

Pulse Sense: la matematica per l'individuazione di anomalie in un tracciato elettrocardiografico

Pasqualina Fragneto

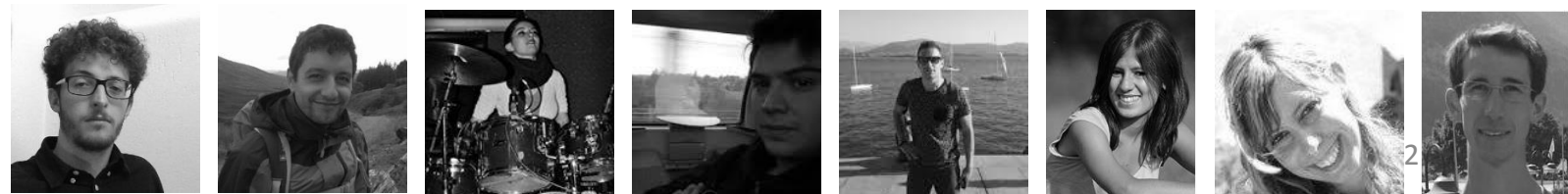
Quando i matematici non entrano in aula
Trento 2017

AST Applied Math Team



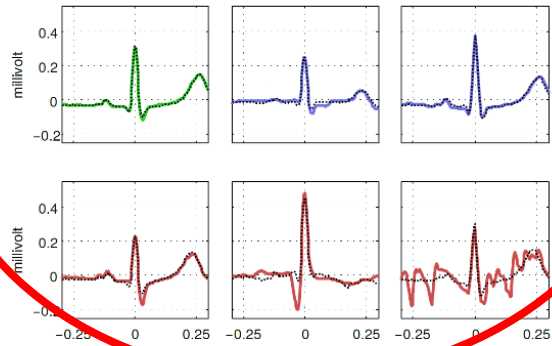
Che cosa facciamo?

- Innovazione e sviluppo su **problemi** industriali
- Studio di **strumenti** matematici per l'analisi e l'elaborazione di dati provenienti da applicazioni industriali
- Condivisione della nostra **esperienza** con gli altri gruppi di AST e il mondo della ricerca



