Mi sento sperduto...
La matematica si confronta con l'infinito

Simonetta Di Sieno

L'infinito e, meglio, la gestione matematica dell'infinito sono - da qualche anno a questa parte - alcuni dei temi a proposito dei quali il Centro *matematita* (che è il Centro interuniversitario di ricerca sulla comunicazione e l'apprendimento informale della matematica cui appartengo) sta studiando come sia possibile costruire dei buoni prodotti di comunicazione rivolta sia al largo pubblico non competente che a quello degli studenti e dei docenti dei vari ordini di scuola.
Come spesso è accaduto in questo Centro, all'inizio si è trattato di preparare moduli e/o seminari per studenti eccellenti (la prima realizzazione è legata alla scuola che sotto il nome de "La bottega del matematico" il prof. Paolo Lorenzi ha organizzato per alcuni anni per i migliori studenti di V superiore della provincia di Bolzano), poi è arrivata una mostra/laboratorio al Festival della Scienza di Genova che nel 2010 proponeva il tema "Orizzonti" e ora (2013) si stanno preparando alcuni *kit* di laboratorio.

Mi sembra che cominciare questa presentazione con qualche invito "visivo" possa essere una buona maniera per mostrarvi modi diversi di avvicinarsi all'infinito o, come mi piace dire, tentativi differenti di "addomesticare" l'infinito. L'espressione "addomesticare" non è mia, ma è la traduzione del verbo francese "apprivoiser" che André Deledicq (premio Erdos 2004) ha usato nel titolo del libro in cui ha raccolto con Francis Casiro i testi dei suoi seminari divulgativi sul tema e che è stato tradotto in italiano per le edizioni Kangourou.
Partiamo dunque con qualcosa che tutti sono in grado di riconoscere e di apprezzare, con qualcosa che parla alla sensibilità di tutti. In fin dei conti, anche se la vulgata spesso non lo contempla, anche per i matematici le sensibilità e i punti di partenza sono quelli di ogni umano, niente affatto esoterici. Allora la scelta dell'*Infinito* di Leopardi accompagnato dal nastro di Arnaldo Pomodoro e dal testo di Paola Gallo come in Figura 1 è naturale e quando la Gallo scrive: "La poesia, infatti, ha un modo particolare di esprimere quel che vuole, così come la matematica" apre proprio al lavoro dei matematici, al loro modo di porre domande.

È chiaro che ci sono molte accezioni del termine infinito. In generale, chi cerca di stendere un elenco dei significati del termine "infinito" o si cimenta nel gioco delle risonanze: "che cosa ci suggerisce la parola infinito?", trova risposte molto diverse fra loro, alcune piuttosto strane ma altre ricche di intuizioni e di significati interessanti. Max Bill chiama infinito il nastro di Moebius (vuol forse dire senza bordo? oppure che non ha un inizio e una fine?); Lisa, un artista che fa ceramiche ad Ascoli

