Orientamatica 2017/2018 L'Universo è un'equazione differenziale... ma restiamo sulla Terra!

Jacopo De Tullio

Centro PRISTEM - Università Bocconi

1 Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali rappresentano lo strumento matematico più diffuso nella cosiddetta modellizzazione matematica. Si tratta di particolari equazioni, dette funzionali, in cui la quantità ignota non è più una variabile numerica ma è una funzione continua. Entrano in campo quando è necessario risolvere un problema (trovare una funzione) del quale si conoscono solo degli indizi sul suo comportamento (si conosce la variazione della funzione, cioè la sua derivata).
Parleremo di equazione differenziale *ordinaria* per sottolineare il fatto che la funzione incognita dipende solo da una variabile.
Per introdurre le equazioni differenziali ordinarie, possiamo dire che una equazione differenziale è:

- un'equazione funzionale
- in cui la funzione incognita y dipende da una variabile continua t
- e per la quale dobbiamo trovare la funzione $y(t)$ partendo da una informazione (equazione) riguardante la sua derivata $y'(t)$.

1.1 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Consideriamo la loro forma generale:

$$y' = f(t, y)$$

dove $f(t, y)$ è una funzione dipendente dalla variabile indipendente t e dalla quantità incognita $y(t)$. Le eventuali soluzioni di un'equazione siffatta si dicono *soluzioni generali* (o *integrali generali*).

La coppia formata dall'equazione differenziale ordinaria del primo ordine $y' = f(t, y)$ e la condizione di passaggio per un determinato punto (t_0, y_0):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è detto *problema di Cauchy* associato all'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Se verificate alcune condizioni, un problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione.
Ricordiamo (anche se per ora di difficile comprensione) di seguito un teorema di esistenza locale della soluzione di un problema di Cauchy:

Teorema 1 *Se la funzione f è continua rispetto a t e a y e derivabile con continuità rispetto a y in un intorno del punto (t_0, y_0), allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette una unica soluzione in un intorno del punto (t_0, y_0).

Analizziamo d'ora in poi solo alcune tipologie di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

1.1.1 Primitive di una funzione

Consideriamo un caso molto speciale (e molto semplice) di equazione differenziale del primo ordine, le cosiddette *primitive* di una funzione. Ricercare una primitiva di una data funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ significa trovare l'insieme delle funzioni $G(t)$ tali che abbiano come derivata la funzione $g(t)$, ovvero $G'(t) = g(t)$.
In questo caso la forma dell'equazione differenziale del primo ordine si semplifica e diventa:

$$y'(t) = f(t)$$

ovvero la funzione f dipende soltanto dalla variabile indipendente t.
Ad esempio risolvere la l'equazione $y'(t) = 1$ significa ricercare quella funzione $y(t)$ tale che la sua derivata prima sia 1.
Ma $y = t, y = t - 1, y = t + 1, y = t + 2...$ sono tutte soluzioni! Possiamo dunque affermare che tutte le soluzioni sono della forma $y(t) = t + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

In Matematica, per risolvere un problema di ricerca di primitive del tipo $y' = f(t)$, si usa una particolare notazione:

$$\int f(t)dt = G(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

e si legge *integrale di* $f(t)$ *in* dt *uguale a* $G(t) + c$. Se volessimo individuare univocamente la funzione primitiva (detta soluzione particolare) allora è necessario aggiungere una condizione in più. Ad esempio chiedere il passaggio per il punto $(1, 3)$ ovvero chiedere che $y(1) = 3$; imponendo il passaggio per il punto all'insieme delle primitive $y(t) = t + c$, si otterrebbe la soluzione $y = t + 2$.
Ma cercare l'insieme delle primitive e imporre il passaggio per un punto equivale a risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Esempio 2 *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(t) = 3e^t - 2t \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Partiamo col risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = 3e^t - 2t$*, che si presenta come un problema di ricerca delle primitive del tipo:*

$$\int \left(3e^t - 2t\right) dt = 3e^t - t^2 + c.$$

Imponendo la condizione di passaggio per il punto $(0, -2)$ *si ricava la soluzione del problema di Cauchy:*

