sulla base di un disegno di Gaudí venne conclusa anche la facciata della Passione, ma i lavori procedevano con grande lentezza, a causa delle ristrettezze finanziarie. Edificata grazie alle elemosine raccolte per decenni, nella Sagrada Familia si avverte profondamente il distaccamento dell'artista dalla tradizione storica, in favore di un'invenzione libera e fantastica, che sorprende ed incuriosisce per le sue linee curve, le forme bizzarre, i colori vivaci dovuti all'uso della ceramica e del vetro, con un evidente richiamo alla natura che, come disse Gaudí, è "*il grande libro sempre aperto che bisogna sforzarsi di leggere*", considerata opera di Dio.

Di particolare rilievo, come citato in precedenza, sono le tre facciate della chiesa, che rappresentano la vita umana di Gesù, dalla sua nascita alla morte, attraverso una simbologia accurata e dettagliata che è in grado di raccontare ciò che è scritto nei Vangeli.

La Facciata della Natività, simbolicamente rivolta a oriente, dove sorge il sole, poiché "*da lì comincia tutto, tutte le speranze e tutta l'attrattiva*", simboleggia la Vita ed il Godimento. Questa facciata presenta decorazioni di giubilo in cui tutti gli elementi evocano la vita e si concentra sul lato umano e familiare di Cristo, con una profusione di elementi popolari come strumenti da lavoro e animali domestici. Gaudí, essendo consapevole di non poter completare l'opera, decise di costruire completamente questa facciata per dare un'idea globale della struttura e delle decorazioni. Scelse questa facciata perché, a suo parere, poteva essere la più attraente per il pubblico, incoraggiando così la continuazione dell'opera dopo la sua morte.

La Facciata della Passione, simbolo della desolazione, del dolore e della morte di Gesù Cristo, si presenta nuda, con forme semplici ed ornamenti scarni, quasi a rispettare lo stesso dolore del Cristo. Essa intende riflettere la sofferenza di Cristo nella sua crocifissione, come riscatto dei peccati degli uomini. Gaudí concepì una facciata più austera e semplificata, senza ornamenti, in cui si distingue la nudità della pietra, in modo da somigliare a uno scheletro, ridotta alle semplici linee delle sue ossa. I tre portali della facciata riportano tutte le tappe, descritte nei Vangeli, percorse da Gesù lungo la Via Crucis.

La Facciata della Gloria, quella principale della chiesa e la più grande, dà accesso alla navata centrale. L'opera, dedicata alla gloria celeste di Gesù, rappresenta il cammino verso l'alto e quindi verso Dio. Vi sono rappresentate la Morte, il Giudizio Finale e la Gloria ma anche l'Inferno, per chi si discosta dai dettami di Dio. Nella facciata sono rappresentate anche le Beatitudini, le opere di misericordia corporale e spirituale e tutta una serie di immagini tratte da Antico testamento. La facciata, orientata a mezzogiorno, rappresenta l'uomo all'interno della creazione. La porta principale, composta da due lastre di bronzo del peso di due tonnellate ciascuno, presenta il secondo paragrafo del Padre Nostro ("Dacci oggi il nostro pane quotidiano") in cinquanta lingue diverse.

La chiesa è stata consacrata, non conclusa, il 7 novembre 2010, da papa Benedetto XVI, che l'ha elevata al rango di Basilica minore; secondo previsioni la fine dei lavori dovrebbe essere datata 2026.

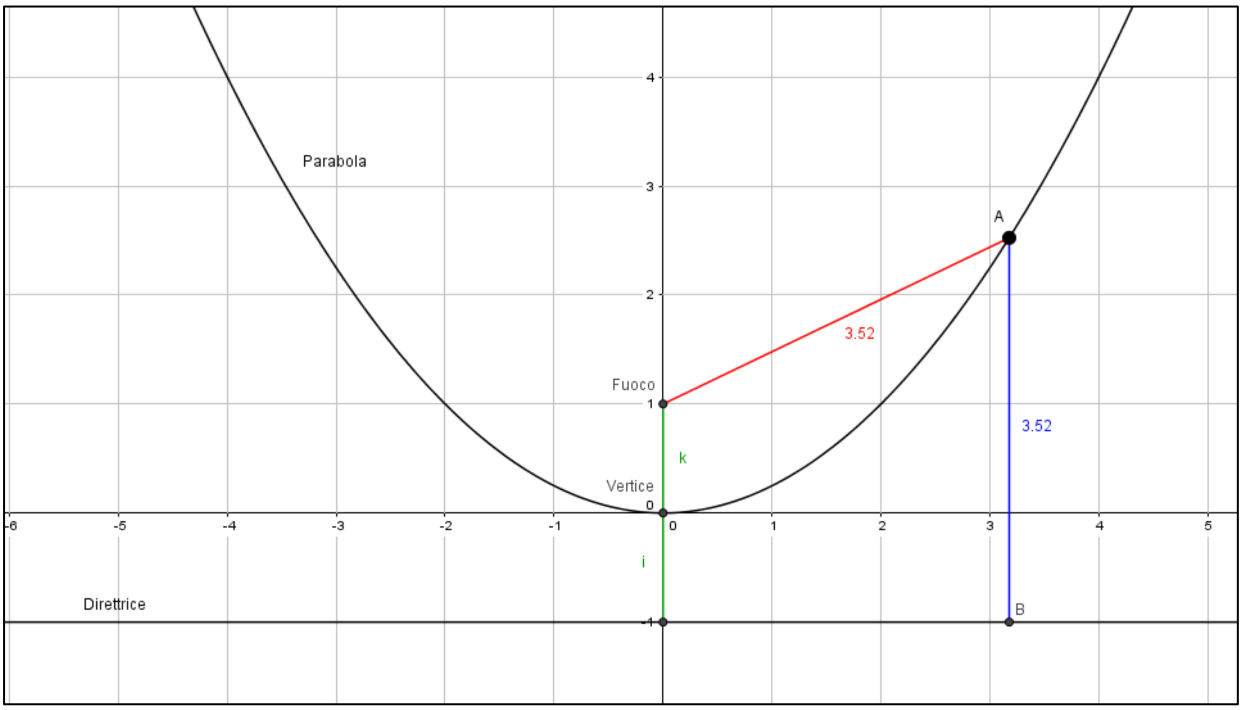
Una dimostrazione matematica

In matematica, si definisce "catenaria" la curva secondo cui si dispone una fune, supposta omogenea, flessibile ed inestensibile, appesa a due punti estremi, che sia lasciata "pendere" o cadere soggetta soltanto al proprio peso.

È possibile dimostrare che il fuoco della parabola di equazione $y = x^2$ che viene "rototraslata" rispetto alla tangente in un suo qualsiasi punto genera una curva descritta dalla funzione iperbolica definita come catenaria, la cui equazione risulta $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, se si considera la funzione standard. In generale, l'equazione della catenaria presenta un parametro, h, che, graficamente, allontana o avvicina i due estremi sui quali è stata appesa la fune e allontana o avvicina dall'origine il minimo della funzione, così da risultare $f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$. È interessante notare come il parametro h sia strettamente legato al parametro k utilizzato nelle parabole di equazione $y = ax^2$ per definire la distanza tra il fuoco e il vertice; entrambi, infatti, sono legati al coefficiente a della parabola dalla relazione $k = h = \frac{1}{4a}$, come verrà dimostrato di seguito.