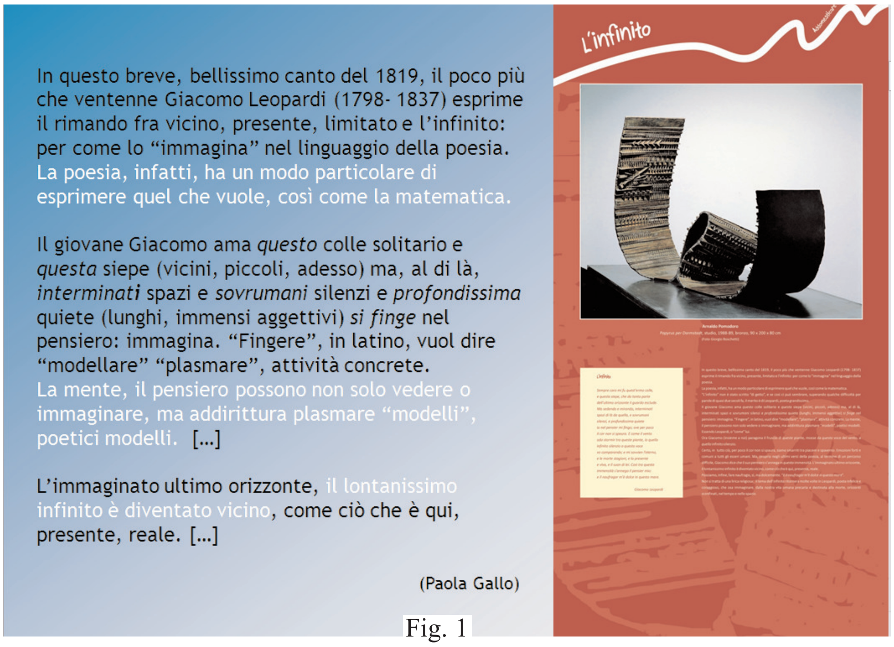


Fig. 1

Piceno, dà il titolo *Infinito* a un piatto le cui decorazioni sono (dieci, al più venti) pennellate dipinte a formare dei cerchi concentrici dal centro verso il bordo… . Più semplicemente, molti di noi sono disposti a vedere l'infinito nel punto di fuga di una prospettiva, nel distendersi di una spirale o, addirittura, in una camera di specchi in cui un oggetto si riproduce 4, 6, …, 20 volte a seconda della qualità dello specchio ma certamente non infinite volte. Così succede non solo che qualche ragazzino entrato nella sala della mostra *Simmetria, giochi di specchi* parli di infinito e si senta "sperduto", ma anche che, in analoga situazione, qualche docente dica "ecco una buona rappresentazione del concetto di infinito" mentre sta guardando… i dodici triangoli che un solo triangolo fa nascere in una camera a specchi!

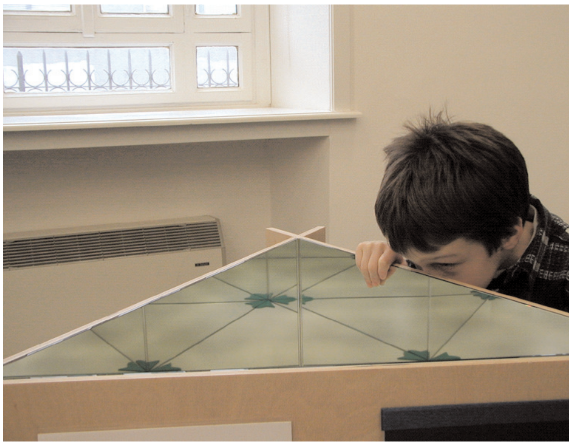


Fig. 2 - ... *mi sento sperduto*

Oggi, qui, non ci avventuriamo in questi mondi, ma proviamo a confrontarci con l'infinito partendo dai numeri, da quel momento cruciale nel cammino della nostra specie che ci ha visto imparare a contare quantità discrete e a confrontarle le une con le altre. Con la necessità conseguente di tener traccia delle operazioni compiute e quindi di dare cittadinanza anche alla scrittura di numeri grandi. Numeri per contare, numeri grandi, numeri grandissimi…
Quanti sono i granelli di sabbia della duna in Figura 3? Quanti i fili d'erba di questi prati? Sono di più i granelli o i fili d'erba? Che cosa vuol dire tantissimi?

Fig. 3

Vi ricordate la storia del bramino Lahur Sessa e del re di Taligara?

> … un giorno il Re fu informato che un giovane bramino, umile e povero, chiedeva di essere ricevuto. In realtà aveva già fatto questa richiesta diverse volte, ma il Re aveva sempre rifiutato, sostenendo che il suo spirito non era abbastanza forte da permettergli di ricevere visite. Tuttavia questa volta gli concesse udienza e ordinò che il giovane straniero venisse condotto al suo cospetto.
> Una volta giunto alla sala del trono, il bramino fu interrogato, secondo le regole del cerimoniale, da uno dei nobili del Re. "Chi sei? Da dove vieni? Cosa desideri da colui che, per volere di Visnù, è Re e signore di Taligana?". "Mi chiamo Lahur Sessa" rispose il giovane bramino," e vengo dal villaggio di Namir, a trenta giorni di

cammino da questa bella città. Abbiamo avuto notizia, là dove vivo, che il nostro Re è afflitto da profondo dolore, che egli è amareggiato dalla perdita del figlio che gli fu strappato nelle vicende della guerra. “È terribile”, mi sono detto, “che il nostro nobile sovrano si isoli completamente nel suo palazzo, come un cieco bramino che si abbandona alla sua pena; ho quindi pensato che sarebbe quanto mai opportuno inventare un gioco che possa distrarlo e aprire il suo cuore a nuovi piaceri. È questo l'umile dono che reco al nostro Re Iadava”. [...]