$$y(t) = 3e^t - t^2 - 5$$

1.1.2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Un altro caso particolare di equazione differenziale del primo ordine sono le cosiddette equazioni a variabili separabili che si presentano nella forma:

$$y'(t) = p(t)q(y)$$

dove p e q sono funzioni continue (la prima dipendente solo da t e la seconda solo da y).
Per risolverle si procede separando, a destra e sinistra dell'uguaglianza, le funzioni attraverso due passaggi:
1) risolvere, se possibile, l'equazione $q(y) = 0$ la cui soluzione è una soluzione particolare dell'equazione differenziale;
2) dopo aver posto $q(y) \neq 0$, procedere nel seguente modo:

$$\frac{1}{q(y)} y' = p(t)$$

poiché possiamo scrivere che $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ (cioè derivata della funzione $y(t)$ rispetto alla variabile t)

$$\frac{1}{q(y)} \frac{dy}{dt} = p(t)$$

da cui

$$\frac{1}{q(y)} dy = p(t)dt$$

infine

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(t)dt$$

A questo punto ci siamo ricondotti a risolvere due problemi di ricerca di primitive a sinistra rispetto alla y e a destra rispetto alla t.

Esempio 3 *Risolvere l'equazione differenziale $y' = 2e^{-y}t$.*
Nell'equazione data possiamo procedere con la separazione delle variabili (con $q(y) = e^{-y}$ e $p(t) = 2t$).
Osserviamo che in questo caso $q(y)$ è sempre non nulla, possiamo procedere dunque con la separazione:

$\frac{dy}{dt} = e^{-y}2t$

$e^{y}dy = 2tdt$

da cui

$\int e^{y}dy = \int 2tdt$

$e^{y} + k = t^2 + h$

$e^{y} = t^2 + c \quad (con\ t^2 + c > 0)$

da cui

$y(t) = \ln\left(t^2 + c\right)$

Esempio 4 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = y\left(t + 2t^3\right) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Cominciamo col risolvere l'equazione differenziale associata al problema $y' = y\left(t + 2t^3\right)$. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili con $q(y) = y$ e $p(t) = t + 2t^3$.
Per prima cosa studiamo il caso $q(y) = 0$, ovvero $y = 0$. Questa rappresenta una soluzione particolare dell'equazione differenziale.
Poniamo $q(y) \neq 0$, cioè $y \neq 0$ e procediamo con la separazione:

$\frac{dy}{dt} = y\left(t + 2t^3\right)$

$\frac{1}{y}dy = \left(t + 2t^3\right) dt$

da cui

$\int \frac{1}{y}dy = \int \left(t + 2t^3\right) dt$

$\ln|y| = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + c$

da cui

$|y(t)| = e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}+c}$

$y(t) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}+c} & y \geq 0 \\ -e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}+c} & y < 0 \end{cases}$

Imponiamo dunque la condizione di passaggio per il punto $(1, 1)$*. La soluzione particolare trovata* $y = 0$ *non rispetta il passaggio per il punto, quindi, pur essendo soluzione dell'equazione differenziale, non è soluzione del problema di Cauchy. Imponiamo il passaggio per il punto alla soluzione generale* $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}+c}$ *e ricaviamo che* $c = -1$*, quindi la soluzione del problema di Cauchy è:* $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}-1}$.

Se il problema di Cauchy avesse richiesto come condizione di passaggio $y(1) = -1$*, allora avremmo dovuto imporre il passaggio per* $(1, -1)$ *alla soluzione generale* $y(t) = -e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}+c}$*, ricavando* $c = -1$*, quindi la soluzione del problema di Cauchy sarebbe stata:* $y(t) = -e^{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}-1}$.

