

PROSPETTIVE SULL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA PER IL 21° SECOLO

Documento preparatorio per uno studio internazionale dell'ICMI

Perché uno studio sulla geometria?

La Geometria, considerata come uno strumento per comprendere, descrivere ed interagire con lo spazio nel quale viviamo, è forse la parte della matematica più intuitiva, concreta e collegata alla realtà. D'altro canto, la Geometria, come disciplina, si fonda su un ampio processo di formalizzazione che è stato portato avanti per più di 2000 anni, aumentando i livelli di rigore, astrazione e generalità.

Negli ultimi anni la ricerca in geometria è stata fortemente stimolata da nuove idee, sia dall'interno della matematica, sia da altre discipline, inclusa l'informatica. Attualmente le enormi possibilità della grafica computerizzata influenzano molti aspetti della nostra vita; per sfruttare queste possibilità è necessaria una opportuna educazione alla visione.

Fra i matematici e gli educatori nel campo della matematica vi è un accordo assai diffuso sul fatto che, dati i molteplici aspetti della geometria, il suo insegnamento dovrebbe partire nella prima età e continuare in forme appropriate attraverso l'intero curriculum matematico. Tuttavia, non appena si tenta di entrare nei dettagli, le opinioni divergono su come portare a termine l'impresa. Abbiamo avuto in passato (e persistono tuttora) forti divergenze circa gli obiettivi, i contenuti e i metodi per l'insegnamento della geometria a vari livelli, dalla scuola elementare all'università.

Forse una delle principali ragioni di questa situazione è che la geometria ha un numero tanto elevato di aspetti, che come conseguenza non è stato ancora trovato - e forse non esiste del tutto - un cammino semplice, nitido, lineare, "gerarchico" dai primi inizi alle più avanzate conquiste della geometria. A differenza di quanto accade in aritmetica e algebra, anche i concetti basilari della geometria, come le nozioni di angolo e distanza, devono essere rivisti in differenti stadi da differenti punti di vista.

Un altro punto problematico concerne il ruolo delle dimostrazioni in geometria: le relazioni fra intuizione, dimostrazioni induttive e deduttive, l'età dello studente alla quale queste dimostrazioni possono essere introdotte, e i differenti livelli di rigore e astrazione.

In questa maniera l'insegnamento della Geometria non è del tutto un compito facile. Ma invece di fronteggiare e superare gli ostacoli che sorgono nell'insegnamento della geometria, l'attuale pratica scolastica in molti paesi ha semplicemente aggirato questi ostacoli, tagliando le parti più impegnative, spesso senza alcuna sostituzione. Per esempio, la geometria tridimensionale è quasi scomparsa o è stata confinata ad un ruolo marginale nei curricula di molte nazioni.

Partendo da questa analisi, e considerando specialmente il divario fra la crescente portanza della geometria per amor suo, sia nella ricerca sia nella società, e il declino del suo ruolo nei curricula scolastici, l'ICMI sente che c'è un'urgente necessità per uno studio internazionale sulla geometria, i cui principali obiettivi siano:

- discutere le mete dell'insegnamento della geometria ai vari livelli scolastici ed in accordo con le differenti tradizioni culturali e ambienti;
- identificare le importanti sfide e le tendenze emergenti per il futuro e analizzare il loro potenziale impatto didattico;
- sfruttare e realizzare nuovi metodi d'insegnamento.

Aspetti della geometria

La preminente importanza storica della geometria nel passato, in particolare come prototipo di teoria assiomatica, è tanto universalmente riconosciuta che non merita ulteriori commenti. Tuttavia, nell'ultimo secolo e specialmente negli ultimi decenni, come Jean Dieudonné ha affermato al quarto ICME di Berkeley nel 1980, la geometria, "venendo fuori dai suoi tradizionali stretti confini ... ha rivelato le sue potenzialità nascoste e le sue straordinarie versatilità ed adattabilità, divenendo in tal modo uno dei più universali ed utili strumenti in tutte le parti della matematica."

Attualmente, la geometria include tanti differenti aspetti, che è impossibile (e può essere anche inutile) farne un elenco completo. Qui noi menzioniamo solo quegli aspetti che a nostro giudizio sono particolarmente rilevanti per via delle loro implicazioni didattiche:

la Geometria come la scienza dello spazio. Dalle sue origini come strumento per descrivere e misurare figure, la geometria si è sviluppata in una teoria di idee e metodi con i quali possiamo costruire e studiare modelli del mondo fisico come di ogni altro fenomeno reale. Secondo i differenti punti di vista, otteniamo la geometria euclidea, affine, descrittiva, proiettiva, ma anche la topologia o la geometria non euclidea e le geometrie combinatorie.