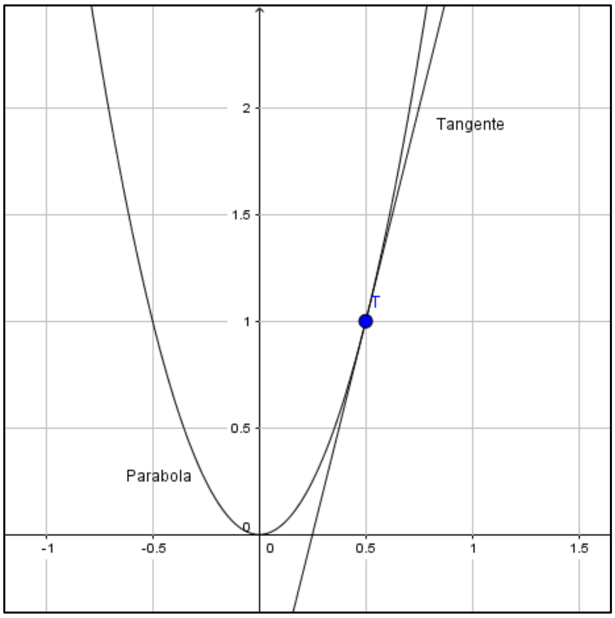
Prima di dimostrare la relazione è necessario definire alcuni termini utilizzati in essa:

PARABOLA: luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fissato, detto fuoco, e da una retta che non passa per il punto, la direttrice, la cui distanza dal punto, 2k, è importante in quanto definisce l'ampiezza della parabola. Il vertice è il punto della parabola più vicino a fuoco e direttrice e, per definizione, si trova ad una distanza k da entrambi. Ai fini della dimostrazione non è tanto importante illustrare tutte le formule utili per calcolare i diversi elementi della parabola o la funzione stessa, quanto sapere che essa è una curva piana, una funzione di secondo grado, disegnabile in un sistema di riferimento di assi cartesiani a due dimensioni. La sua equazione generale è $f(x) = ax^2 + bx + c$, se si considerano tutte le parabole ad asse verticale nel piano cartesiano, traslate rispetto all'origine degli assi; ai fini della dimostrazione basterà prendere in considerazione soltanto le parabole con asse



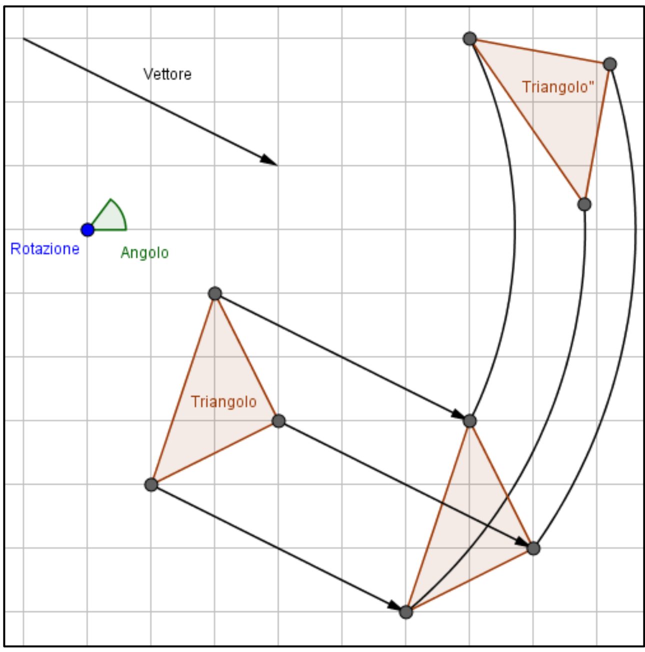
verticale, passanti per l'origine e con concavità rivolta verso l'alto. Pertanto, i coefficienti b e c saranno nulli e il coefficiente a, importante per quanto detto in precedenza, dovrà per convenienza essere positivo. Si considerano, quindi, unicamente le parabole di equazione $f(x) = ax^2,\ \ a > 0$.

RETTA TANGENTE: graficamente è la retta (di equazione generale $f(x) = mx + q$, con m coefficiente angolare o "pendenza" della retta, q quota o intersezione con l'asse delle ordinate) che "attraversa" soltanto in un punto una funzione, fin tanto che non varia la sua concavità. Per quanto riguarda la parabola, quindi, è la retta che passa per uno ed un solo punto di essa. Nel piano cartesiano è possibile calcolarne l'equazione conoscendo la funzione a cui tange ed il punto di tangenza. Il modo più semplice per calcolarla, ma non l'unico, prende in considerazione il concetto di derivata di una funzione (per definizione il limite del rapporto incrementale di una funzione per l'incremento che tende a zero, geometricamente il coefficiente angolare della retta tangente ad essa in un punto); attraverso il calcolo della derivata in un punto e una sostituzione si ricava l'equazione generale. Ad esempio, si vuole calcolare la retta tangente ad una parabola di equazione $y = 4x^2$ nel punto $T(\frac{1}{2}, 1)$:



- la derivata della funzione risulta $y' = 8x$;
- nel punto P, con $x = \frac{1}{2}$, il coefficiente angolare della retta tangente vale $m = y'(x_T) = 8 * \frac{1}{2}$; in quel punto la retta tangente avrà pendenza 4;
- nell'equazione generale del fascio di rette passanti per T risulta $y - 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$, cioè la retta di equazione $y = 4x - 1$.

Graficamente la retta risulterà tangente nel punto T alla parabola in questione.



ROTOTRASLAZIONE: è un'isometria del piano composta da una rotazione e da una traslazione.

Per costruirla è necessario individuare:

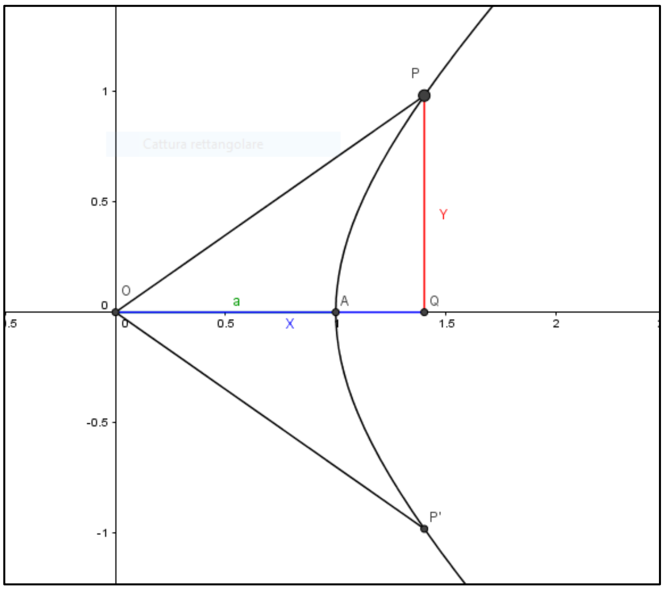
- un vettore di traslazione che definisca le componenti cartesiane di spostamento;
- un angolo di rotazione ed un punto di applicazione della rotazione del sistema di riferimento;

Nell'esempio illustrato si possono notare le due successive trasformazioni che, anche nella dimostrazione, saranno applicate distintamente.

FUNZIONE IPERBOLICA: Le seguenti funzioni:

$$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

$$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

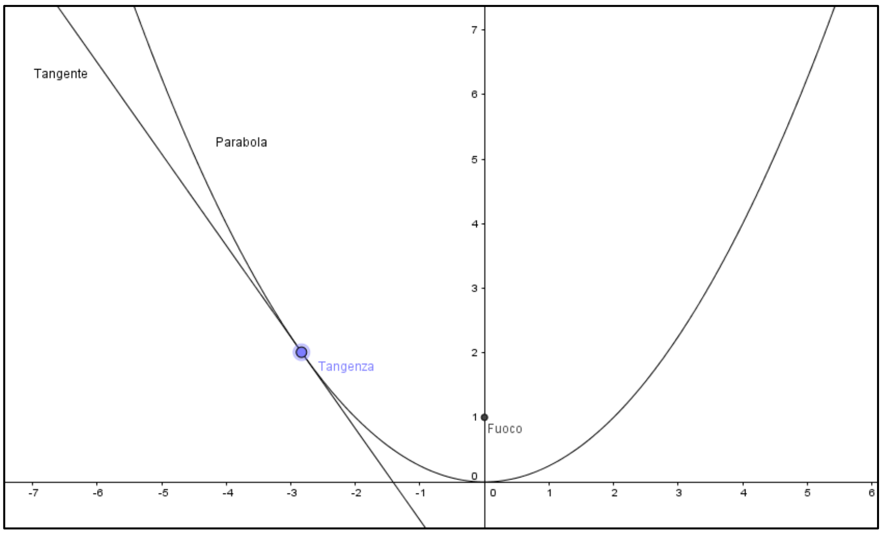


sono dette funzioni iperboliche. Esse hanno proprietà analoghe alle funzioni goniometriche elementari $\sin x$ e $\cos x$; ad esempio, mentre $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (ciò comporta che un punto $P = (\cos x; \sin x)$ appartiene alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$) si può verificare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Si deduce che un punto $P = (\cosh x; \sinh x)$ appartiene alla curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$, cioè ad una iperbole equilatera. Per questo motivo sono chiamate iperboliche, mentre le funzioni goniometriche elementari sono dette anche funzioni circolari.

