PERCHE´ LA PROBABILITA'?

ogni volta che si propone un nuovo contenuto
(e la probabilità lo è, di fatto, per quasi tutti i tipi di scuola)

sarebbe saggio

> fornire motivazioni convincenti

> conquistare i docenti all'innovazione
(per poter poi conquistare anche gli studenti)

alla ricerca di motivazioni (perché mai la probabilità?)
cominciamo con un problema
non privo di un suo romantico fascino...

UNA STORIA D'AMORE
CON FINALE "APERTO"

> Lui abita a Roma, Lei a Milano.

> Lui ama Lei con profondo trasporto. Anche Lei ama Lui, ma, ultimamente, in modo decisamente meno lineare e più contraddittorio.

> Ogni fine-settimana, per incontrarsi, una volta Lui va a Milano, l'altra Lei va (dovrebbe andare) a ~~Milano~~ ROMA.

> "Dovrebbe", perché, in realtà, ogni volta che a muoversi dovrebbe essere Lei sorge qualche difficoltà…

> Questo fine-settimana, ad esempio, toccherebbe a Lei di muoversi; ma Lei ha comunicato a Lui che farà scegliere alla sorte…

> Lancerà una moneta e se viene testa partirà, altrimenti non partirà: nel caso in cui debba partire lancerà un dado e a seconda del numero che uscirà prenderà il primo aereo, il secondo, ecc. dei 6 aerei che collegano Milano a Roma.

> Lui si è recato di buonora all'aeroporto e ha visto arrivare (invano!) i primi 5 aerei da Milano; lo lasciamo lì che attende, un po' nervoso, il sesto e ultimo aereo…

>>>>>>>>> Ma ci chiediamo:
qual è la probabilità che Lei arrivi con il sesto aereo?

SOLUZIONI (PLURALE)

soluzione 1 (*bado al sodo, io*)

> Io non mi faccio confondere. La faccenda è chiara: c'è probabilità 1/2 , cioè 50%, che sia uscita testa è 1/2, cioè 50%, che sia uscita croce. Se è uscita testa, visto che Lei non è partita con i primi 5 aerei, sicuramente sarà sul sesto. Quindi, a questo punto, la probabilità che Lei sia sul sesto aereo è 1/2, cioè il 50%.

soluzione 2 (*sono un tipo preciso, io*)

> Io faccio un discorso analitico e preciso. La probabilità che Lei sia sul sesto aereo è 1/6 (perché poteva partire con uno dei 6 aerei) del 50% (perché poteva partire e non partire). Ma 1/6 del 50% è come dire 1/6 di 1/2, e quindi 1/12. Quindi la probabilità che Lei sia sul sesto aereo è 1/12, cioè circa l'8%.

LA SOLUZIONE

i casi possibili, a priori, sono esattamente 12:

T1, T2, T3, T4, T5, T6, C1, C2, C3, C4, C5, C6

solo che ora possiamo escludere che il sorteggio abbia dato gli esiti T1, T2, T3, T4, T5

→ **l'esito T6, che corrisponde all'arrivo con il sesto aereo, ha probabilità 1/7, e cioè circa il 14%**

QUALCHE PAROLA DI COMMENTO…

quello appena visto è un problema bello
perché

> favorisce lo sviluppo di una discussione

> "centra" alcuni snodi fondamentali

> non ha bisogno di un apparato di nozioni "pesante"

> non è emotivamente "neutro" (e quindi si presta a diventare un "problema memorabile")

lo studio della probabilità
si può costruire intorno a problemi belli
perché

- i problemi della probabilità sono molto di rado banali
- l'apparato di concetti e nozioni che entra in gioco è molto ridotto
- la probabilità si intreccia alle problematiche della nostra vita quotidiana

CHE COSA E' LA PROBABILITA'? UNA PRIMA RISPOSTA

tutti d'accordo →

se lancio una moneta la probabilità che esca testa è 1/2 (ovvero 50%)

a partire da questo unanime accordo
cerchiamo di costruire
una <u>definizione generale di probabilità</u>

diciamo che la probabilità dell'evento "testa" è 1/2 perché

i casi possibili sono 2: "testa" o "croce"
il caso favorevole al realizzarsi dell'evento è 1: "testa"

e dunque ecco la **definizione classica di probabilità**

$$\text{probabilità di un evento} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

ma...