AST Applied Math Team

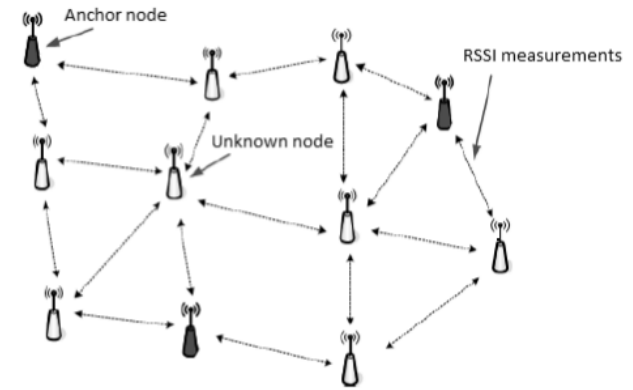
Detezione di anomalie



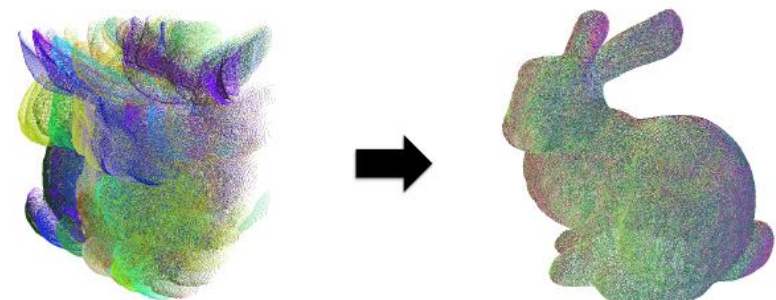
Classificazione di volti



Localizzazione

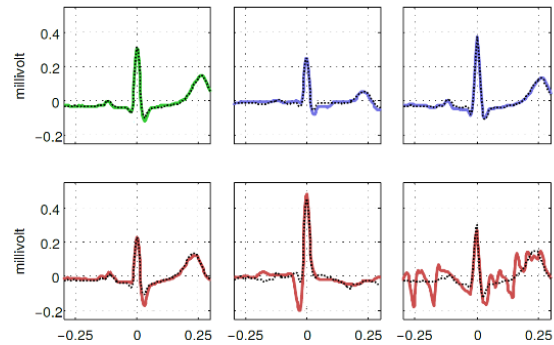


Registrazione 3D



AST Applied Math Team

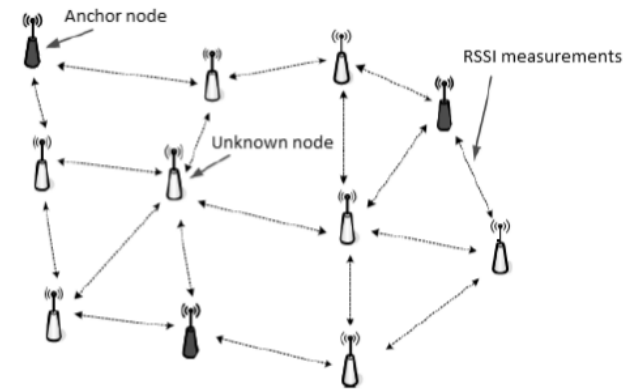
Detezione di anomalie



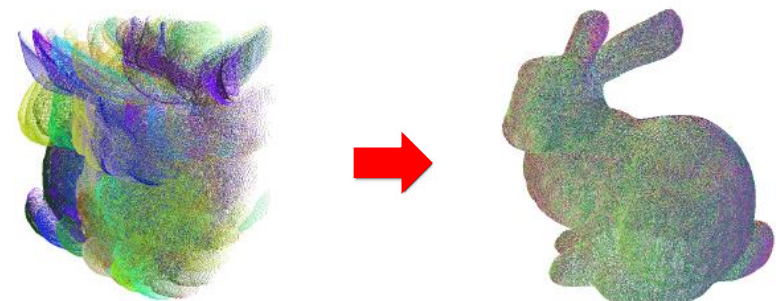
Classificazione di volti



Localizzazione

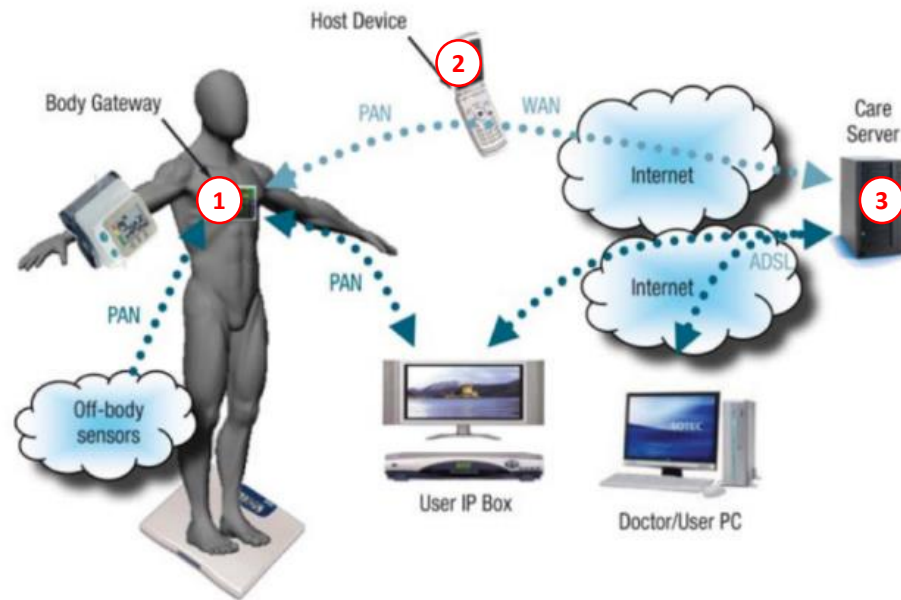


Registrazione 3D



Problema industriale: ridurre consumo di energia

- ① dispositivo indossabile
- ② nodo ospite/dongle
- ③ application server



Dispositivi indossabili, volti al monitoraggio di parametri biomedici, inviano continuamente o periodicamente tutti i dati al nodo / dongle

↓
intenso consumo di energia

Si rende necessario l'elaborazione di una grande quantità di dati

↓
elevata complessità nella gestione di dati

Problema applicativo: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- definizione di una classe normale
- e di una classe anomala come tutto ciò che non è normale
- elettrocardiografia (ECG)
- identificare aritmie e artefatti



Problema applicativo: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- definizione di una classe normale
- e di una classe anomala come tutto ciò che non è normale
- elettrocardiografia (ECG)
- identificare aritmie e artefatti



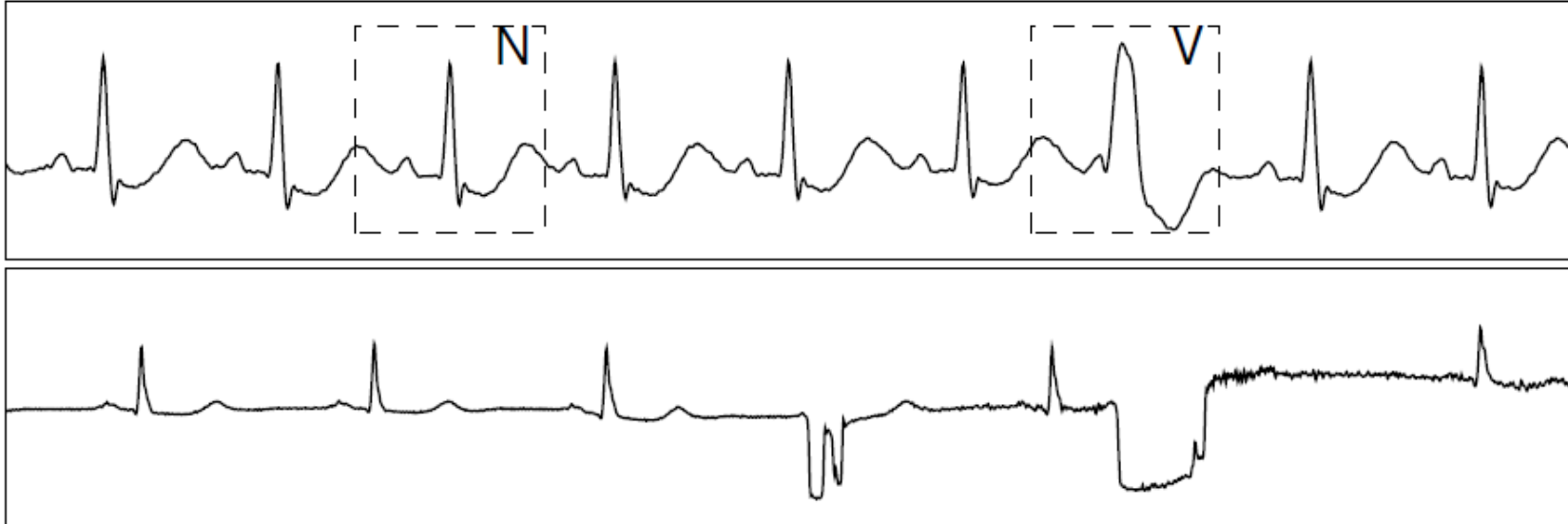
Problema applicativo: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- definizione di una classe **normale**
- e di una classe anomala come tutto ciò che non è normale
- elettrocardiografia (ECG)
- identificare aritmie e artefatti