Sessa mise davanti al Re una tavola divisa in sessantaquattro caselle di uguali dimensioni. Su di essa erano disposti due gruppi di pezzi, gli uni bianchi e gli altri neri. Le figure di questi pezzi erano allineate simmetricamente sulla scacchiera e vi erano strane regole che governavano i loro movimenti. [...]

Il Re Iadava fu molto interessato alle regole del gioco e si mise a far domande all'inventore: [...] Ad un certo punto il Re notò con grande sorpresa che i pezzi, dopo tutte le mosse fatte, erano spiegati esattamente come nella battaglia di Dacsina . “Osserva” - gli disse allora il giovane bramino - “che, per vincere la battaglia, questo nobile guerriero deve sacrificarsi…”.

E gli indicò proprio il pezzo che il Re aveva posto a capo delle schiere impegnate nel cuore della lotta. Il saggio Sessa volle così mostrare che talvolta la morte di un principe è necessaria per assicurare pace e libertà al suo popolo. Udendo queste cose, Re Iadava esclamò...: “Dimmi allora cosa desideri tra ciò che sono in grado di darti, così potrai vedere quanto grande può essere la mia riconoscenza verso coloro che la meritano.” Sessa disse di non volere alcuna ricompensa perché questa era la felicità di aver guarito il Re. Questi sorrise e, incapace di credere alla sincerità del giovane insistette: “Rifiutare la mia offerta sarebbe non solo una scortesia ma disobbedienza”. Sessa allora, per non essere scortese, chiese di essere pagato in chicchi di grano. Il Re stupito dalla strana moneta chiese in quale modo poteva ricompensarlo. “È facilissimo” spiegò Sessa “mi darai un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta e così via, raddoppiando la quantità ad ogni casella fino alla sessantaquattresima e ultima.”.[...]

Il re rise di questa richiesta, dicendogli che poteva avere qualunque cosa e invece si accontentava di pochi chicchi di grano. Il giorno dopo i matematici di corte andarono dal re e gli dissero che per adempiere alla richiesta del monaco non sarebbero bastati i raccolti di tutto il regno per ottocento anni. Lahur Sessa aveva voluto in questo modo

insegnare al re che una richiesta apparentemente modesta poteva nascondere un costo enorme.
Comunque, una volta che il re lo ebbe capito, il bramino ritirò la sua richiesta e divenne il governatore di una delle province del regno.
(tratto da *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan, Salani, 2001)

Leggendo questa storia nasce spontaneo il desiderio di avere un'immagine che ci spieghi quanti sono i chicchi di riso del bramino. Bene, all'indirizzo http://www.youtube.com/watch?v=KnQZ3Mg6upg si trova un video - prodotto da uno studente del prof. Behrends - che mostra come i chicchi siano tanti quanti quelli che bastano per coprire tutto il territorio tedesco con uno strato di riso alto 1 metro.
E allora, se allarghiamo a dismisura la scacchiera fino ad avere infinite caselle, che cosa ci aspettiamo che diventino i chicchi di riso? Saranno ancora tantissimi? Di più che tantissimi? Certo è una somma di infiniti addendi e siamo tentati di dedurne che il suo risultato è infinito di necessità!
Ma non possiamo. Se è ben vero che la somma 1+2+4+8+…+n+… cresce senza fine al crescere di n (è infinita?), quanto vale la somma 1-1+1-1+1-…+ (-1)n+… al crescere di n? E la somma 1+1/2+1/4+1/8+1/16+ … +1/2n+… fin dove cresce al crescere di n? Ci può sorprendere quello che osserviamo, ma è evidente che il risultato della prima è uguale a zero oppure a 1 a seconda che n sia pari o dispari, mentre Achille e la sua tartaruga ci hanno insegnato che la seconda non supera 2. Un consiglio: se volete vedere una bella maniera di raccontare le sorprese delle somme infinite, provate con il romanzo *Una certa ambiguità* di Gaurav Suri e Hartosh Singh Bal (Ponte alle Grazie, Milano, 2008), perché qui noi dobbiamo abbandonarle per tornare al mondo dei numeri.
Quanti sono i numeri che servono per contare, cioè i numeri che siamo abituati a chiamare "naturali"? Sono di più o di meno dei granelli di sabbia di Figura 3? Come si può descrivere la differenza fra l'insieme di quei granelli di sabbia e quello dei numeri naturali?
Ecco una possibile risposta, che dà conto di uno dei risultati di cui i matematici sono più fieri.
Consideriamo un insieme A costituito da 5 elementi. Fra i suoi sottoinsiemi non ci sono insiemi con 5 elementi che non siano lui stesso. Detto con altre parole, non ci sono sottoinsiemi diversi da A che abbiano tanti elementi quanti ne ha A o, ancora, non ci sono sottoinsiemi diversi da A che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con A.
E non ha alcuna importanza il fatto che il numero di elementi A sia 5; l'informazione significativa è che questo numero sia finito: la proprietà di non avere sottoinsiemi che stiano in corrispondenza biunivoca con l'insieme totale vale per tutti gli insiemi finiti e sembra individuarli bene.
Allora, se per insieme infinito intendiamo un insieme che non è finito, possiamo dire che un insieme è infinito se esiste un suo sottoinsieme che ha tanti elementi