Si può, quindi, dimostrare ora che il fuoco di una parabola che viene “rototraslata” rispetto ad una propria retta tangente genera, nella rototraslazione, una funzione catenaria di equazione $f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$, h che dipende dal parametro a della parabola di partenza.

Per poter meglio apprezzare la dimostrazione algebrica è utile seguire la dimostrazione grafica, dalla quale sono stati ricavati i calcoli espressi di seguito.

Si consideri una parabola di equazione $f(x) = ax^2$: il parametro a definisce la distanza tra il vertice ed il fuoco della parabola, secondo la relazione $k = \frac{1}{4a}$.



Si calcoli, quindi, il fuoco della parabola che, essendo ad asse verticale corrispondente all’asse delle ordinate, avrà ascissa 0; secondo le formule citate in precedenza, il fuoco avrà coordinate F(0, $\frac{1}{4a}$).

Preso un qualsiasi punto T sulla parabola, di coordinate (x_T, $a{x_T}^2$), si tracci la retta tangente ad essa nel punto indicato.

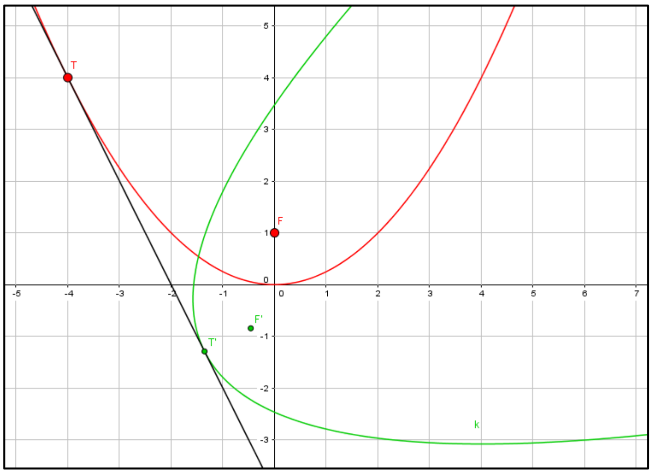
Il coefficiente angolare della retta tangente nel punto T: $f(x) = ax^2$

$$f'(x) = 2ax$$

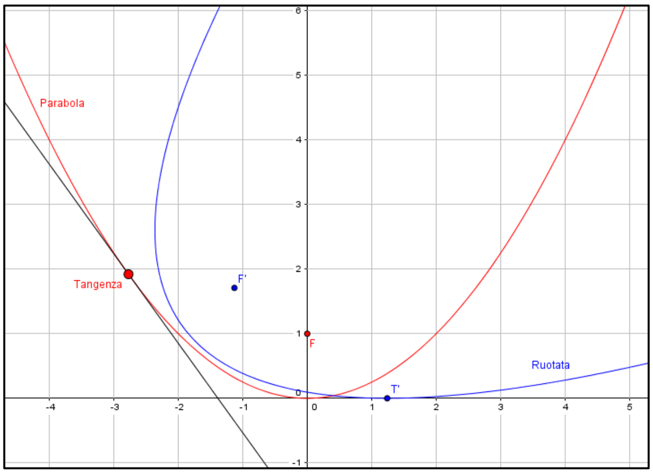
Conoscendo le coordinate del punto T, si può sostituire affermando che:

$$m = f'(x_T) = 2ax_T$$

Si può trovare così, per ogni punto T appartenente alla parabola, il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto.



A questo punto la dimostrazione impone che si faccia "rototraslare" la parabola sulla tangente così ottenuta, che dovrebbe però rimanere fissa rispetto alla parabola. Per semplificare è necessario che la retta sulla quale la parabola "rototrasla" sia l'asse delle *x*; a tal proposito occorre effettuare un cambiamento del sistema di riferimento; più precisamente bisogna fare in modo che per qualsiasi punto T di tangenza della parabola la retta tangente in T coincida con l'asse delle x e che la distanza "percorsa" da T sulla parabola sia la stessa tra la proiezione del punto e l'origine. Ciò implica che, mantenendo fissata la parabola di partenza, che non deve più rototraslare rispetto alla tangente, e muovendo semplicemente il punto T sulla parabola, ad ogni posizione di T(x_T, $a{x_T}^2$) corrisponde una parabola tangente all'asse delle *x* e "rototraslata" rispetto alla parabola di partenza ($f(x) = ax^2$).



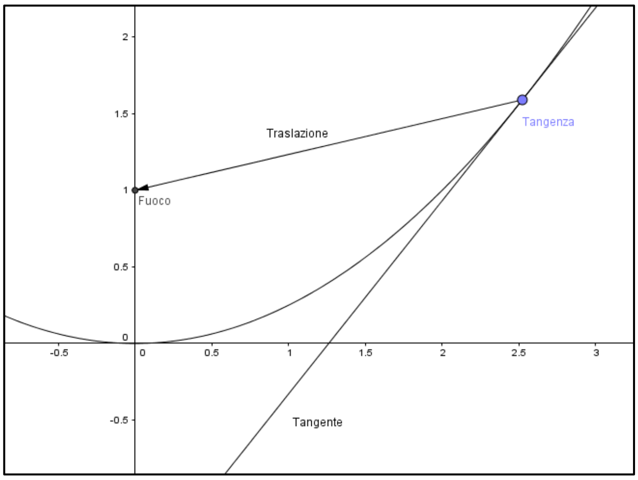
Nelle due immagini si può notare il cambiamento del sistema di riferimento, utilizzando l'asse delle *x* come retta tangente, non più rototraslando la parabola rispetto ad una tangente fissata, ma proiettando la parabola ruotata e traslata secondo la proiezione della tangente sull'asse delle ascisse.

Per fare ciò è necessario, prima di tutto, proiettare il punto di Tangenza sull'asse delle *x*.

Prima di aggiungere ulteriori elementi alla vista grafica risulta utile calcolare il vettore di traslazione del fuoco e l'angolo di rotazione del sistema, che verranno successivamente utilizzati nella rototraslazione:

- il vettore di traslazione è applicato dal punto T al fuoco F della parabola; sarà necessario riportare la componente orizzontale *x* e la componente verticale *y*;
- l'angolo di rotazione è l'angolo formato dalla tangente alla parabola con l'asse *x*;

In entrambi i casi i valori riportati non sono valori costanti, bensì variano al variare della posizione di T sulla parabola. Il calcolatore grafico riporta per ogni T(x_T, $a{x_T}^2$) le componenti vettoriali e l'angolo di rotazione corrispondente. Algebricamente, come fatto finora, non si riportano i valori esatti del punto T, bensì un valore generico, corrispondente alle coordinate cartesiane, valido per ogni punto di Tangenza. A tal proposito, dopo aver "calcolato" graficamente l'angolo di rotazione e il vettore di traslazione, che automaticamente varieranno al variare di T, si calcolino algebricamente i due elementi precedentemente definiti:



- il vettore traslazione si calcola attraverso la formula $v = \binom{x_F - x_T}{y_F - y_T}$; essendo $x_F = 0$, come definito in precedenza, e $y_F = \frac{1}{4a}$, risulterà

$$v = \begin{pmatrix} -x_T \\ \frac{1}{4a} - ax_T^2 \end{pmatrix},$$

essendo $y_T = ax_T^2$ per ogni x_T; per definizione stessa, infatti, essendo T un punto della parabola $f(x) = ax^2$, ad ogni valore x_T corrisponde univocamente un valore di y_T;

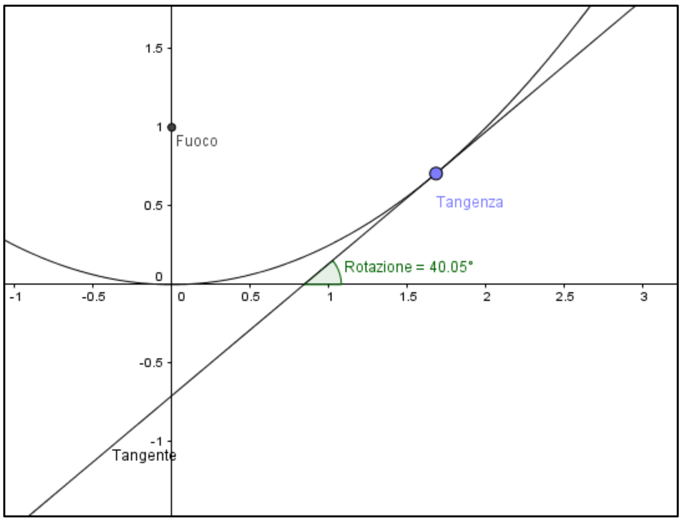
- l'angolo di rotazione si calcola utilizzando il coefficiente angolare della tangente; dovendo calcolare l'angolo tra l'asse *x* e una qualsiasi tangente, e avendo l'asse pendenza 0, risulta che l'angolo α dipende soltanto da *m* della retta. Il coefficiente angolare della tangente, pertanto, è la tangente dell'angolo che si vuole calcolare. Risulta, quindi:

$$m = tg(\alpha)$$

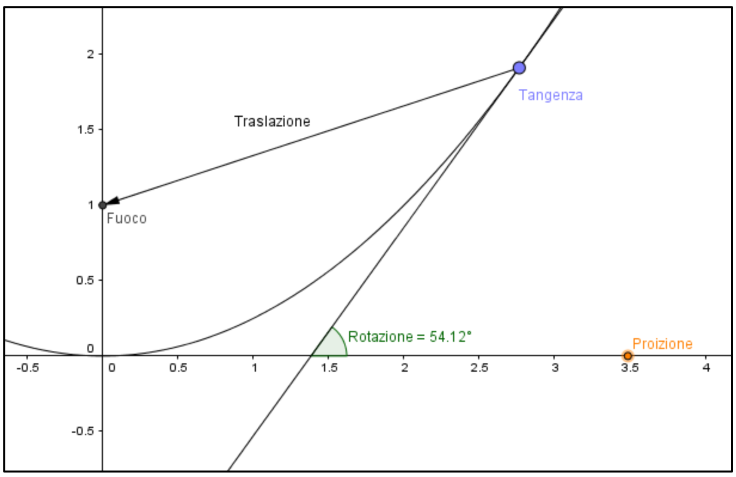
$$\alpha = arctg(m)$$

Essendo $m = 2ax_T$, per ogni x_T della parabola, l'angolo di Rotazione

$$\alpha = \tan^{-1}(2ax_T).$$



Si calcoli, ora, la proiezione P del punto di Tangenza sull'asse delle *x*.



Con il calcolatore grafico si utilizza la funzione "lunghezza", definendo come intervallo il vertice della parabola ($x_V = 0$) ed il punto T. Algebricamente è necessario utilizzare la formula per calcolare la lunghezza di una funzione qualsiasi, in questo caso un arco parabolico, attraverso l'utilizzo dell'integrale; la lunghezza si definirà

l. Trovandosi la proiezione di T sull'asse delle x, il nuovo punto P avrà coordinate $(l, 0)$. La coordinata x_P avrà lo stesso segno della x_T. Si considerino, nei calcoli, i valori per $x_T \geq 0$. La formula generale di calcolo della lunghezza tra due punti a e b è così definita:

$$l = \int_b^a \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx$$

In questo specifico caso, il calcolo risulterà (i calcoli interi nei fogli allegati):

$$l = \int_0^{x_T} \sqrt{1 + (2ax)^2}\ dx$$

$$l = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\ln\left|2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}\right|\right]_0^{x_T}$$

$$l = \frac{x_T}{2}\sqrt{1 + 4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\ln\left|2ax_T + \sqrt{1 + 4a^2x_T^2}\right|$$

La lunghezza ottenuta può essere ridotta considerando la funzione arcoseno iperbolico; infatti

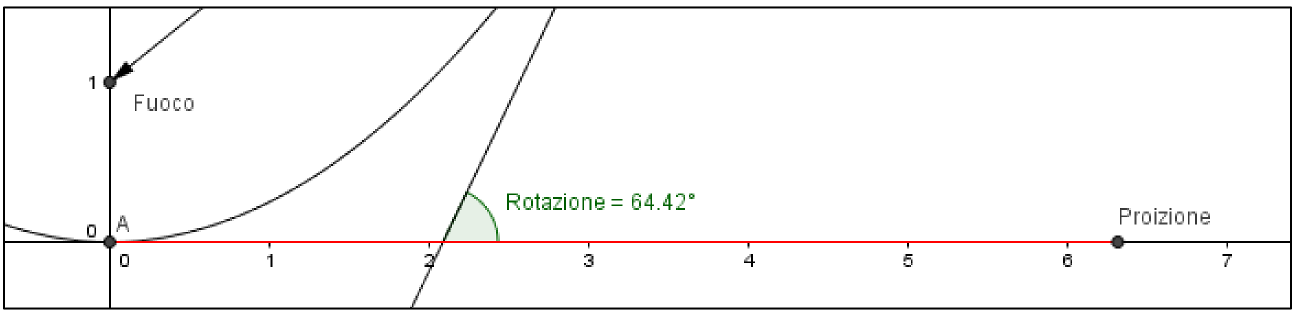
$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Nei calcoli illustrati nei fogli allegati si troverà il calcolo per trovare la funzione inversa del seno iperbolico, giungendo alla funzione così ottenuta.

La lunghezza l sarà, quindi, ridotta a

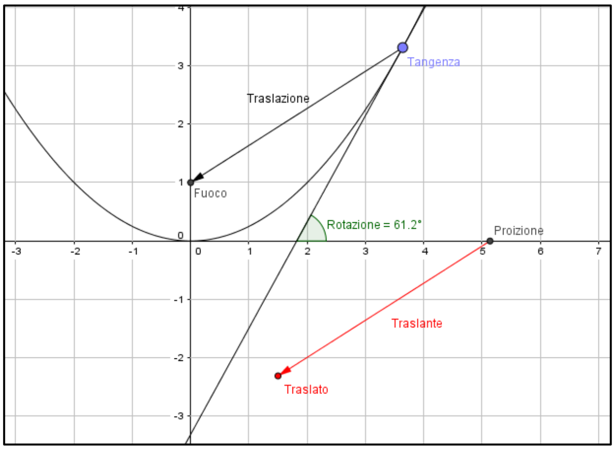
$$l = \frac{x_T}{2}\sqrt{1 + 4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T)$$

Il punto P così trovato avrà coordinate $P\left(\frac{x_T}{2}\sqrt{1 + 4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T),\ 0\right)$, per ogni valore che assume x_T.



Per completare il cambiamento del sistema di riferimento è necessario tracciare la proiezione del fuoco della parabola di partenza rispetto alla proiezione P del punto di tangenza. Si effettuerà, quindi, la rototraslazione del fuoco F utilizzando le componenti vettoriali e l'angolo di rotazione trovato in precedenza.