1.2 Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

Per quanto riguarda le equazioni differenziali del secondo ordine, ci occupiamo soltanto di quelle che si presentano nella forma:

$$y''(t) = f(t)$$

la cui soluzione generale (che dipenderà ora da due parametri reali) si calcola con il metodo di ricerca di una primitiva eseguita due volte.
Facciamo subito un esempio per chiarirci le idee; data:

$y''(t) = 3e^t$

cercando le primitive di $3e^t$ troviamo la struttura di $y'(t)$, in questo caso otteniamo $y'(t) = 3e^t + c$.
Ricercando nuovamente le primitive di $y'(t)$ troviamo la struttura della soluzione generale dell'equazione di secondo ordine: $y(t) = 3e^t + ct + b$ con $c, b \in \mathbb{R}$.
Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine prevede due condizioni iniziali (una per la funzione $y(t)$ e una per la sua derivata prima $y'(t)$) e si presenta nella forma:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Esempio 5 *Detta $s(t)$ la legge oraria di un moto, sappiamo che la sua variazione rispetto alla variabile temporale è la velocità, cioè $s'(t) = v(t)$. Analogamente la variazione rispetto alla variabile temporale della velocità è l'accelerazione, cioè $v'(t) = a(t)$. Detta g l'accelerazione di gravità, risolvere e interpretare il seguente problema di Cauchy:* $\begin{cases} s''(t) = -g \\ s(0) = 0 \\ s'(0) = 0 \end{cases}$.

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo $s'' = -g$, procedendo con la ricerca delle primitive si ricava che: $s'(t) = -gt + c$ e $s(t) = -g\frac{t^2}{2} + ct + b$.
Imponendo le condizioni del problema di Cauchy si ricava che $c = 0$ e $b = 0$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ che non è altro che l'equazione del moto di caduta verticale.

1.3 Modello di Malthus

Alla fine del '700, l'opera del pastore anglicano Thomas Robert Malthus (1766-1834) aprì una nuova fase dell'applicazione degli strumenti matematici nel campo demografico, fino ad allora oggetto di analisi solo tramite metodi statistici. Nel suo *An Essay on the Principle of the Population as It Affects the Future Improvement of Society* (1798) espresse l'opinione che l'aumento demografico avrebbe condotto a scenari catastrofici. Malthus affermava che la razza umana cresceva in progressione geometrica (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) mentre la disposizione di viveri in progressione aritmetica (1, 2, 3, 4, 5, ...). Da qui la necessità di introdurre un rigido controllo delle nascite anche attraverso metodi estremi come guerre e carestie. In risposta alle politiche malthusiane Karl Marx (1818-1883) nella *Storia delle teorie economiche* affermò: Ciò che caratterizza Malthus è una fondamentale volgarità dei sentimenti, volgarità che può permettersi soltanto un prete, il quale vede nella miseria umana la punizione del peccato originale e ha bisogno di questa «valle di lacrime», ma, nello stesso tempo, per riguardo alle prebende di cui gode e con l'aiuto del dogma della predestinazione, trova quanto mai vantaggioso «addolcire» alle classi dominanti il soggiorno in questa valle di lacrime.
Il modello malthusiano di studio dell'evoluzione nel tempo della popolazione può essere così descritto: sia $P = P(t)$ la funzione che indica il numero una popolazione al tempo t (che assumiamo continuo per meglio applicare i risultati matematici appena visti). Assumiamo inoltre che la funzione $P(t)$ sia continua e derivabile (in effetti considerando la variabile temporale continua il numero di nascite e morti nel corso del tempo fa sì che la funzione si evolva con continuità) e denotiamo con $P_0 = P(0)$ il numero iniziale della popolazione.