quanti ne ha lui stesso.
Questa descrizione degli insiemi infiniti (del 1866) è opera di uno dei più grandi matematici di sempre, Georg Cantor (1845 - 1918). Da allora, in matematica, il confronto con l'infinito ha incominciato a superare i dubbi, le incertezze, le ansie che lo avevano segnato. La strada non è stata facile, le sorprese sono state grandi, ma "Nessuno riuscirà mai a mandarci via dal paradiso che Cantor ha creato per noi", come scrive David Hilbert in un articolo del 1926.

L'insieme N dei numeri naturali è infinito perché è in corrispondenza biunivoca con l'insieme P dei numeri pari che è un suo sottoinsieme. In effetti la corrispondenza che a ogni naturale associa il suo doppio (a 0 associa 0, a 1 associa 2, a 2 associa 4 e così via) è una corrispondenza biunivoca fra N e P e P è contenuto propriamente in N, visto che 3 sta in N ma non in P.

Anche l'insieme Q dei numeri razionali (positivi) è infinito, dal momento che può essere messo in corrispondenza biunivoca con N o, come possiamo anche dire, dal momento che riusciamo a trovare un modo per "elencare" i suoi elementi facendo comparire il primo, il secondo, il terzo, il quarto… come mostra la figura qui sotto.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \rightarrow & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{0}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{0}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{0}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \nearrow &
\end{array}
$$

Fig. 4

Viene naturale la domanda: "ma allora tutti gli insiemi infiniti di numeri sono in corrispondenza biunivoca con N?" A favore della risposta "sì" sta il fatto che, in effetti, anche l'insieme degli interi che sono quadrati perfetti e l'insieme degli interi relativi e quello dei razionali relativi lo sono: tutti hanno la stessa cardinalità[1] di N o, come si dice, sono "numerabili". Invece, la risposta corretta è "no": la cardinalità di N non esaurisce i tipi di infiniti.

---

1 Siete capaci di costruire le corrispondenze biunivoche che giustificano questa affermazione?

Proviamo a "elencare" i numeri reali e supponiamo che quello qui sotto sia l'avvio dell'elenco che qualcuno ha steso di tutti i numeri reali.

x_1	=	0,	2	3	5	7	3	5	5	5	1	1	3	0	2	9	0	2	6	…
x_2	=	0,	2	8	4	4	8	0	7	7	3	5	8	0	4	9	9	1	0	…
x_3	=	0,	0	6	0	0	4	0	1	9	1	2	8	9	5	4	5	9	7	…
x_4	=	0,	8	8	4	6	4	0	8	1	8	4	1	6	7	2	6	4	3	…
x_5	=	0,	9	9	5	0	8	9	6	4	2	5	8	8	8	5	3	1	0	…
x_6	=	0,	7	4	7	6	8	0	8	5	1	8	3	4	8	6	3	2	1	…
x_7	=	0,	9	4	1	0	5	6	5	5	8	8	2	9	0	3	4	2	3	…
x_8	=	0,	4	2	1	3	5	9	7	2	1	8	8	5	7	2	8	0	7	…
x_9	=	0,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
x_{10}	=	0,	8	4	2	4	0	5	2	0	7	8	1	5	3	9	9	6	2	…
x_{11}	=	0,	6	1	2	0	0	8	8	2	8	0	9	7	7	3	5	3	8	…
x_{12}	=	0,	3	1	0	9	7	3	9	7	8	0	9	6	9	5	8	7	6	…
x_{13}	=	0,	1	1	3	7	1	2	3	1	5	5	0	7	4	5	0	9	5	…
x_{14}	=	0,	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
x_{15}	=	0,	3	9	7	9	5	2	2	7	7	1	0	1	7	5	4	1	5	…
x_{16}	=	0,	2	7	0	6	1	7	1	4	0	8	9	2	3	2	3	3	1	…
x_{17}	=	0,	1	1	3	0	3	6	2	9	4	0	7	6	2	0	2	5	6	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x	=	0,																		…