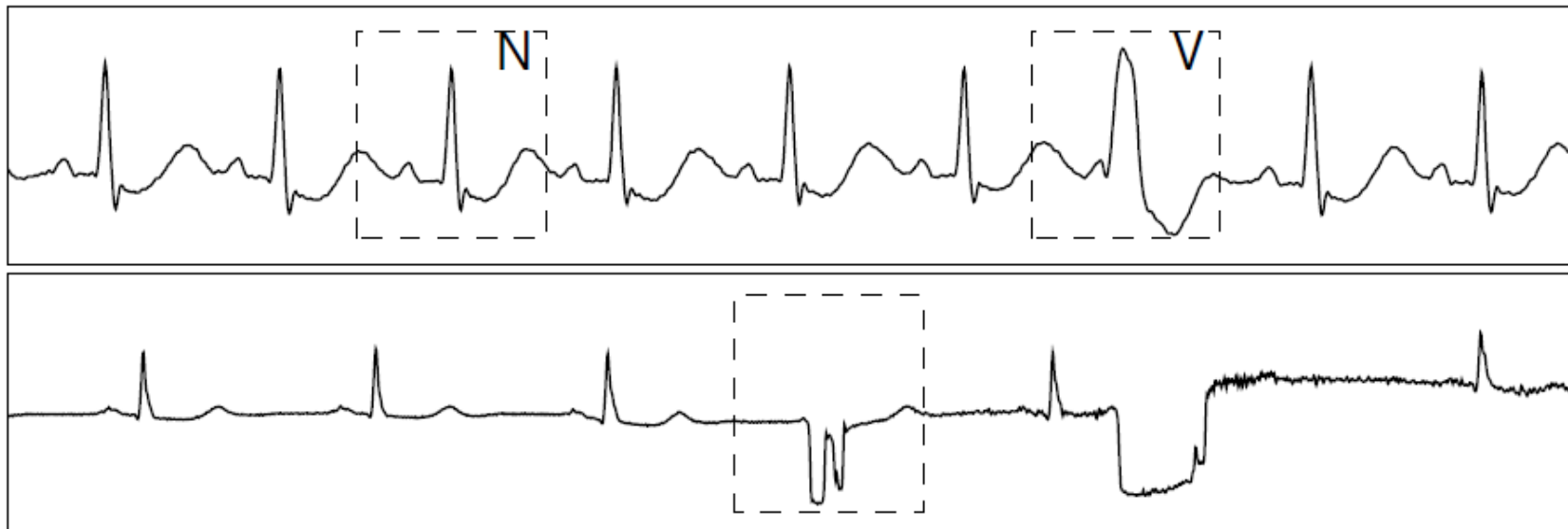
Problema applicativo: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- definizione di una classe normale
- e di una classe **anomala** come tutto ciò che non è normale
- elettrocardiografia (ECG)
- identificare **aritmie** e artefatti



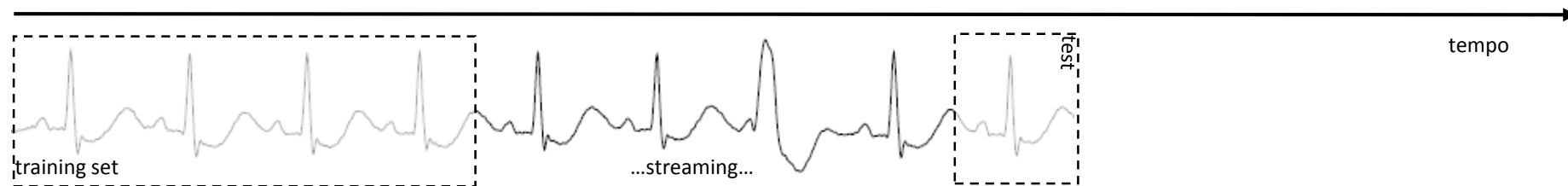
Problema applicativo: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- definizione di una classe normale
- e di una classe **anomala** come tutto ciò che non è normale
- elettrocardiografia (ECG)
- identificare aritmie e **artefatti**



Strategia Adottata: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- apprendimento modello \mathcal{M} per battiti normali che rappresenta male le anomalie
- \mathcal{M} basato su teoria della rappresentazione sparsa

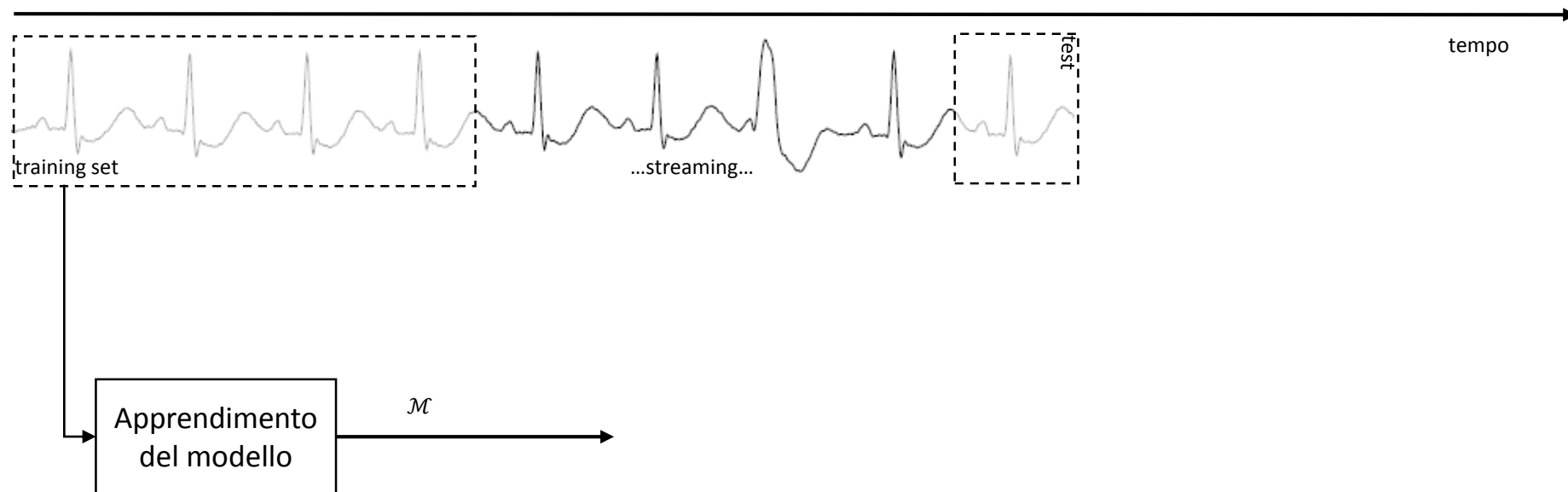


Strategia Adottata: deteazione anomalie in un tracciato ECG

- apprendimento modello \mathcal{M} per battiti normali che rappresenta male le anomalie
- \mathcal{M} basato su teoria della rappresentazione sparsa