> nel lancio di due dadi i casi possibili sono 11:
2 , 3, 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12

> e quindi secondo la definizione classica
la probabilità di ciascuno di essi sarebbe 1/11

> mentre è evidente, ad esempio, che
probabilità dell'evento "2" < probabilità dell'evento "7"

UN CIRCOLO MOLTO VIZIOSO…

rimediare si può →

basta considerare come casi possibili

~ non le possibili somme

(da 2 a 12)

~ ma le possibili coppie

(1;1) , (1;2) , … , (6;6)

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

> avremo allora

prob (2) = 1/36 prob (7) = 6/36

e così via…

> insomma per far funzionare bene le cose occorre che

i casi da conteggiare siano di uguale "peso"
ovvero, per dirla meglio, che siano… equiprobabili!

→ ma allora la definizione classica
apparentemente così elegante e "pulita"
è intrinsecamente e definitivamente viziosa

(il che, per una definizione, non è difetto di poco conto…)

CHE COSA E' LA PROBABILITA'? UNA SECONDA RISPOSTA

tutti d'accordo →

se alla "Boutique del pane" negli ultimi 400 giorni per 300 volte il pane è uscito dal forno bruciato la probabilità che domani esca bruciato è 300/400 (ovvero 75%)

a partire da questo unanime accordo
cerchiamo di costruire
un'altra definizione generale di probabilità

la probabilità dell'evento "pane bruciato" è 300/400 perché

gli esperimenti effettuati sono 400
gli esperimenti in cui si è realizzato l'evento sono 300

e dunque ecco la

definizione frequentistica di probabilità

$$\text{probabilità di un evento} = \frac{\text{n.ro di esperimenti con esito favorevole}}{\text{n.ro di esperimenti}}$$

ma…

> nel caso di una partita di calcio tra la nazionale del Brasile e il Dopolavoro Ferrovieri in Pensione non esistono precedenti

> e quindi secondo la definizione frequentistica non sarebbe possibile esprimere la probabilità dell'evento vittoria del Brasile
(che, a occhio, valuteremmo intorno al 100%!)

UN LIMITE INVALICABILE …

rimediare **non** si può →

per far funzionare bene le cose occorre che

~ l'evento a cui assegnare una probabilità sia ripetibile
~ preesistano una serie significativa di esperimenti su cui basarsi

→ ma allora la definizione frequentistica apparentemente così pratica e concreta ha un campo di applicabilità ridotto

(il che, per una definizione, non è difetto di poco conto…)

e inoltre …

è accettabile, ad esempio, che nel lancio di una moneta

la probabilità dell'evento "testa" sia 517/1000

sulla base del fatto che in 1000 esperimenti 517 volte è uscita testa?

insomma…

la definizione frequentistica risulta viziata da un duplice limite di applicabilità:

- a certi eventi non si può applicare
- nelle situazioni laboratoriali non è il caso di applicarla

(la definizione classica risulta decisamente preferibile)

CHE COSA E' LA PROBABILITA'? UNA TERZA RISPOSTA

tutti d'accordo →

se si considera equa una scommessa 4 contro 1 che la maggioranza degli studenti abbia in odio la matematica la probabilità che sia così è 4/5 (ovvero 80%)

a partire da questo unanime accordo cerchiamo di costruire ancora un'altra definizione generale di probabilità

la probabilità dell'evento "maggioranza degli studenti odia la matematica" è 4/5 perché

il "montepremi" complessivo è 5 (4 contro 1)
la scommessa sull'evento è di 4

e dunque ecco la

definizione soggettivistica di probabilità

$$\text{probabilità di un evento} = \frac{\text{scommessa sull'evento}}{\text{somma delle scommesse contrapposte}}$$

ma…

- qual è una scommessa equa sull'evento "la corte di Antonio nei confronti di Anna avrà successo"?
- chi potrà essere giudice di questa equità?

→ la definizione soggettivistica soffre di una certa vaghezza

(il che, per una definizione, non è difetto di poco conto…)

MISURA DELLA VERITA'
E
MISURA DELLA PROBABILITA'

> la LOGICA si occupa della misura della verità
(esistono due misure della verità di un enunciato: V e F)

> compito dei logici **non** è stabilire la verità
di frasi semplici, elementari, atomiche
→ la verità di una frase elementare come
"Piero è nato nel 1452"
dipende da una rete contestuale
(Piero è il pittore o il mio vicino di casa?)

> compito dei logici è valutare la verità di frasi complesse
a partire da ipotesi sulla verità delle frasi componenti
(**calcolo degli enunciati** e **calcolo dei predicati**)

> analogamente la TEORIA DELLA PROBABILITA'
si occupa della misura della probabilità
(la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1)

> compito di chi studia la probabilità **non** è valutare
la probabilità di eventi semplici, elementari, atomici
(la probabilità di un evento semplice dipende dalla
definizione di probabilità che si assume)

> compito di chi studia la probabilità è valutare la probabilità
di eventi complessi a partire da ipotesi sulla probabilità
degli eventi più semplici coinvolti nell'evento complesso
(è il **calcolo delle probabilità** che andiamo a cominciare...)