Fig. 5

Bene, è sempre possibile scrivere un nuovo numero reale che nell'elenco non è compreso! E quindi la corrispondenza biunivoca che cerchiamo non esiste.
Basta comportarsi come ci comporteremmo di fronte all'elenco di Figura 6 di stringhe vuoti/pieni se volessimo aggiungere in basso una stringa non compresa già nell'elenco.

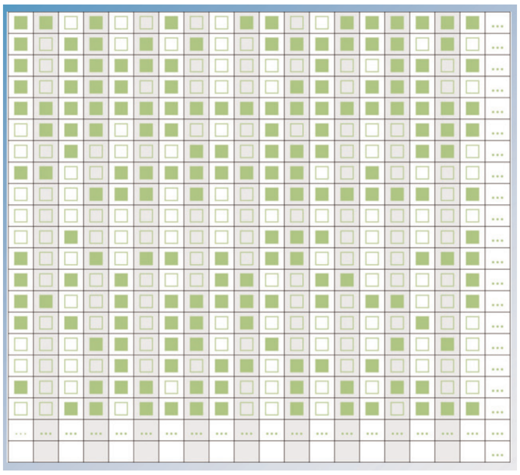


Fig. 6

Scriviamo una stringa che al primo posto ha un vuoto, al secondo un pieno, al terzo un vuoto, …, all'ottavo un vuoto, …, cioè costruiamo una stringa che sia diversa dalla stringa *k* perché nel posto *k* ha un pieno se c'era un vuoto e ha un vuoto se c'era un pieno.

Abbiamo così trovato un infinito diverso da quello di N: diremo che l'insieme dei numeri reali ha la potenza del continuo.
Nasce ora il dubbio che sia possibile immaginare infiniti diversi sia da quello di N che da quello di R. Ma dove andarli a cercare?
Abbiamo visto che non sembra esserci legame fra il tipo di infinito e il fatto di essere un insieme discreto o un insieme denso (N è discreto, perché esistono coppie di numeri naturali - come 3 e 4 - fra i quali non è possibile inserire alcun altro numero naturale, mentre Q è denso dal momento che dati comunque due suoi elementi se ne può immaginare un altro compreso fra i due, quello individuato dalla loro semisomma, per esempio).
Si vede facilmente che non sembra esserci legame neppure fra l'essere limitato o illimitato: la Figura 7 suggerisce che una curva illimitata e un segmento possano essere messi in corrispondenza biunivoca e che quindi come insiemi di punti siano dello stesso tipo di infinito.

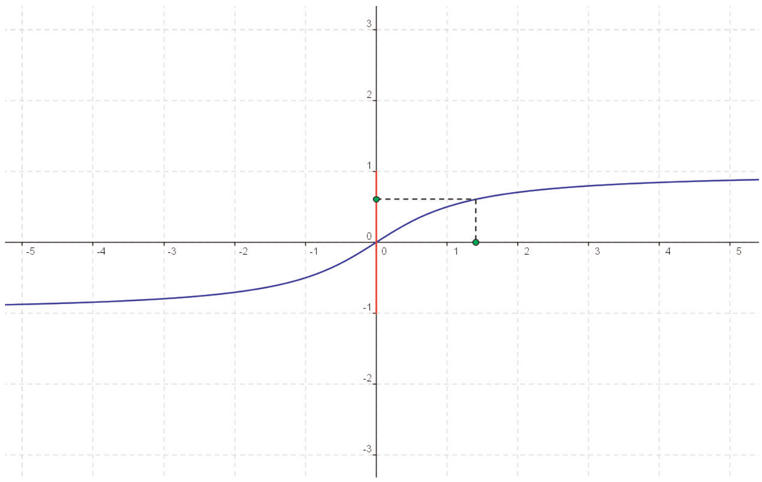


Fig. 7

Forse allora abbiamo qualche speranza di pensare che lo snodo stia in quella che ci viene naturale chiamare la dimensione della figura? Un segmento ha dimensione 1, una quadrato ha dimensione 2, un cubo ha dimensione 3: pensati come insieme di punti individuano tipi diversi di infinito?
Ci sono alcune avventure dell'intelligenza umana che meritano di essere conosciute anche se non sarà possibile conoscerle nei loro dettagli. E quella della