Fasi per identificare le anomalie:

- **apprendimento del modello**
- test di un battito
 - errore di ricostruzione
 - regola discriminante



Strategia Adottata: deteazione anomalie in un tracciato ECG

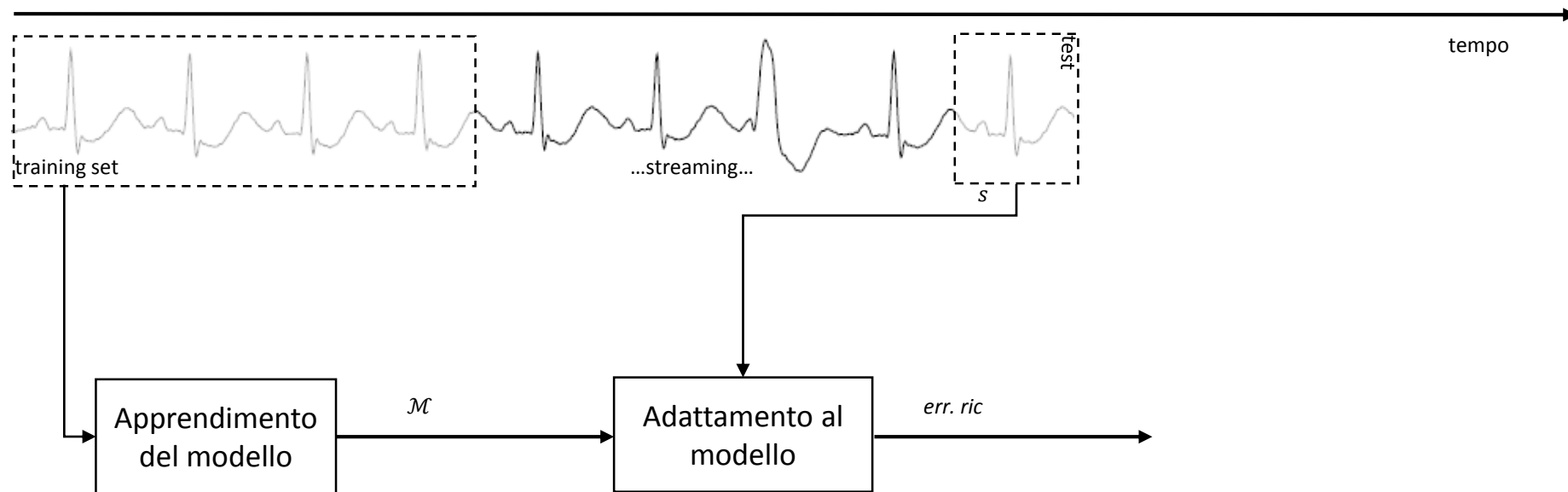
- apprendimento modello \mathcal{M} per battiti normali che rappresenta male le anomalie
- \mathcal{M} basato su teoria della rappresentazione sparsa

Fasi per identificare le anomalie:

- apprendimento del modello
- test di un battito

errore di ricostruzione

regola discriminante



Strategia Adottata: deteazione anomalie in un tracciato ECG

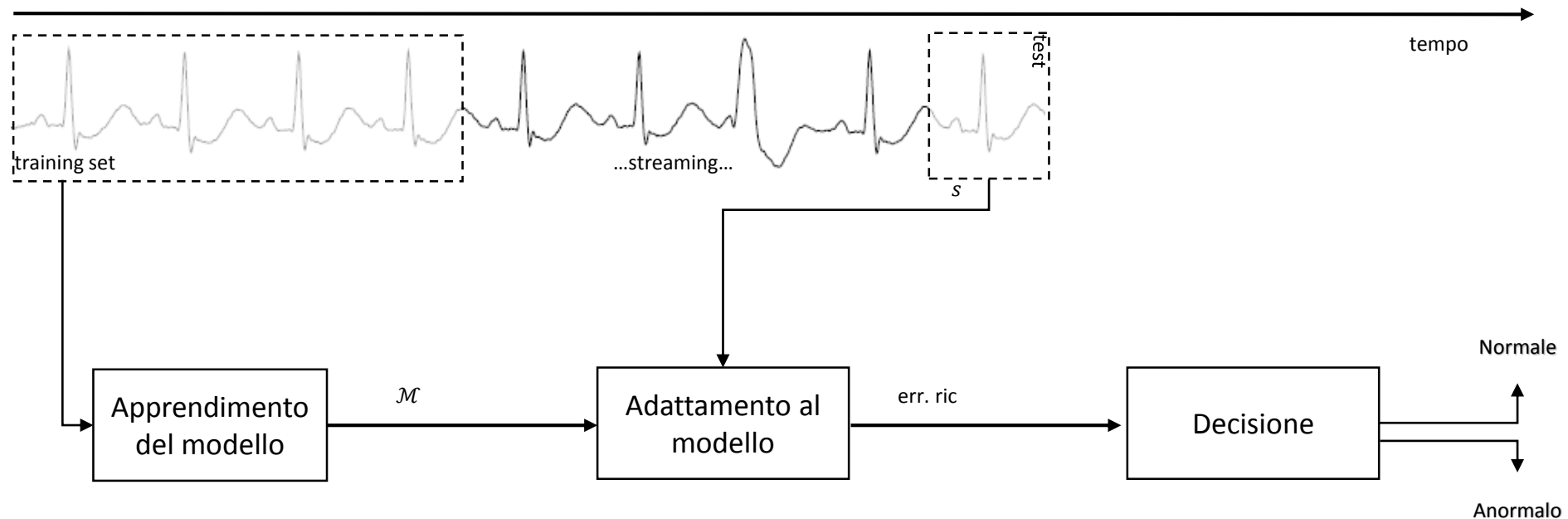
- apprendimento modello \mathcal{M} per battiti normali che rappresenta male le anomalie
- \mathcal{M} basato su teoria della rappresentazione sparsa