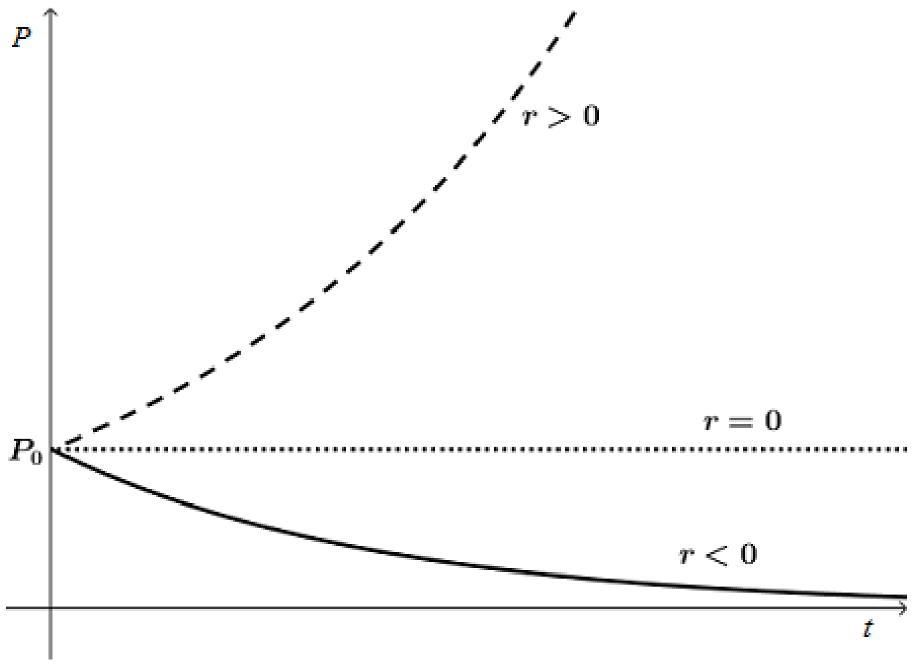
Il modello prevede ulteriori ipotesi sulla popolazione, deve essere isolata (cioè nessuna immigrazione o emigrazione) e non ci devono essere problemi di risorse che impediscono lo sviluppo della popolazione.
Per quanto supposto possiamo affermare che l'evoluzione della popolazione dipenda linearmente dal numero della stessa:

$$P'(t) = rP(t)$$

dove r è una costante, detta *potenziale biologico*, che indica il tasso di riproduzione della popolazione.
L'equazione $P' = rP$ è nota come *legge Malthusiana* della crescita di una popolazione.
Si tratta di un'equazione a variabili separabili ($P(t) > 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP \\
\frac{dP}{P} &= r\ dt \\
\int \frac{1}{P} dP &= \int r\ dt \\
\log P &= rt + c \\
P &= e^{rt+c} \\
P &= Ce^{rt} \quad (C = e^c)
\end{aligned}$$

Poiché, per $t = 0$, sappiamo che $P(0) = C$, si ricava che $C = P_0$. La soluzione generale della legge Malthusiana è dunque $P(t) = P_0 e^{rt}$. Ovvero una crescita della popolazione di carattere esponenziale sempre più rapida all'aumentare del tasso r.
Osserviamo che al variare del tasso r ci ritroviamo dinanzi a tre scenari possibili.



- **Caso 1**: $r > 0$.

  Se il potenziale biologico è positivo (il numero delle nascite supera quello delle morti) la popolazione è destinata alla crescita con velocità esponenziale.

- **Caso 2**: $r = 0$.

  Se il potenziale biologico è nullo (il numero delle nascite è pari a quello delle morti) la popolazione è destinata a rimanere di numero costante.

- **Caso 3**: $r < 0$.

  Se il potenziale biologico è negativo (il numero delle morti supera quello delle nascite) la popolazione è destinata all'estinzione.

1.4 Modello di crescita logistica

Il modello appena visto per la crescita di una popolazione funziona finché la popolazione non è troppo grande. Ma quando la popolazione si allarga, questo modello non è più accurato perché esclude il fatto che i membri della popolazione entrino in competizione fra loro; infatti, all'aumentare della popolazione, lo spazio vitale è limitato e le risorse sono sempre più rare. Bisogna quindi introdurre nel modello matematico un termine che rappresenti tale competizione tra gli individui.

Nel 1838 il matematico e statistico belga Pierre Francois Verhulst (1804-1849), partendo dal modello di Malthus, elaborò il cosiddetto modello di crescita logistica per descrivere le auto-limitazioni di crescita di una popolazione.