corrispondenza biunivoca fra i punti del quadrato e quelli del suo lato, fra i punti di una varietà di dimensione *k* e quelli di una curva è una di queste avventure.
I protagonisti sono Cantor (ancora lui!) e Richard Dedekind (1831-1916) e questo qui sotto è un estratto della loro corrispondenza dedicata proprio a tale questione.

> *5/1/1874 Cantor a Dedekind*
> Può una superficie (per esempio un quadrato, bordo compreso) essere messa in corrispondenza con una curva (per esempio un segmento di retta, estremi inclusi) in modo tale che ad ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva e, viceversa, ad ogni punto della curva ne corrisponda uno della superficie?
>
> *25/6/1877 Cantor a Dedekind*
> La maggior parte di coloro ai quali ho sottoposto tale questione si è molto meravigliata del fatto stesso che io abbia potuto porla, perché sembrava loro evidente che per la determinazione di un punto in una varietà a k dimensioni occorra sempre usare k coordinate indipendenti. Chi però coglieva in profondità il senso della questione era costretto a riconoscere che occorreva almeno dimostrarla […]
> Io facevo parte di coloro che ritenevano verosimile una risposta negativa fino al momento recentissimo in cui, con una successione molto complessa di pensieri, sono arrivato alla convinzione che la risposta sia affermativa, senza restrizione alcuna. Poco dopo trovai la dimostrazione che lei ha oggi sotto gli occhi.
>
> *29/6/1877 Cantor a Dedekind*
> La prego di scusare la mia preoccupazione per quest'affare, se faccio così spesso appello alla sua bontà e condiscendenza. Ciò che le ho comunicato recentemente è così inatteso per me e così nuovo che non potrei, per dir così, arrivare a una certa tranquillità di spirito prima di ricevere, molto stimato amico, il suo giudizio sulla sua correttezza. Fin tanto che non mi avrà approvato, non posso che dire: lo vedo, ma non ci credo.
>
> *2/7/1877 Dedekind a Cantor*
> Ho esaminato ancora una volta la sua dimostrazione e non vi ho trovato lacune; sono convinto che il suo interessante teorema sia corretto e le faccio le mie felicitazioni.[2]

---

[2] La traduzione di questa corrispondenza si trova in *George Cantor e Richard Dedekind: lettere 1872-1899* (a cura di P. Nastasi), PRISTEM/Storia n. 6.

La dimostrazione del fatto che i punti del lato di un quadrato sono tanti quanti quelli del quadrato stesso o, detto altrimenti, che l'insieme dei punti del lato di un quadrato ha la stessa cardinalità dell'insieme dei punti del quadrato intero ha l'andamento che cerco di illustrarvi.

Vogliamo mostrare che ad ogni punto M di un quadrato aperto di lato uguale a 1 corrisponde un punto N di un segmento aperto (AB) di lunghezza 1 e viceversa. In altre parole vogliamo mostrare che esiste una biiezione fra (0,1)x(0,1) e (0,1).
Sappiamo che il teorema di Cantor-Bernstein afferma che: dati due insiemi A e B, se esistono due funzioni iniettive

$$f : A \to B$$
$$g : B \to A$$

allora esiste una funzione biiettiva

$$h : A \to B.$$

Quindi basta che dimostriamo che esistono una corrispondenza iniettiva del segmento nel quadrato e una corrispondenza iniettiva del quadrato nel segmento, senza preoccuparci della suriettività.
• Costruire un'applicazione iniettiva f da (0,1) in (0,1)x(0,1) è semplice: $f : x \to (x, x)$ (a ogni punto di un lato del quadrato si associa il punto intersezione della sua "verticale" con la diagonale del quadrato).
• Costruire una corrispondenza iniettiva g da (0,1)x(0,1) in (0,1) richiede una bella idea, dovuta a Cantor. Siano x e y le coordinate di un punto M. Sono due numeri reali, ognuno dei quali si può scrivere in una sola maniera come "decimale illimitato normalizzato" (cioè senza infiniti 9 consecutivi a partire da una certa posizione):

$$x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots \qquad y = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$$