Fasi per identificare le anomalie:

- apprendimento del modello
- test di un battito

errore di ricostruzione

regola discriminante

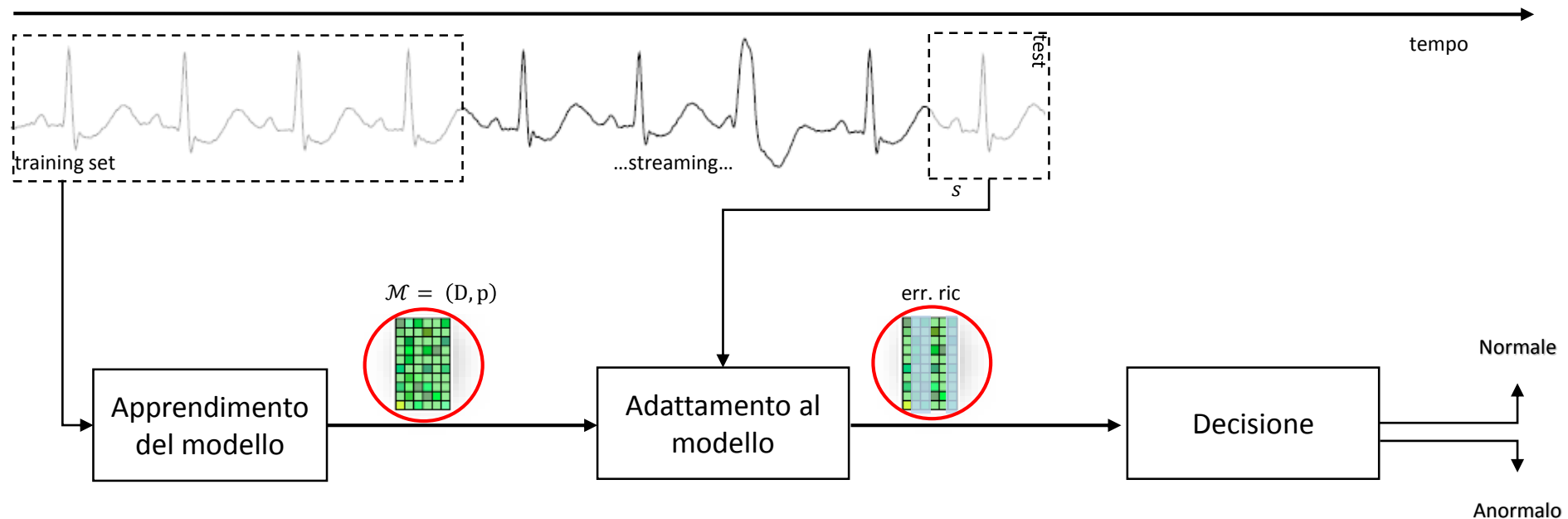


Strategia Adottata: detezione anomalie in un tracciato ECG

- apprendimento modello \mathcal{M} per battiti normali che rappresenta male le anomalie
- \mathcal{M} basato su **teoria** della **rappresentazione sparsa**

Fasi per identificare le anomalie:

- apprendimento del modello
- test di un battito
errore di ricostruzione
regola discriminante



Strumento matematico: definizione di sparsità



Il segnale $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M$, intero $p \in \mathbb{N}$, matrice $D \in \mathbb{R}^{M \times N}$

Assumiamo che i segnali \mathbf{s} siano generati da:

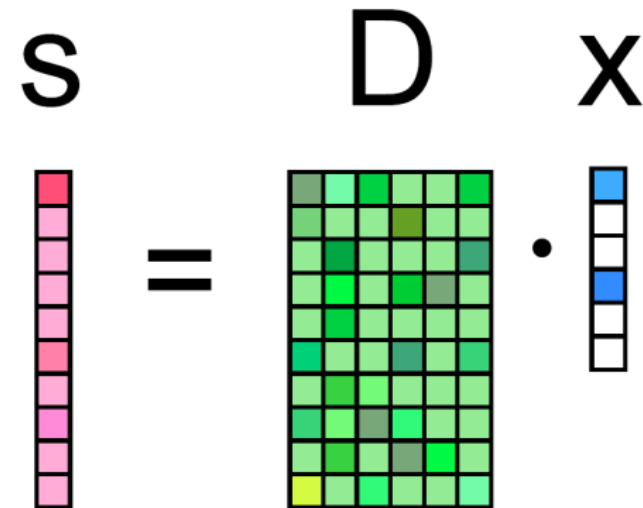
$$\mathbf{s} = D\mathbf{x} \text{ con } \|\mathbf{x}\|_0 \leq p$$

dove:

D : dizionario

$\|\mathbf{x}\|_0 :=$ num. coeff. non nulli

p : livello di sparsità, cioè è il num. max di **atomi** (colonne)



\mathbf{x} : rappresentazione sparsa di \mathbf{s}

Strumento matematico: problema di minimizzazione l_0



Dato il dizionario D e il livello di sparsità p , la rappresentazione sparsa x del segnale s può essere ottenuta risolvendo il seguente problema di minimizzazione

$$\operatorname{argmin}_x \|Dx - s\|_2 \text{ tale che } \|x\|_0 \leq p$$

Il sistema è **sottodeterminato** e a priori ha infinite soluzioni. Il problema è NP