Si procede, quindi, alla rototraslazione del punto P al fine di trovare la proiezione di F rispetto al punto di Tangenza. Si applica l'isometria in due fasi distinte:



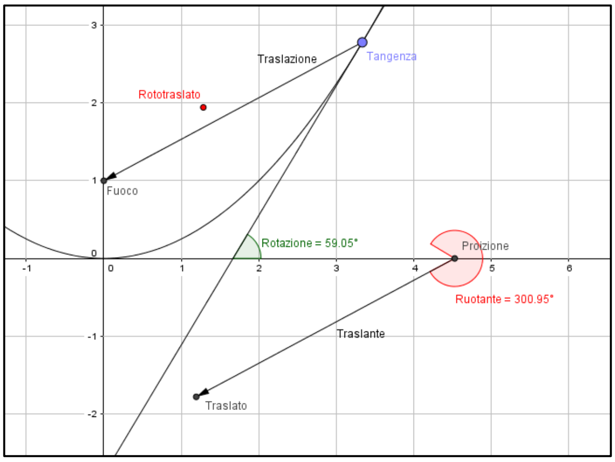
- la traslazione del punto P di vettore $v = \begin{pmatrix} -x_T \\ \frac{1}{4a} - ax_T^2 \end{pmatrix}$; graficamente il punto verrà calcolato in automatico. Algebricamente, conoscendo le coordinate di P e le componenti vettoriali v, è possibile calcolare il punto Traslato P' attraverso la formula

$$P' = \begin{pmatrix} x_P + \Delta x_v \\ y_P + \Delta y_v \end{pmatrix};$$

le coordinate del Traslato P' risulteranno

$$x_{P'} = \frac{x_T}{2}\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\ln\left(2ax_T + \sqrt{1+4a^2x_T^2}\right) - x_T$$

$$y_{P'} = \frac{1}{4a} - ax_T^2$$



- la rotazione del punto P', trovato attraverso la traslazione di P, di angolo α e centro P; anche in questo caso il calcolatore grafico calcolerà il punto Rototraslato R automaticamente. Per quanto riguarda i calcoli si utilizza la formula generale di rotazione di un punto

$$\begin{cases} x_R = x_C + (x_A - x_C)\cos(\alpha) - (y_A - y_C)\sin(\alpha) \\ y_R = y_C + (x_A - x_C)\sin(\alpha) + (y_A - y_C)\cos(\alpha) \end{cases}$$

dove R è il punto ruotato, C è il centro di rotazione e A il punto da ruotare.

Sostituendo le coordinate di P, P' ed il valore di α risulta:

$$\begin{cases} x_R = x_P + (x_{P'} - x_P)\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) - (y_{P'} - y_P)\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) \\ y_R = y_P + (x_{P'} - x_P)\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) + (y_{P'} - y_P)\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) \end{cases}$$

L'angolo α viene posto negativo, perché il punto viene ruotato in senso orario.

Si svolgono i calcoli considerando che:

$(x_{P'} - x_P) = \Delta x_v = -x_T$, essendo l'operazione inversa della traslazione;

$(y_{P'} - y_P) = \Delta y_v = \frac{1}{4a} - ax_T^2$, per lo stesso motivo;

$\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) = -2ax_T/\sqrt{1+4a^2x^2}$, per relazioni trigonometriche;

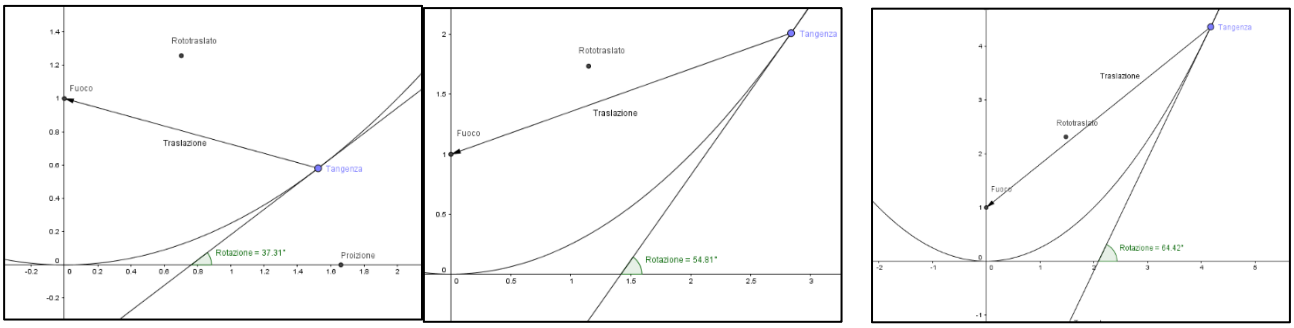
$\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) = 1/\sqrt{1+4a^2x^2}$, per relazioni trigonometriche.

Svolgendo i calcoli così ottenuti si ottengono le coordinate del rototraslato in relazione alla posizione di T rispetto alla parabola di partenza, in particolare in funzione alla coordinata x_T.

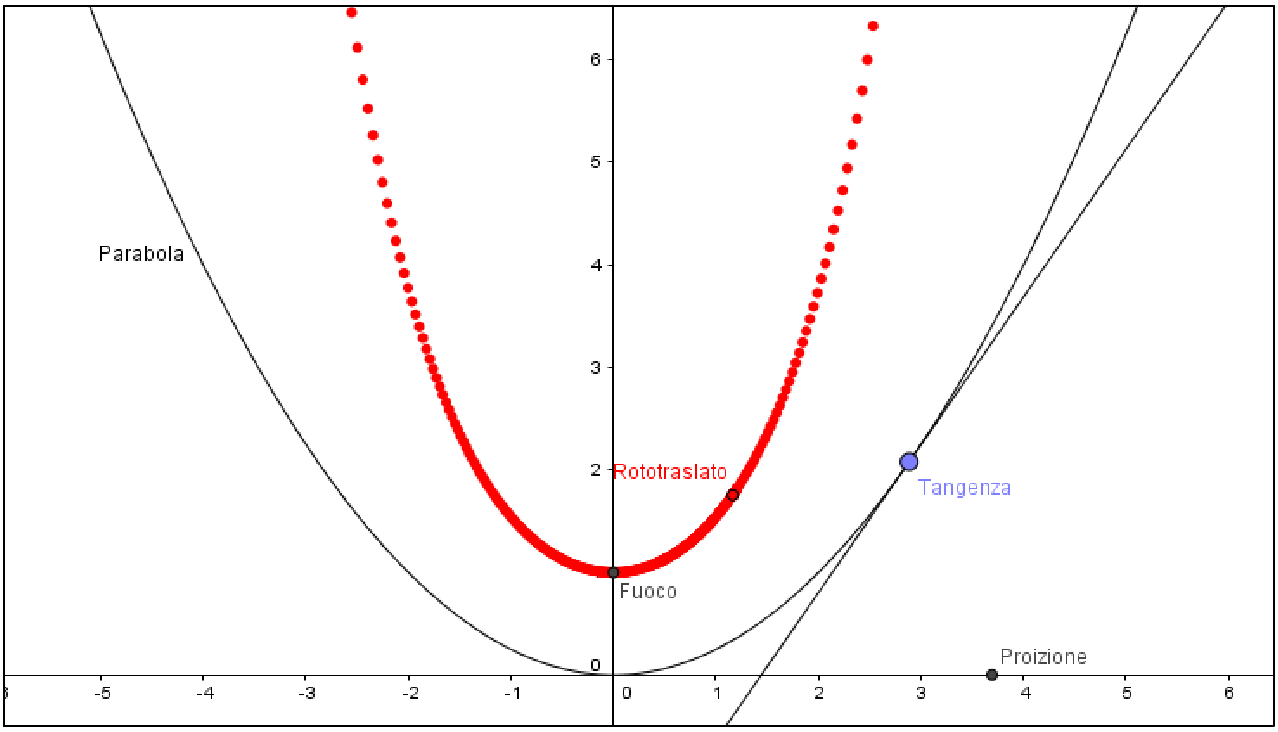
Risulta così che, per ogni valore assunto da x_T,

$$R = (\frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T), \qquad \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2x_T^2})$$

Graficamente si otterrà un punto che assumerà valori diversi al variare di x_T, secondo la detta legge.