Allora g è costruita a incastro.
Si fa corrispondere a $M(x,y)$ il punto N di (AB) di ascissa

$$T = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

Per ogni M esiste un solo N.
Per esempio, se le coordinate di M sono 1/3 e 7/9, poiché si ha

1/3 = 0,3333333... e 7/9 = 0,777777777777...

il punto N di (AB) corrispondente a M avrà ascissa 0,373737373...
L'unicità dello sviluppo implica l'iniettività di g.
Allora il teorema di Cantor-Bernstein permette di concludere che i due insiemi sono equipotenti.

Il "lo vedo ma non ci credo" di Cantor è ancora il nostro "non ci credo"; le nostre resistenze sono ancora le sue, ma la dimostrazione è corretta e… non ci possiamo

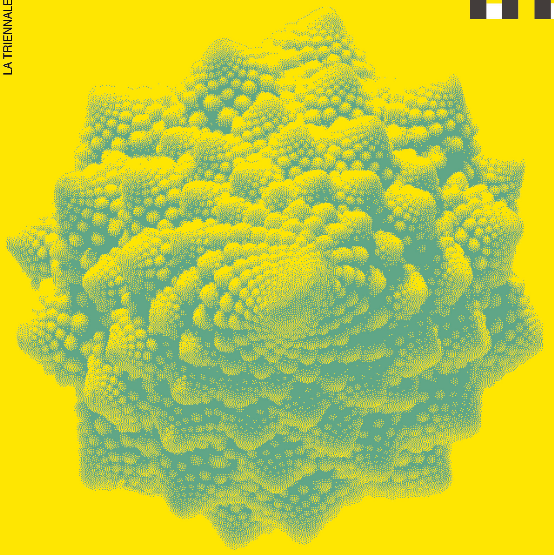
fare nulla. Forse, però, per prudenza, è meglio rinunciare a cercare altri infiniti...
I matematici non si sono lasciati spaventare e hanno dimostrato che l'insieme delle parti di un insieme che ha la potenza del continuo è infinito con una cardinalità che è superiore a quella del continuo: ecco un nuovo infinito che è "più grande".
Di più, questo stesso teorema ci suggerisce come costruire altri infiniti "più grandi", vale a dire come costruire una "gerarchia degli infiniti".
Un bel sostegno nel nostro cercare di guardare sempre più lontano.
Non una brutta storia, vi pare?

14.09.2014
23.11.2014

LA TRIENNALE DI MILANO

Matematici alla scoperta del futuro

mate initaly



scopri la matematica del mondo

Orari
Tutti i giorni (tranne il lunedì) dalle **10.30** alle **20.30.**
Giovedì fino alle **23.00.**

Biglietti
€ 8,00 intero.
€ 6,50 ridotto.
€ 5,50 a persona in gruppo da minimo 15 persone.
€ 5,50 convenzionato ATM.
€ 2,00 dai 7 ai 14 anni accompagnati da un familiare (ridotto a € 6,50).

La mostra MaTeinItaly è organizzata dal Centro "matematita" dell'Università degli Studi di Milano e dal Centro PRISTEM dell'Università Bocconi di Milano.

È curata da Renato Betti, Gilberto Bini, Maria Dedò, Simonetta Di Sieno e Angelo Guerraggio.

Con il Patrocinio di
Comitato Scientifico Internazionale per EXPO 2015 del Comune di Milano, Comune di Milano.

Enti promotori
Università degli Studi di Milano, Università Bocconi, Università degli Studi di Milano-Bicocca.

Con il supporto di
Fondazione Cariplo, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli Studi di Milano-Bicocca, Scuola di Scienze e Tecnologie dell'Università degli Studi di Camerino, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Napoli, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Trento.

Coordinamento progetto e comunicazione
CodiCS - Comunicazione Scientifica

Progetto Allestimento
Glas Architettura

Installazioni interattive e Multimedia
CameraAnebbia
Ibimel srl
Digital Video spa

Progetto grafico
Cristina Chiappini Studio