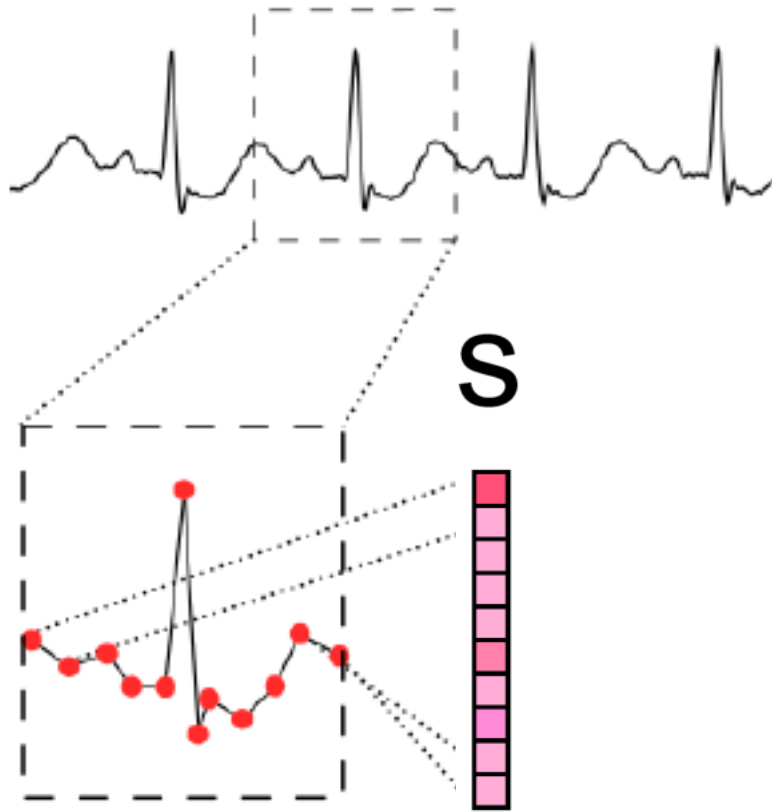


La teoria della RS fornisce delle garanzie teoriche sul numero e sulle proprietà degli atomi del dizionario per poter invertire il sistema attraverso dei metodi di regolarizzazione.

$$s = D \cdot x$$
The diagram shows the equation $s = D \cdot x$. On the left, a vertical vector s is represented by a column of 10 pink squares. In the middle, an equals sign is followed by a 10x5 grid representing the dictionary matrix D , with various shades of green and yellow. To the right of the grid is a dot product symbol, followed by a vertical vector x represented by a column of 5 squares, with the top two being blue and the bottom three being white.

x : rappresentazione sparsa di s

Strumento matematico: modello del battito cardiaco



Dato il dizionario D e il livello di sparsità p , la rappresentazione sparsa \mathbf{x} del battito \mathbf{s} può essere ottenuta risolvendo il seguente problema di minimizzazione

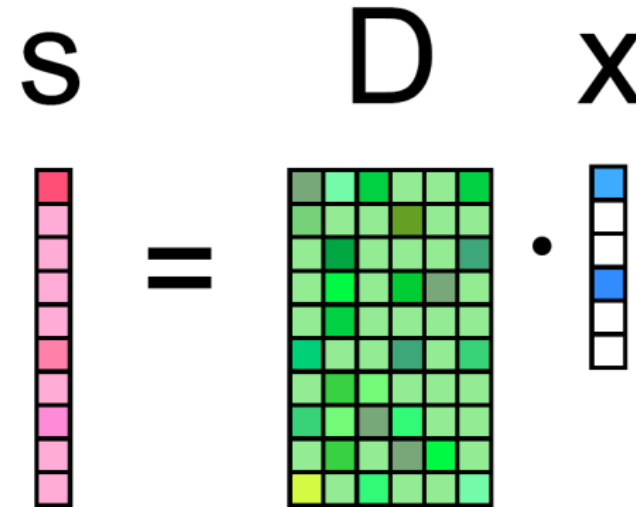
$$\operatorname{argmin}_x \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2 \text{ tale che } \|\mathbf{x}\|_0 \leq p$$

dove:

D : **dizionario**

$\|\mathbf{x}\|_0$:= num. coeff. non nulli

p : livello di sparsità, cioè è il num. max di **atomi** (colonne)



\mathbf{x} : rappresentazione sparsa di \mathbf{s}

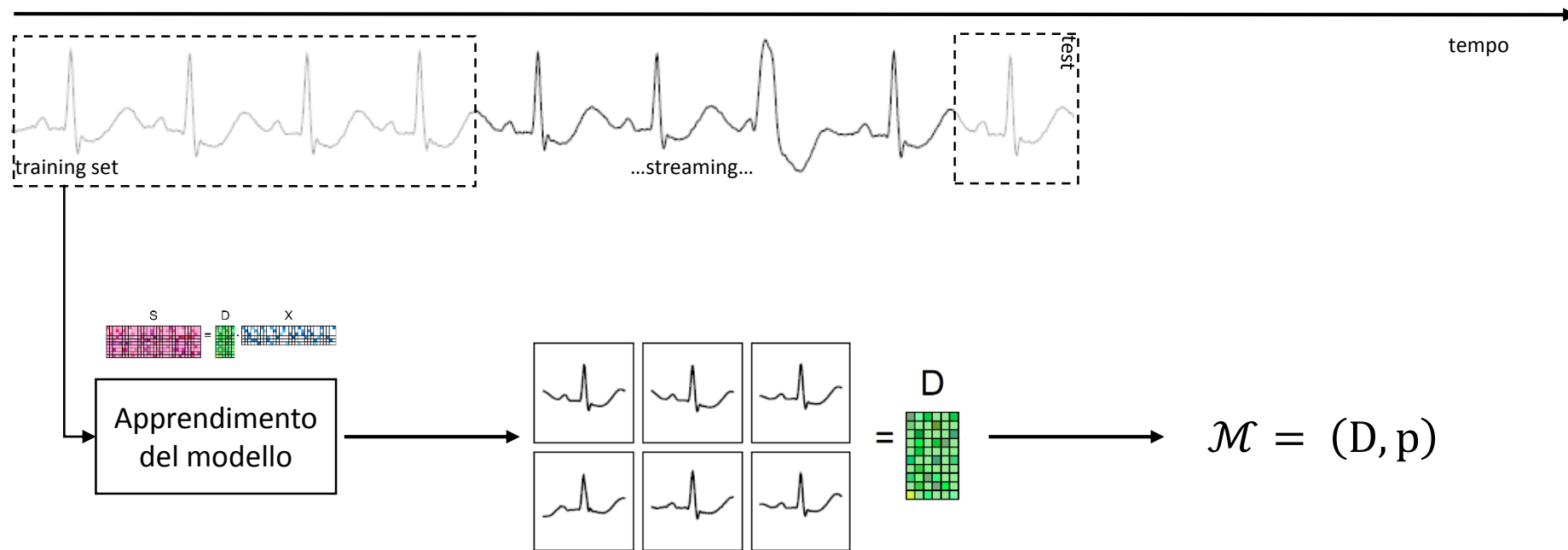
Procedura Proposta: deteazione anomalie in un tracciato ECG