La Geometria come metodo per le rappresentazioni visive di concetti e processi di altre aree della matematica e di altre scienze. Ad esempio, grafi e teoria dei grafi, diagrammi di vario genere, istogrammi.

La Geometria come punto d'incontro fra la matematica come teoria e la matematica come fonte di modelli.

la Geometria come un modo di pensare e di comprendere e, a un livello più alto, come teoria formale.

La Geometria come esempio paradigmatico per l'insegnamento dei ragionamenti deduttivi.

La Geometria come strumento nelle applicazioni, sia tradizionali, sia innovative. Le più recenti fra queste includono, ad esempio, la grafica computerizzata, l'elaborazione e la manipolazione delle immagini, lo studio dei modelli, la robotica, ricerca delle operazioni.

Un'altra distinzione potrebbe essere fatta riguardo ai molti differenti approcci secondo i quali ci si può accostare alla geometria. Grossolanamente parlando, i possibili approcci sono:

- *manipolativo;*
- *intuitivo;*
- *deduttivo;*
- *analitico.*

Si può anche distinguere fra una geometria che accentua le proprietà "statiche" degli oggetti geometrici e una geometria dove gli oggetti sono considerati in una collocazione "dinamica", come essi cambiano sotto l'effetto di differenti tipi di trasformazioni nello spazio.

C'è una crisi nell'insegnamento della geometria?

Durante la seconda metà di questo secolo la geometria sembra avere progressivamente perduto la passata posizione centrale nell'insegnamento della matematica nella maggior parte dei paesi. Il calo è stato sia qualitativo sia quantitativo. I sintomi di questo calo possono essere trovati, per esempio, nelle indagini nazionali e internazionali sulla conoscenza matematica degli studenti. Spesso la geometria è totalmente ignorata o solo un numero molto limitato di argomenti di geometria è preso in esame. Nell'ultimo caso le questioni tendono a essere confinate ad alcuni "fatti" elementari riguardanti semplici figure e le loro proprietà, e i risultati ottenuti, in termini di prestazioni, sono riportati come relativamente scadenti. Quali sono le principali cause di questa situazione?

Da circa il 1960 al 1980 una generale riduzione di tempo per gli argomenti tradizionali era necessaria, a causa dell'introduzione di nuovi argomenti nei curricula di matematica, ad esempio probabilità, statistica, informatica, matematica discreta. Allo stesso tempo, il numero di ore di scuola destinate alla matematica è diminuito. Il "movimento della matematica moderna" ha contribuito, almeno indirettamente, al declino del ruolo della geometria euclidea, favorendo altri aspetti della matematica e altri punti di vista per il suo insegnamento (ad esempio teoria degli insiemi, logica, strutture astratte). Il declino ha riguardato, in particolare, il ruolo degli aspetti visivi della geometria, sia tridimensionale, sia bidimensionale, e tutte quelle parti che non si adattavano alla teoria degli spazi lineari come, per esempio, lo studio delle sezioni coniche e altre curve notevoli.

In anni più recenti c'è stato un ritorno indietro verso contenuti più tradizionali di matematica, con una specifica accentuazione delle attività di individuazione e di risoluzione di problemi. Tuttavia, i tentativi di ripristinare la geometria euclidea classica - che inizialmente in molte parti del mondo costituiva l'argomento principale della geometria scolastica - non hanno avuto finora molto successo. Il punto è che nei corsi tradizionali sulla geometria euclidea, il materiale è normalmente presentato agli studenti come un prodotto finale pre confezionato dell'attività matematica. Perciò, in questa forma, esso non si inserisce bene nei curricula dove dagli alunni ci si aspetta una parte attiva nello sviluppo del loro bagaglio di conoscenze matematiche.

In molti paesi la percentuale di giovani che frequenta la scuola secondaria è cresciuta molto rapidamente durante gli ultimi decenni. In questo modo la via tradizionale di insegnare la geometria astratta ad una minoranza selezionata è diventata sia più difficile sia meno adatta per le aspettative della maggioranza degli studenti delle nuove generazioni. Nello stesso tempo, il bisogno di un maggior numero di insegnanti ha causato, in media, un declino nella loro preparazione universitaria, specialmente rispetto alle parti più esigenti della matematica, in particolare la geometria. Da quando i giovani insegnanti hanno imparato la matematica con programmi che trascuravano la geometria, essi mancano di un buon retroterra in questo campo, ciò a sua volta favorisce in essi la tendenza a trascurare l'insegnamento della geometria ai loro allievi. La situazione è ancora più drammatica in quei paesi dove manca una precedente tradizione nell'istruzione. In alcuni casi la geometria è completamente assente dai loro curricula matematici.