Muovendo, quindi, il punto x_T sulla tangente, il punto R seguirà una traiettoria ben precisa; per definirla nella vista grafica, sarebbe utile “tracciare” la posizione di R nel piano al variare del punto di tangenza. A tale scopo si utilizza la funzione “traccia attiva” di R e si attiva l’opzione “animazione attiva” per il punto di Tangenza.



Per comodità nella vista grafica sono stati nascosti gli elementi superflui all'ultimo passaggio.

A questo punto graficamente è impossibile definire una precisa funzione che descriva l'andamento di R al variare di x_T.

Si ricorre quindi ai calcoli. Si ricavi dalle coordinate del punto R la relazione che y_R a x_R.

$$R = \left(\frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T), \qquad \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2x_T^2}\right)$$

Si sostituisce $h = \frac{1}{4a}$ e risulta, considerando la relazione univoca $y_R = f(x_R)$, che

$$f\left(h\sinh^{-1}\left(\frac{x_T}{2h}\right)\right) = h\sqrt{1+\frac{x_T^2}{h^2}}$$

Si ricava x_T da x_R che si consideri una x generica:

$$x = h\sinh^{-1}\left(\frac{x_T}{2h}\right)$$

$$\sinh\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{x_T}{2h}$$

Utilizzando la relazione $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, risulta

$$x_T = 2h\frac{\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)}{2} = h\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

Ricavata x_T si svolgono le operazioni necessarie ad estrapolare la relazione che lega y_R a x_R. Per la definizione di $\sinh^{-1}\left(\frac{x_T}{2h}\right)$ risulta

$$x = h\ln\left(\frac{x_T}{2h} + \sqrt{1+\frac{x_T^2}{h^2}}\right)$$

Si svolgono tutte le operazioni inverse, fino a giungere alla y_R in funzione di x_T (Calcoli completi sul foglio allegato).

$$y_R = f(x) = h\sqrt{1+\frac{x_T^2}{h^2}} = h(e^{\frac{x}{h}} - \frac{x_T}{2h})$$

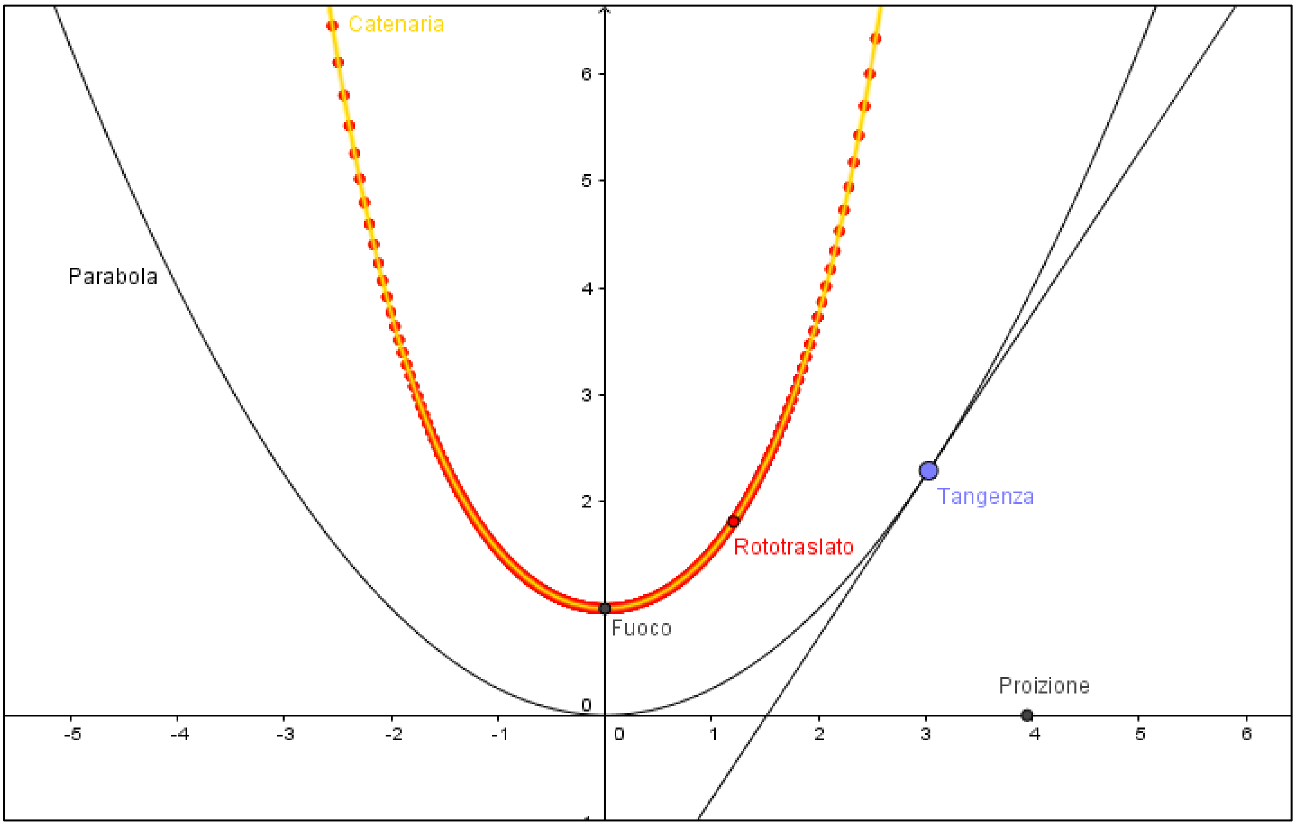
Questa relazione lega le coordinate del punto Rototraslato R secondo una relazione che tiene ancora conto della x del punto di Tangenza. Per ricavare la funzione descritta dal Rototraslato si sostituisce x_T ricavato in precedenza:

$$f(x) = h\left(e^{\frac{x}{h}} - \frac{h\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)}{2h}\right)$$

Risulta, infine,

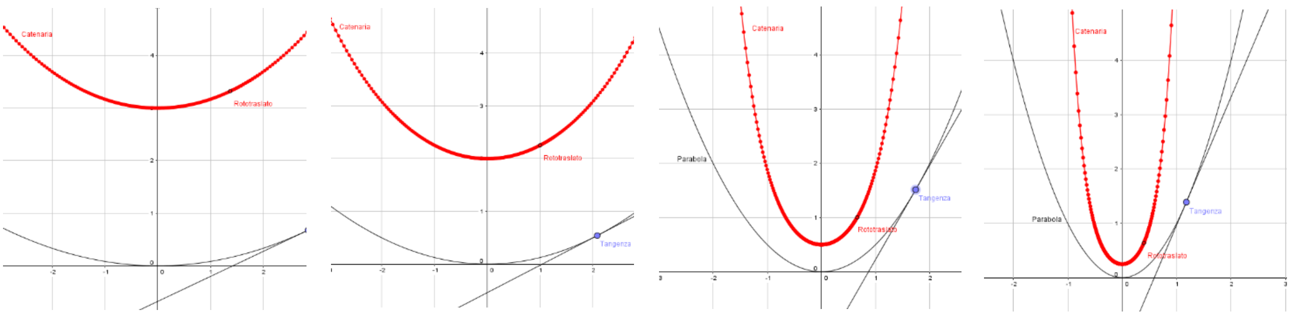
$$f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

che è esattamente la funzione della generica catenaria. Per verificare l'esattezza dei calcoli si sovrappone la funzione ottenuta dai calcoli alla traccia disegnata dal punto R in funzione della posizione di T sulla parabola.



Graficamente risulta che l'andamento di R nel piano corrisponde esattamente alla funzione della catenaria, con $h = 1$.

Si noti che la catenaria così trovata presenta $h = 1$, rispettando così la condizione $h = \frac{1}{4a}$, essendo stato definito in partenza (nella vista grafica) $a = 1/4$. La stessa funzione viene costruita per ogni valore di a scelto.