Consideriamo training set S di battiti normali, livello di sparsità p e numero di atomi N .

Problema:

$$\operatorname{argmin}_{D, X} \|D \cdot X - S\|_F \text{ tale che } \|x_i\|_0 \leq p$$

Possibile soluzione: algoritmo **greedy** - K-SVD



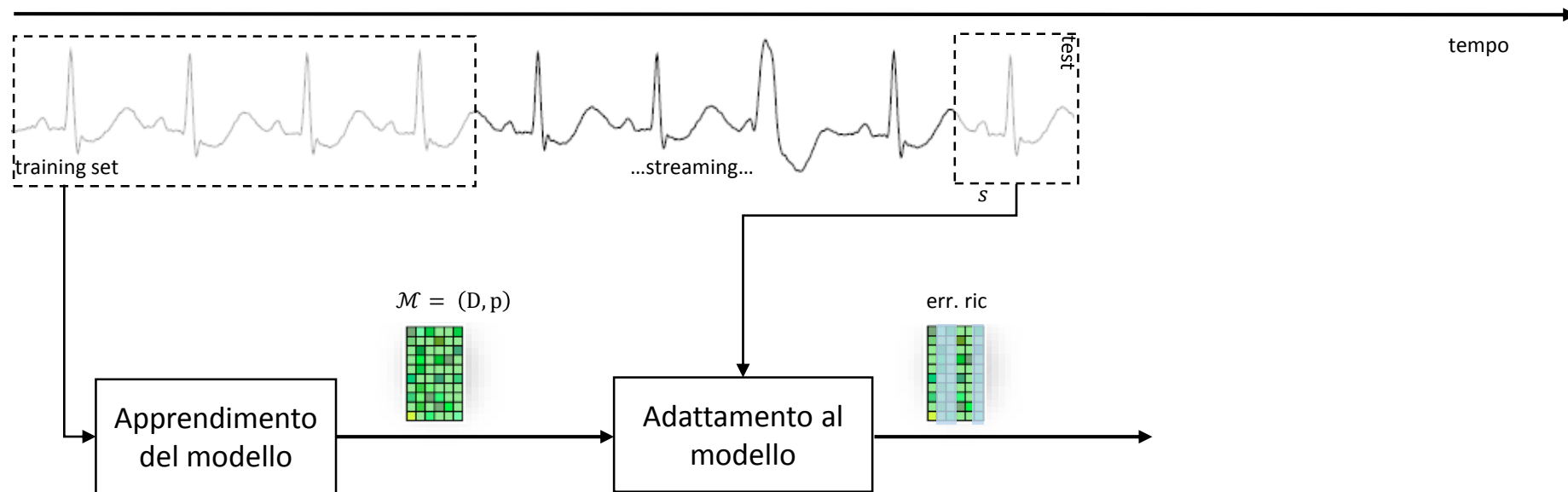
Procedura Proposta: deteazione anomalie in un tracciato ECG

Fissati i parametri D e p del modello $M(D; p)$,

Problema:

$$\text{err. ric} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2 \text{ tale che } \|\mathbf{x}\|_0 \leq p$$