Si può pensare che la velocità $P' = P'(t)$ con cui varia la popolazione dipenda da quella esistente (come accadeva nel modello malthusiano) ma anche dall'ammontare delle risorse disponibili; sia, in particolare, proporzionale a $P(t)$ ma anche alla sua distanza da una costante K (detta *capacità portante*) che rappresenta il valore massimo cui la popolazione P può avvicinarsi e superata la quale le risorse non sarebbero più sufficienti. Dunque si ottiene:

$$P'(t) = rP(t)\,(K - P(t))$$

Dall'equazione $P' = rP(K-P)$, si osserva che la crescita della popolazione è tanto più rapida quanto il numero dei componenti della popolazione è distante dal valore K.
Si tratta, nuovamente, di un'equazione a variabili separabili ($P(t) > 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP(K-P) \\
\frac{dP}{P\,(K-P)} &= r\ dt \\
\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)dP &= \int r\ dt \\
\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)dP &= rt + c \\
\log P - \log\,(K-P) &= Krt + Kc \\
\log\frac{P}{K-P} &= Krt + Kc \\
\frac{P}{K-P} &= Ce^{Krt} \quad \left(C = e^{cK}\right) \\
P &= \frac{KCe^{Krt}}{1+Ce^{Krt}} \\
P &= \frac{KC}{e^{-Krt}+C}
\end{aligned}$$

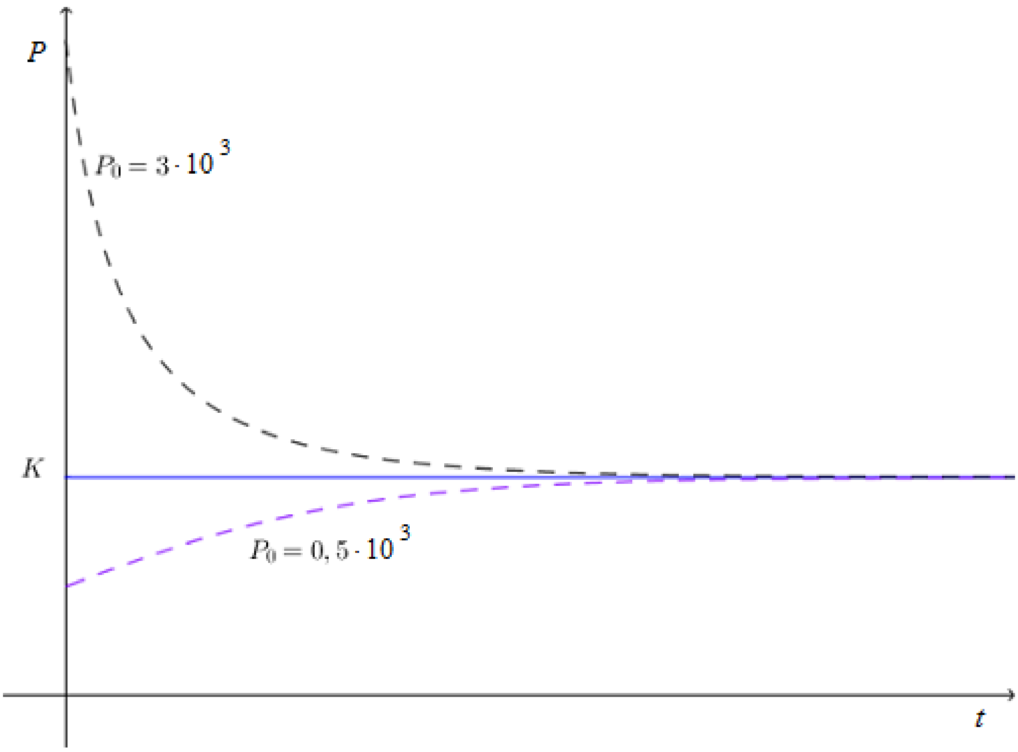
Poiché, per $t = 0$, sappiamo che $P(0) = P_0$, si ricava che $P_0 = \frac{KC}{1+C}$, da cui $C = \frac{P_0}{K-P_0}$. La soluzione generale della legge di crescita logistica risulta dunque:

$$P(t) = \frac{KP_0}{e^{-Krt}(K-P_0)+P_0}$$

Una curva siffatta è detta *curva logistica*. Se la popolazione cresce ($r > 0$) si ha che:

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{KP_0}{e^{-Krt}(K - P_0) + P_0} = \frac{KP_0}{P_0} = K$$

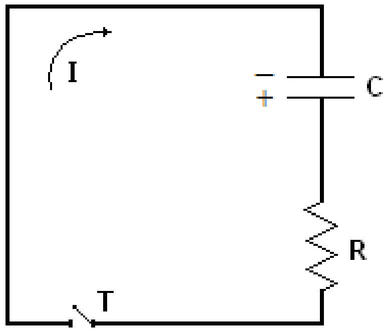
cioè la nostra popolazione tende alla sua capacità portante.
Graficamente:



Se invece il potenziale biologico è nullo ($r = 0$) la popolazione è destinata a rimanere di numero costante: $P(t) = P_0$.
Infine, se invece il potenziale biologico è negativo ($r < 0$) accade che: $\lim_{t \longrightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{KP_0}{e^{-Krt}(K-P_0)+P_0} = 0$, cioè la popolazione è destinata all'estinzione.

1.5 Adesso tocca a noi!

Proviamo a costruire un modello matematico partendo da una situazione reale: il processo di scarica di un condensatore.
Consideriamo un circuito costituito da un condensatore C, una resistenza R e un interrutore T. Supponiamo che il circuito sia aperto e il condensatore carico, quindi possiede una differenza di potenziale ai capi del condensatore V_0; al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interuttore, la corrente inizia a circolare nel circuito e il condensatore inizia a scaricarsi.



Poiché il condensatore si sta scaricando, la carica non è costante nel circuito ma varia nel tempo, quindi il potenziale del condensatore risulta:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Il potenziale della resistenza risulta:

$$V_R(t) = -R \cdot I(t)$$

Essendo un circuito chiuso la somma dei potenziali è nulla (*legge di Kirchhoff*), dunque:

$$\begin{aligned} V_C(t) + V_R(t) &= 0 \\ \frac{Q(t)}{C} - R \cdot I(t) &= 0 \end{aligned}$$

dove la corrente $I(t)$ sappiamo essere la variazione della carica nel tempo, nel nostro caso $I(t) = -Q'(t)$ (il segno meno è dovuto al fatto che siamo in condizioni di scarica). Ricaviamo dunque l'equazione differenziale:

$$\frac{Q(t)}{C} + R \cdot Q'(t) = 0$$

che risolviamo separando le variabili:

$$
\begin{aligned}
Q'(t) &= -\frac{Q(t)}{RC} \\
\frac{Q'(t)}{Q(t)} &= -\frac{1}{RC} \\
\frac{dQ}{Q} &= -\frac{dt}{RC} \\
\int \frac{dQ}{Q} &= -\frac{1}{RC}\int dt \\
\ln Q &= -\frac{t}{RC} + k \\
Q &= e^{-\frac{t}{RC}+k}
\end{aligned}
$$

imponendo la condizione iniziale $Q(0) = Q_0$ si ottiene:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

cioè la quantità di carica presente nel condensatore decresce con andamento esponenziale negativo.
Ricaviamo anche l'equazione del potenziale in funzione del tempo per la scarica del condensatore:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Infine l'equazione della corrente in funzione del tempo risulta:

$$I(t) = -Q'(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

ovvero la corrente decresce esponenzialmente a zero.

1.5.1 Possiamo fidarci?

Il modello teorico, ottenuto combinando fra loro leggi e teoremi con teoria delle equazioni differenziali, sembra funzionare alla perfezione. Un ulteriore passo prima di essere certi della correttezza di un modello potrebbe essere la prova di quest'ultimo a partire da alcuni dati sperimentali.
In allegato una tabella nella quale sono raccolti i dati sperimentali (raccolti con gli strumenti tecnici voltmetro, amperometro e cronometro) sul potenziale e intensità di corrente di un'esperienza di laboratorio sulla scarica di un condensatore di resistenza $R = 220k\Omega$ e capacità $C = 100\mu F$.
Dai dati riportati in tabella verificare se il modello teorico su potenziale e intensità di corrente si adatta ai risultati sperimentali.