LA SOMMA LOGICA DI DUE EVENTI (1)

Viene estratta una carta da un mazzo di carte napoletane

Evento A = la carta estratta è di spade

Evento B = la carta estratta è di coppe

probabilità (A) = 10/40 = 1/4

probabilità (B) = 10/40 = 1/4

Evento A o B (somma logica di A e B) = la carta estratta è di spade o di coppe

probabilità (A o B) = 10/40 + 10/40 = 20/40 = 1/2

in generale:

probabilità (A o B) = probabilità (A) + probabilità (B)

e dunque:

> la probabilità che nel lancio di un dado esca 1 o 2 è
1/6 + 1/6 = 1/3

> la probabilità che nella tombola il primo numero che uscirà sia sulla mia unica e preziosa cartella è
1/90 + …. +1/90 = 15/90 = 1/6

> la probabilità che da un'urna contenente 4 palline rosse, 3 nere e 2 bianche la pallina estratta sia rossa o nera è
4/9 + 3/9 = 7/9

ma

estraendo una carta da un mazzo di carte napoletane la probabilità che sia una figura o una carta di spade
non è 12/40 + 10/40 = 22/40 bensì 12/40 + 10/40 – 3/40 = 19/40

LA SOMMA LOGICA DI DUE EVENTI (2)

Insomma, dati due eventi A e B
se A e B sono incompatibili →
probabilità della somma logica di A e B =
somma delle probabilità di A e B

ma se A e B sono compatibili →
probabilità della somma logica di A e B =
somma delle probabilità di A e B
meno probabilità che si verifichino sia A che B

e quindi:

$$\boxed{\text{prob (A o B)} = \text{prob (A)} + \text{prob (B)} - \text{prob (A e B)}}$$

(formula che contiene come caso particolare la precedente)

e dunque:

> la probabilità che nel lancio di un dado esca un numero pari o un numero maggiore di 2 è

$$3/6 + 4/6 - 2/6 = 5/6$$

> se si pesca una parola nell'insieme di parole *cane, casa, cena, calle, colla, callo, colle, caso* la probabilità che la parola pescata contenga la lettera *a* o la lettera *e* è

$$7/8 + 4/8 - 3/8 = 8/8 = 1$$

> osserviamo l'analogia…
se $A \cap B = \emptyset$ →
n.ro elem. A U B = n.ro elem. A + n.ro elem. B
se $A \cap B \neq \emptyset$ →
n.ro elem. A U B = n.ro elem. A + n.ro elem. B – n.ro elem. A B

IL PRODOTTO LOGICO DI DUE EVENTI (1)

vengono lanciati una moneta e un dado

Evento A = nel lancio della moneta esce testa

Evento B = nel lancio del dado esce 5

probabilità (A) = 1/2

probabilità (B) = 1/6

Evento A e B (prodotto logico di A e B) = escono testa e 5

probabilità (A e B) = 1/2 x 1/6 = 1/12

in generale:

probabilità (A e B) = probabilità (A) x probabilità (B)

e dunque:

> la probabilità che lanciando due monete escano due teste è
1/2 x 1/2 = 1/4

> la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di carte napoletane e rimettendo la prima estratta nel mazzo escano due carte di spade è
10/40 x 10/40 = 100/1600 = 1/16

> la probabilità che un cuoco che scuoce la pasta 2 volte su 3 e brucia la carne 4 volte su 5 presenti pasta scotta e carne bruciata è
2/3 x 4/5 = 8/15

ma

estraendo una coppia di palline da un'urna contenente 4 palline rosse, 3 nere e 2 bianche la probabilità che le palline estratte siano entrambe bianche

non è 2/9 x 2/9 = 4/81 bensì 2/9 x 1/8 = 2/72 = 1/36

IL PRODOTTO LOGICO DI DUE EVENTI (2)

Insomma, dati due eventi A e B
se A e B sono indipendenti →
probabilità del prodotto logico di A e B =
prodotto delle probabilità di A e B

ma se A e B sono dipendenti →
probabilità del prodotto logico di A e B =
prodotto della probabilità di A
per la probabilità di B condizionato a A

e quindi:

prob (A e B) = prob (A) x prob (B/A)

(formula che contiene come caso particolare la precedente)

e dunque:

> la probabilità che 3 persone vengano sorteggiate in ordine alfabetico è

$$1/3 \times 1/2 = 1/6$$

> la probabilità che estraendo contemporaneamente (o comunque senza rimettere nel mazzo le estratte precedenti) 4 carte da un mazzo di carte napoletane si abbiano tutte carte di seme diverso è

$$40/40 \times 30/39 \times 20/38 \times 10/37 = 1000/9139$$

> la probabilità di indovinare l'ordine d'arrivo in una corsa tra cinque ragazzi che non conosciamo è

$$1/5 \times 1/4 \times 1/3 \times 1/2 \times 1/1 = 1/5! = 1/120$$

L'EVENTO COMPLEMENTARE DI UN EVENTO

una moneta viene lanciata due volte

Evento A = esce due volte testa

probabilità (A) = 1/4

Evento ~A (complementare di A) = non esce due volte testa

probabilità (~A) = 1 – 1/4 = 3/4

in generale:

probabilità (~A) = 1 – probabilità (A)

e dunque:

> la probabilità che nel lancio di un dado non esca 1 è
1 – 1/6 = 5/6

> la probabilità che da un'urna contenente 4 palline rosse, 3 nere e 2 bianche la pallina estratta non sia rossa è
1 – 4 /9 = 5/9

e, più che altro:

> la probabilità che
lanciando 5 volte una moneta almeno una volta esca testa
non converrà calcolarla così:
probabilità che esca testa 1 volta o 2 volte o 3 volte o 4 volte o 5 volte
ma così: 1 – la probabilità che non esca mai testa
ovvero: 1 – la probabilità che esca sempre croce
→ 1 – (1/2 x 1/2 x1/2 x 1/2 x 1/2) = 1 – 1/32 = 31/32

NB1 – le 3 formule studiate (somma e prodotto logico, complementare) valgono qualunque sia la definizione di probabilità utilizzata

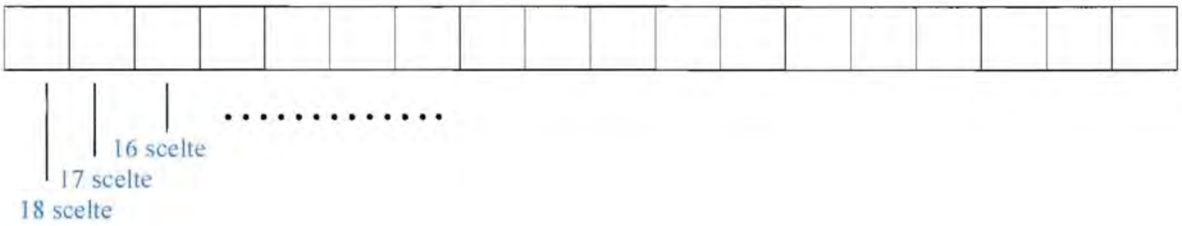
NB2 – con il complementare di un evento si completa il parallelismo tra le operazioni relative alla probabilità e le operazioni insiemistiche (o logiche)

UN PROFESSORE SADICO
(primi passi nella combinatoria: le permutazioni)

"Basta con la confusione che fate accalcandovi all'uscita! Meritereste tutti 5 in condotta, ma, per pura bontà, commuto la pena: uscirete da quest'aula solo quando non avrete scritto tutti i possibili ordinamenti: così ogni giorno faremo un sorteggio e gli spintoni finiranno…"

I 18 alunni si mettono al lavoro pensando di cavarsela in una decina di minuti… Dopo qualche anno i genitori li trovano ingobbiti e invecchiati ancora lì a compilare elenchi…

Infatti le PERMUTAZIONI (gli ordinamenti possibili) sono
18x17x16x15x14x13x12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 18!
= 6.402.373.705.728.000



in generale:

numero delle permutazioni di n elementi = n!

e dunque:

> i diversi possibili ordini d'arrivo di una finale olimpica dei 100 metri (8 finalisti) sono 8! = 40.320

> la probabilità che l'oratore a cui una figlia dispettosa ha mischiato i 5 fogli della relazione legga la conferenza "giusta" è 1 / 5! = 1/120

le permutazioni rispondono alla domanda → in che ordine?