Possibile soluzione: algoritmo **greedy** - OMP

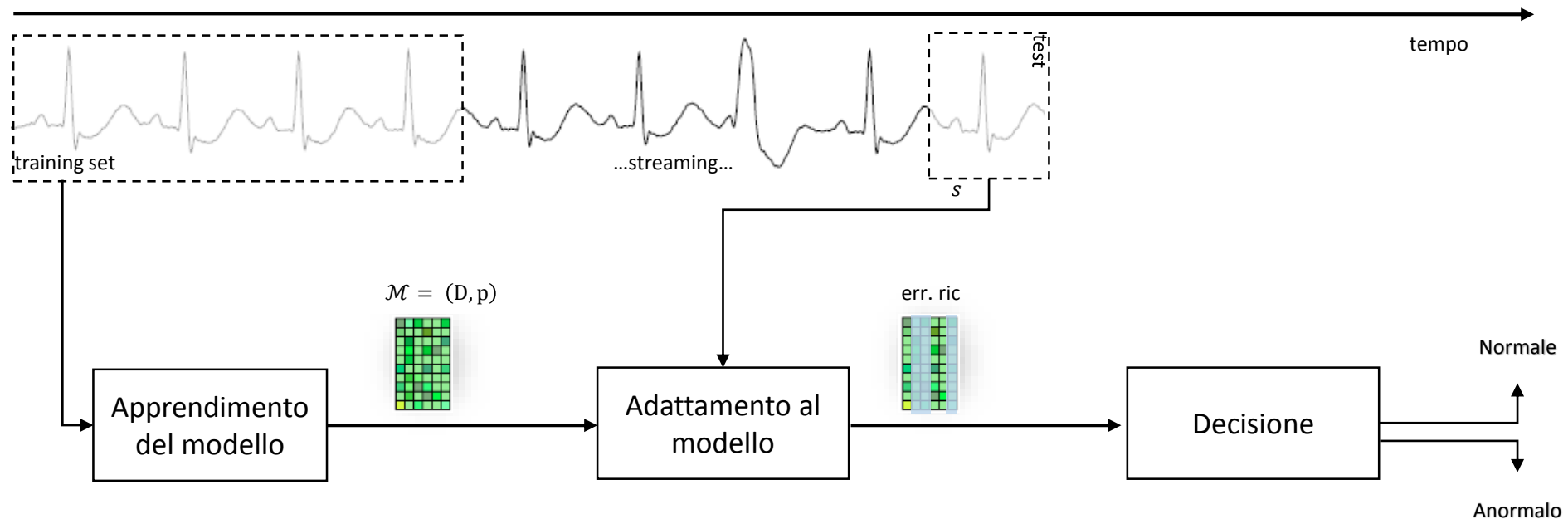
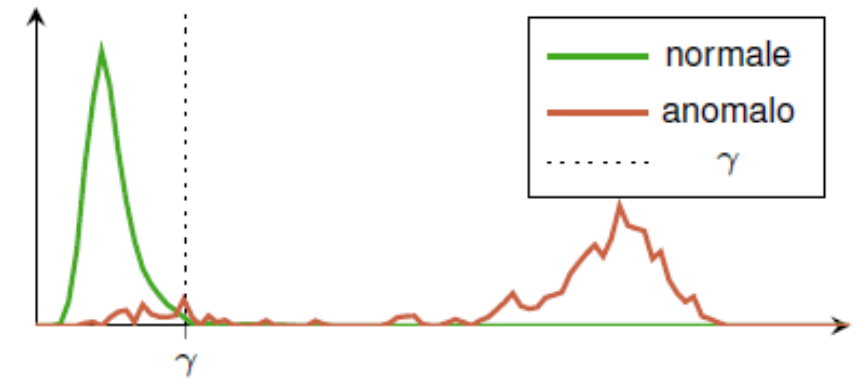


Procedura Proposta: detezione anomalie in un tracciato ECG

Problema: usare **errore di ricostruzione** per classificare

Possibile soluzione:

- err ric: basso per battiti normali, alto per anomali
- scegliere una **soglia γ**
- ammettere una percentuale **di false anomalie**



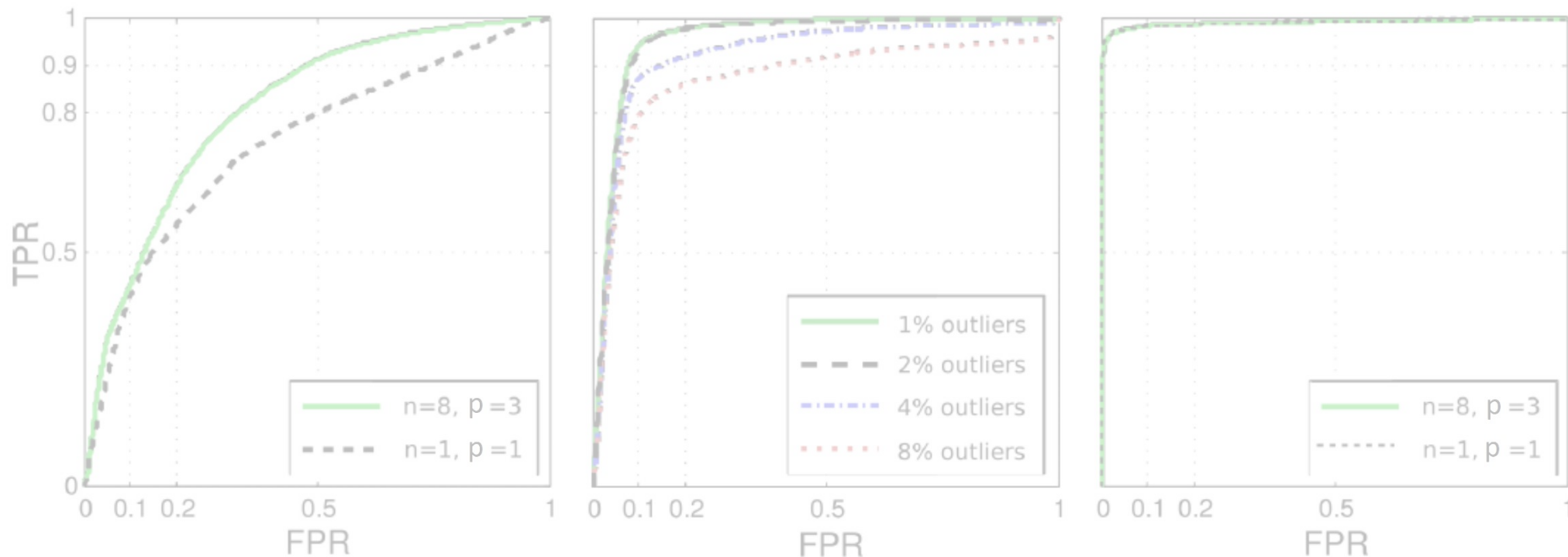
Validazione: collezione di tracciati

Il database **PULSE** contiene:

- 20 tracciati ECG di utenti in buona salute
- ogni tracciato è lungo da 40 minuti fino a 2 ore

Il database **MIT-BIH Arrhythmia** contiene:

- 48 tracciati ECG, ciascuno di circa 30 minuti
- ogni tracciato contiene alcune aritmie annotate da cardiologi.



Validazione: cifre di merito

- **False Positive Rate (FPR)**: la percentuale di battiti normali identificati come anomali
- **True Positive Rate (TPR)**: la percentuale di battiti identificati correttamente come anomali
- **Receiving Operating Curve (ROC)**: ottenuto plottando il TPR vs. FPR al variare di γ