Il divario fra la concezione della geometria come area di ricerca e come argomento da considerare nelle scuole sembra essere in aumento, ma finora non è stato trovato accordo su come colmare questo divario, né parimenti si potrebbe, o si vorrebbe, colmare attraverso una introduzione di argomenti più avanzati nei programmi scolastici di grado più basso.

La geometria come riflessa nell'educazione

Nelle sezioni precedenti, abbiamo considerato la Geometria principalmente come una teoria matematica ed abbiamo analizzato alcuni aspetti del suo insegnamento. Dal momento che l'apprendimento è indiscutibilmente l'altro aspetto essenziale di un qualsiasi progetto educativo, è ora opportuno dare la dovuta attenzione alle principali variabili che possono interessare un coerente processo di insegnamento-apprendimento. Conseguentemente, diversi differenti aspetti o "dimensioni" (considerate nel loro più ampio significato) devono essere presi in considerazione.

La dimensione sociale, con due poli.

- Il polo culturale, cioè la costruzione di un comune retroterra, conoscenze e linguaggio, per tutti i popoli che condividono una civiltà comune.
- Il polo educativo, cioè lo sviluppo di criteri, interni a ciascun individuo, per la coerenza e la responsabilità.
- La dimensione cognitiva, cioè il processo che, partendo dalla realtà, porta gradualmente ad una percezione raffinata dello spazio.

- La dimensione epistemologica, cioè la capacità di esplorare i legami fra la realtà e la teoria attraverso la modellizzazione: fare previsioni, valutare i loro effetti, riconsiderare le scelte. In questo modo l'assiomatizzazione consente di liberarsi dalla realtà, ciò in seguito può essere visto come un passo iniziale che consente successive concettualizzazioni.
- La dimensione didattica, cioè la relazione fra l'insegnamento e l'apprendimento. All'interno di questa dimensione molti aspetti meritano considerazione. Ad esempio, elenchiamo tre di questi:
 - rendere vari campi interattivi (sia all'interno della matematica, sia fra la matematica ed altre scienze).
 - Rendere sicuri che i punti di vista dell'insegnante e degli studenti sono compatibili in un dato studio. Ad esempio, per essere conscio che le differenti scale di distanze possono presupporre differenti concezioni e processi adottati dagli studenti, sebbene la situazione matematica sia la stessa: in uno "spazio di piccoli oggetti" la percezione visiva può essere facilitata facendo congetture e identificando proprietà geometriche; quando l'interazione con lo spazio dove siamo abituati a muoverci (la classe a titolo di esempio) è ancora facile procurarsi informazioni, ma può essere difficile raggiungere una via complessiva; in uno "spazio su larga scala" (come si verifica in geometria o in astronomia) le rappresentazioni simboliche sono necessarie per analizzare le sue proprietà.
 - Per dare la dovuta considerazione all'influenza degli strumenti utilizzabili nelle situazioni di insegnamento-apprendimento (da riga e compasso, ad altri materiali concreti, come calcolatrici grafiche, computer e software specifico).

Va da sé che tutte queste dimensioni sono correlate l'una con l'altra ed esse potrebbero anche essere riferite in maniera appropriata ai differenti livelli di età e di scuole: il livello pre-primario; il livello primario; il primo livello secondario; il secondo livello secondario (dove cominciano le differenziazioni in cammini accademici, tecnici e vocazionali), il livello terziario (cioè università) includente la preparazione degli insegnanti.

Nuove tecnologie e strumenti didattici per la geometria

Vi è una lunga tradizione dei matematici nel fare uso di strumenti tecnologici, e viceversa l'uso di questi strumenti ha dato luogo a molti problemi assai interessanti, per esempio riga e compasso per le costruzioni geometriche, logaritmi e strumenti meccanici per il calcolo numerico. Negli ultimi anni, la nuova tecnologia, e in particolare i computer, ha riguardato drammaticamente tutti gli aspetti della nostra società. Molte attività tradizionali sono diventate superate, mentre nuove professioni e nuove sfide sorgono. Per esempio, il disegno tecnico non è più fatto a mano. Oggi, invece, si usa il software commerciale, i plotter e altri dispositivi tecnologici. Il CAD/CAM e il software di algebra simbolica cominciano ad essere largamente disponibili.