ALL'ALBA (FORSE) VINCERO' (MA CHE COSA?)
(le disposizioni)

Premi della lotteria parrocchiale:
1° premio una maxi-tv, 2° una bici, 3° una scatola di pastelli
Biglietti venduti: 1500 biglietti a 1500 parrocchiani diversi
Quante sono le possibili differenti terne di vincitori?
(la terna A,B,C è diversa dalla terna C,B,A - non è la stessa cosa vincere una maxi-tv o una scatola di pastelli)

Infatti le DISPOSIZIONI (le scelte possibili di 3 persone in un determinato ordine su 1500) sono
1500 x 1499 x 1498 = 3.368.253.000

in generale:

numero delle disposizioni di k elementi in un insieme di n oggetti
= n x (n – 1) x … x (n – k + 1)

e dunque:
> le diverse possibili composizioni del podio di una finale olimpica dei 100 m (3 premiati su 8 finalisti) sono 8 x 7 x 6 = 324
> la probabilità che di indovinare i primi due interrogati del quadrimestre in una classe di 25 alunni è 1/25 x 24 = 1/600

le disposizioni rispondono alla domanda
→ chi e in che ordine?

UNA STORIA DI FANTASIA
(le combinazioni)

"Tra le 24 ospiti delle mie eleganti e raffinate serate, ce ne sono 8 privilegiate che restano a dormire con me"

Le possibili scelte delle 8 fortunate (?) sono piuttosto numerose; si può procedere così:

1 – si calcola il numero delle disposizioni di 8 elementi su 24 oggetti
2 – si divide per il numero di permutazioni di 8 elementi

Dunque le COMBINAZIONI (le scelte possibili) sono

$$\frac{24 \times 23 \times 22 \times \ldots \times 17}{8!}$$

in generale:

n.ro delle combinazioni di k elementi in un insieme di n oggetti = $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)\ /\ k!$

con qualche semplice conto

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) / k! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k)! / k! \times (n-k)! =$$

$$n! / k!\,(n-k)! = \binom{n}{k}$$

si arriva a una seconda versione della formula

n.ro delle combinazioni di k elementi in un insieme di n oggetti = $\binom{n}{k}$

le combinazioni rispondono alla domanda → chi?

e dunque:

> se in un ristorante esotico il menu comprende 28 pietanze e il pranzo a prezzo fisso prevede la scelta di 4 tra esse, cambiando ogni giorno pranzo a prezzo fisso il numero di giorni necessario a esaurire tutte le possibilità è

28 x 27 x 26 x 25 / 4! = 491.400/24 = 20.475

> nell'estrazione di 5 numeri del lotto la probabilità di indovinare la cinquina è

1 / (90 x 89 x 88 x 87 x 86 / 5!) = 1 / (5.289.392.160 / 120) = 1 / 44.078.268

>>>>> il gatto e alla volpe hanno saputo che ci sono 7 partite "combinate", 4 con vittorie della squadra di casa e 3 con vittorie della squadra in trasferta; non sanno però, tra le 7, quali finiranno con 1 (vittoria squadra di casa) e quali con 2 (vittoria squadra in trasferta); per calcolare quante sono le situazioni diverse che si possono verificare…

il gatto pensa: basta calcolare quante sono le scelte possibili delle 4 sulle 7 con risultato 1

la volpe pensa: basta calcolare quante sono le scelte possibili delle 3 sulle 7 con risultato 2

chi ha ragione?

Il calcolo del gatto dà risultato 7x6x5x4/4x3x2x1 = 840/24 = 35

Il calcolo della volpe dà risultato 7x6x5/3x2x1 = 210/6 = 35

→ hanno ragione entrambi

d'altra parte $\binom{n}{n\text{-}k} = \dfrac{n!}{n\text{-}k!\ n\text{-}(n\text{-}k)!} = \dfrac{n!}{n\text{-}k!\ k!} = \binom{n}{k}$

QUANTO SI DEVE PREOCCUPARE IL SIGNOR X?

La malattia MMM è endemica presso la popolazione P.
La percentuale di malati della malattia MMM nella popolazione P è dello 0,25% (1 malato ogni 400 abitanti).
E' stata messo a punto un test clinico per la malattia MMM che ha un'attendibilità del 98% (98 volte su 100 dà la risposta giusta).
20.000 persone vengono sottoposte al test.
Indichiamo con M chi risulta positivo, con S chi risulta negativo al test.
Il signor X è tra coloro che risultano M (positivo al test).
Qual è la probabilità che X sia malato della malattia MMM?

Su 20.000 sottoposti al test → 50 sono malati
19.950 sono sani

Dei 50 malati → risultano 49 M
1 S

Dei 19.950 sani → risultano 399 M
19.551 S

Dei 20.000 sottoposti al test → risultano in totale 448 M
19.552 S

Quindi, la probabilità che il signor X (come uno qualunque dei 20.000 analizzati risultato M al test) sia effettivamente malato è 49/448, cioè

poco più del 10%!