Nell'esempio illustrato le parabole di partenza presentano valori diversi di a, che sono 1/12, 1/8, 1/2 e 1, notando che le h corrispondenti risultano 3, 2, 1/2 e ¼, che non solo modifica "l'ampiezza" della catenaria, ma ne determina anche l'intersezione con l'asse delle x, che è proprio h.

È stato dimostrato che il fuoco di una qualsivoglia parabola che viene "rototraslata" rispetto ad una propria retta tangente genera, nella rototraslazione, una catenaria di equazione $f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$.

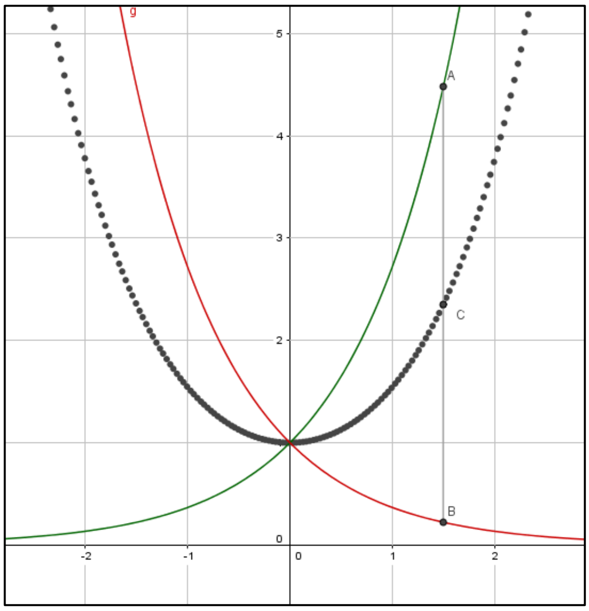
Si mostrano, ora, alcune delle proprietà più interessanti relative alla catenaria.

La prima, appena dimostrata, è che la catenaria può essere ottenuta dal fuoco di una parabola che rototrasla rispetto ad una propria tangente. Pertanto, si può definire la catenaria come "luogo geometrico dei fuochi di una parabola volvente lungo una retta (tangente).

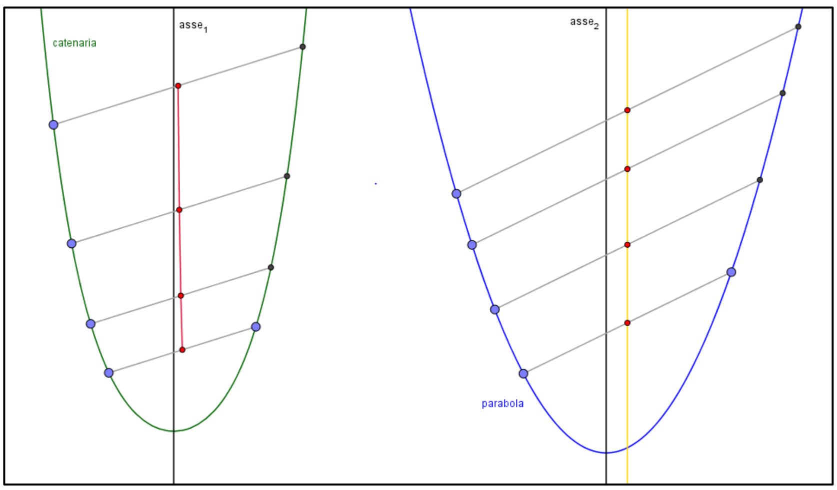
Una seconda, interessante, proprietà, anch'essa già citata in precedenza, riguarda l'equazione della funzione catenaria:

$$f(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \cosh(x)$$

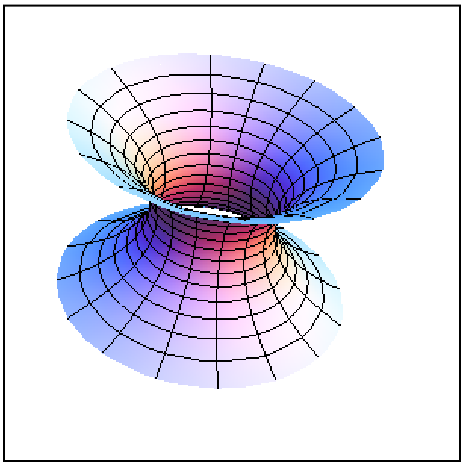
posto $h = 1$, la funzione risulta essere il coseno iperbolico, curva analizzata in sintesi nella parte precedente alla dimostrazione. Si può anche notare che, mantenendo lo stesso valore del parametro h, ogni punto della catenaria è "punto medio" dei corrispondenti punti delle funzioni esponenziali $y = e^x$ e $y = e^{-x}$. Infatti, per ogni valore di x, il valore assunto da $f(x)$ sarà il punto medio del segmento che congiunge i punti delle funzioni esponenziali.



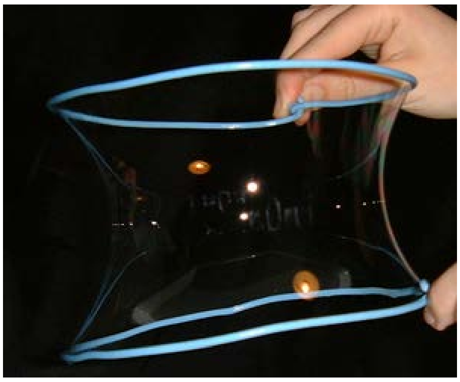
Una caratteristica peculiare che caratterizza la catenaria rispetto alla parabola è il fatto che tracciando corde parallele tra loro nella catenaria, il loro punto medio non si troverà lungo una retta parallela all'asse di simmetria come succede nella parabola. Per chiarezza si noti cosa succede tracciando corde parallele nella vista grafica:



La quarta caratteristica peculiare prende in considerazione la catenoide, il solido ottenuto dalla rotazione di un arco di catenaria intorno ad una retta ad esso esterna e complanare, perpendicolare all'asse di simmetria.

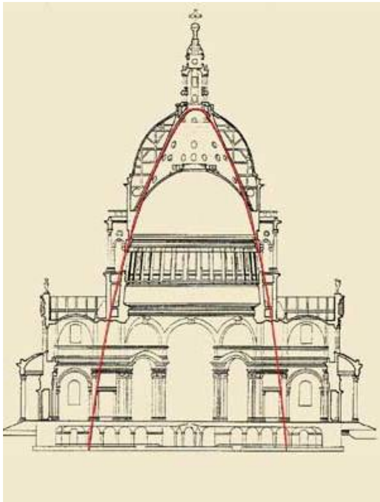


La superficie laterale dei una catenoide generata dalla rotazione di una catenaria attorno all'asse è la superficie minima tra due circonferenze della stessa grandezza. La superficie di rotazione della catenaria è l'unica superfice di rotazione, insieme al piano, ad essere superficie minima; questo si può vedere immergendo in una vasca piena di acqua e sapone due circonferenze uguali distanziate: la bolla di sapone che si formerà si disporrà per avere superficie minima e questa avrà proprio la forma di una catenoide.



Anche la sezione orizzontale di una vela sotto l'azione del vento assume la forma di una catenaria, e per questo la curva è anche nota come velaria.

Numerose, infine, sono le applicazioni della catenaria in vari ambiti dell'architettura: funi di sostegno dei ponti sospesi, archi di chiese, cupole. Questo per la proprietà fisica di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale; le strutture realizzate secondo tale curva subiscono soltanto sforzi a trazione, come le funi di sostegno nei ponti sospesi, oppure, in alternativa, a compressione, quando la struttura realizzata ha la forma di una catenaria rovesciata, come nelle strutture di cupole.



Oltre alle celebri opere di Gaudí, di cui si è trattato precedentemente, ne sono esempi la cupola della cattedrale di St. Paul a Londra (sopra), il ponte di Santa Trinita a Firenze ed il famoso Gateway Arch nel parco del Jefferson National Expansion Memorial (a sinistra).

Bibliografia – Sitografia

Si citano soltanto i siti principali ed i programmi utilizzati nella realizzazione.

- N. Abbagnano, G. Fornero, *Percorsi di filosofia 2A*, Paravia, 2012.
- L. Curcio, Matematica a Barcellona, *MATEpristem* (http://matematica.unibocconi.it/articoli/matematica-barcellona)
- C. Simonetti, Armonie di forme: la catenaria, *Mathesis* (http://web.math.unifi.it/users/gfmt/gfmt_2005/simonetti.pdf)
- Centro Interdipartimentale di Ricerca e Formazione Permanente per l'Insegnamento delle Discipline Scientifiche (http://crf.uniroma2.it/)
- Progetto Matematic@, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna (http://progettomatematica.dm.unibo.it/)
- Enciclopedia Treccani (www.treccani.it)
- Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali (www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf)
- Museo Galileo (http://portalegalileo.museogalileo.it/)
- Lettera di Galileo Galiei a Cristina di Lorena (http://disf.org/galileo-lettera-a-madama-cristina-di-lorena)
- Ha vinto Galilei, Lectio Magistralis Piergiorgio Odifreddi (https://www.youtube.com/watch?v=4w4f1tsjz-A)
- Dipartimento di Fisica Università degli Studi di Napoli (http://www.fisica.unina.it/)
- Casa Battló (https://www.casabatllo.es/it/)

Appendice

In questa sezione si espongono schematicamente i calcoli effettuati nella dimostrazione matematica.

Funzione inversa del seno iperbolico:

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$

Unica soluzione accettabile, perché l'altra soluzione prevedeva che $e^x < 0$, impossibile

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Calcolo della curva generata dal fuoco della parabola rototraslata rispetto ad una tangente:

Parabola $p: y = ax^2$

Fuoco $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$

Punto di tangenza $T(x_T, ax_T^2)$

Derivata $y'(x) = m = 2ax_T$

Tangente $y - y_T = m(x - x_T)$ $\quad y = 2ax_T x - ax_T^2$

Si considerano i calcoli per $x \geq 0$

Angolo di rotazione $\alpha = \tan^{-1}(2ax_T)$

Traslazione $v = \begin{pmatrix} 0 - x_T \\ \frac{1}{4a} - ax_T^2 \end{pmatrix}$

Proiezione $P(\int_0^{x_T} \sqrt{1 + 4a^2x_T^2}\, dx,\ 0)$

Risoluzione dell'integrale definito:

$$\int_0^{x_T} \sqrt{1 + 4a^2x_T^2}\, dx$$

Metodo di sostituzione: $\quad t = 2ax_T, \quad x_T = \frac{1}{2a}t, \quad dx = \frac{1}{2a}dt$

$$\int_0^{\frac{1}{2a}t} \sqrt{1 + t^2}\, \frac{1}{2a}\, dt$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{1}{2a}t} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

Metodo di sostituzione: $u = t + \sqrt{1+t^2}$

$$u^2 + t^2 - 2ut = 1 + t^2$$

$$t = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$dt = \frac{4u^2 - 2(u^2-1)}{4u^2}\, du = \frac{u^2+1}{2u^2} du$$

$$\sqrt{1+t^2} = u - \frac{u^2-1}{2u} = \frac{u^2+1}{2u}$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{1}{2a}*\frac{u^2-1}{2u}} \frac{u^2+1}{2u}\, \frac{u^2+1}{2u^2} du$$

Soluzione dell'integrale (non si riportano gli intervalli):

$$\frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{8u^2} = \frac{u^4 - 1 + 4u^2\ln|u|}{8u^2} = \frac{u^4-1}{8u^2} + \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{(u^2+1)(u^2-1)}{8u^2} + \frac{1}{2}\ln|u|$$

Da sostituzioni precedenti risulta $u^2 + 1 = 2u\sqrt{1+t^2}$ $\quad u^2 - 1 = 2ut$

$$\frac{2ut * 2u\sqrt{1+t^2}}{8u^2} + \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}2ax_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2ax_T + \sqrt{1+4a^2x_T^2}\right|$$

Moltiplicando per la costante davanti all'integrale risulta

$$\frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\ln\left|2ax_T + \sqrt{1+4a^2x_T^2}\right| = \frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T)$$

Risolvendo l'integrale definito nell'intervallo scelto risulta:

Proiezione $\quad P\left(\frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T), 0\right)$

Traslato $\quad P'(x_P + v_x,\ y_P + v_y) = \left(x_P - x_T,\ \frac{1}{4a} - ax_T^2\right)$

Rototraslato $\quad R\begin{cases} x_R = x_P + (x_{P'} - x_P)\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) - (y_{P'} - y_P)\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) \\ y_R = y_P + (x_{P'} - x_P)\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) + (y_{P'} - y_P)\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) \end{cases}$

(l'angolo di rotazione è negativo perché il punto viene ruotato in senso orario)

Risoluzione delle singole equazioni del sistema:

$$(x_{P'} - x_P) = \Delta x_v = -x_T$$

$$(y_{P'} - y_P) = \Delta y_v = \frac{1}{4a} - ax_T^2$$

$$\sin(-\tan^{-1}(2ax_T)) = -\frac{2ax_T}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}}$$

$$\cos(-\tan^{-1}(2ax_T)) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}}$$

$$x_R = x_P - x_T\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}} - \left(\frac{1}{4a} - ax_T^2\right)\frac{2ax_T}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}}$$

$$= x_P - \frac{x_T}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}} - \frac{\frac{1}{2}x_T - 2a^2x_T^3}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}} = x_P + \frac{(-2x_T + x_T - 4a^2x_T^3)}{2\sqrt{1+4a^2x_T^2}} = x_P - \frac{x_T(1+4a^2x_T^2)}{2\sqrt{1+4a^2x_T^2}}$$

$$= x_P - \frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} = \frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T) - \frac{1}{2}x_T\sqrt{1+4a^2x_T^2}$$

$$x_R = \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T)$$

$$y_R = y_P - x_T\left(-\frac{2ax_T}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}}\right) + \left(\frac{1}{4a} - ax_T^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}}$$

$$= \frac{2ax_T^2}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}} + \frac{\frac{1}{4a} - ax_T^2}{\sqrt{1+4a^2x_T^2}} = \frac{8a^2x_T^2 + 1 - 4a^2x_T^2}{4a\sqrt{1+4a^2x_T^2}} = \frac{4a^2x_T^2+1}{4a\sqrt{1+4a^2x_T^2}} =$$

$$y_R = \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2x_T^2}$$

Rototraslato $\qquad R\left(\frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax_T),\ \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2x_T^2}\right)$

Posto $h = \frac{1}{4a}$, dalla precedente relazione si sa che

$$f(x_R) = y_R$$

$$f\left(h\sinh^{-1}\left(\frac{x_T}{2h}\right)\right) = h\sqrt{1+\frac{x_T^2}{h^2}}$$

Si “trucca” ora x_R di modo da ricavare la relazione che la lega a y_R:

$$x = h\sinh^{-1}\left(\frac{x_T}{2h}\right)$$

$$\sinh\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{x_T}{2h}$$

$$x_T = 2h\frac{e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}}{2} = h\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

$$x = h \ln\left(\frac{x_T}{2h} + \sqrt{1 + \frac{x_T^2}{h^2}}\right)$$

$$e^{\frac{x}{h}} = \frac{x_T}{2h} + \sqrt{1 + \frac{x_T^2}{h^2}}$$

$$h\left(e^{\frac{x}{h}} - \frac{x_T}{2h}\right) = h\sqrt{1 + \frac{x_T^2}{h^2}} = f(x_R)$$

$$f(x) = h\left(e^{\frac{x}{h}} - \frac{h\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)}{2h}\right)$$

$$f(x) = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

La funzione risultante è la catenaria generica; vale l'uguaglianza $h = \frac{1}{4a}$, cvd.