I computer hanno anche reso possibile costruire la "realtà virtuale" e generare in modo interattivo animazioni o figure straordinarie (ad esempio le immagini frattali). Ancora di più, i dispositivi elettronici possono essere utilizzati per eseguire esperienze che nella vita di tutti i giorni sono o inaccessibili, o accessibili solo come risultato di lunghi e spesso noiosi lavori.

Naturalmente, in tutte queste attività la geometria è profondamente coinvolta, sia per accrescere la capacità di utilizzare appropriatamente gli strumenti tecnologici, sia quella di interpretare e capire il significato delle immagini prodotte.

I computer possono essere anche usati anche per guadagnare una più profonda comprensione delle strutture geometriche grazie a software specifico preparato per scopi didattici. Gli esempi includono la possibilità di simulare le tradizionali costruzioni con riga e compasso, o la possibilità di muovere elementi di base di una configurazione sullo schermo conservando le relazioni geometriche fisse, che può condurre ad una presentazione dinamica degli oggetti geometrici e può favorire l'identificazione dei loro invarianti.

Fino ad ora, la pratica scolastica è stata solo marginalmente influenzata da queste innovazioni. Ma in un prossimo futuro è probabile che almeno qualcuno di questi nuovi argomenti troverà la propria collocazione nei curricula. Ciò comporterà grandi sfide:

- come influirà l'uso dei computer nell'insegnamento, i suoi obiettivi, i suoi contenuti e i suoi metodi?
- in tal modo saranno conservati i valori culturali della geometria classica, o si evolveranno, e come?
- nei paesi dove le costrizioni finanziarie non consentiranno una massiccia introduzione di computer nelle scuole in un prossimo futuro, sarà comunque possibile ristrutturare i curricula di geometria per far fronte alle principali sfide originate da questi dispositivi tecnologici?

Questioni chiave e sfide per il futuro

In questa sezione elenchiamo esplicitamente alcune delle più importanti questioni che seguono dalle considerazioni delineate nelle precedenti sezioni. Crediamo che una chiarificazione di questi problemi potrebbe contribuire a un significativo miglioramento nell'insegnamento della geometria. Naturalmente non chiediamo che tutti i problemi prima riportati siano risolvibili, né che le soluzioni siano uniche e che abbiano validità universale. Al contrario, le soluzioni possono variare a seconda dei diversi livelli di scuola, dei differenti tipi di scuola e dei differenti ambienti culturali.

1. Obiettivi

Perché è opportuno e/o necessario insegnare geometria? Quale dei seguenti può essere considerato essere il più importante obiettivo dell'insegnamento della geometria?

- Descrivere, capire ed interpretare il mondo reale e i suoi fenomeni.
- Fornire un esempio di teoria assiomatica.
- Fornire una ricca e varia collezione di problemi ed esercizi per l'attività individuale degli studenti.
- Educare gli studenti a fare congetture, dichiarare ipotesi, fornire dimostrazioni e trovare esempi e controesempi.
- Servire come strumento per altre aree della matematica.
- Arricchire la percezione pubblica della matematica.

2. Contenuti

Che cosa dovrebbe essere insegnato? È preferibile accentuare la "quantità" o la "profondità" nell'insegnamento della geometria? Ed è possibile/opportuno identificare un curriculum centrale? In caso di risposta affermativa alla seconda questione di cui sopra, che argomenti dovrebbero essere inclusi nei sillabi ai vari livelli scolastici? In caso di risposta negativa, perché si crede che gli insegnanti o le autorità locali dovrebbero essere lasciati liberi di scegliere i contenuti di geometria secondo i loro personali gusti (questo punto di vista è comune agli altri argomenti matematici, o è specifico della geometria)?

La geometria dovrebbe essere insegnata come un argomento separato, specifico, o dovrebbe essere inserito nei corsi generali di matematica? A questo punto sembra essere molto esteso l'accordo che l'insegnamento della geometria deve riflettere gli attuali e i potenziali bisogni della società. In particolare, la geometria dello spazio tridimensionale dovrebbe essere aumentata a tutti i livelli scolastici, come le relazioni fra geometria tridimensionale e bidimensionale. Come si potrebbe e dovrebbe quindi modificare e migliorare la situazione presente, dove solo la geometria a due dimensioni è favorita?

In quali modi lo studio dell'algebra lineare può accrescere la comprensione della geometria? A quale stadio dovrebbe essere introdotto lo studio delle strutture di spazio vettoriale "astratto"? E quali sono le finalità?

Sarebbe possibile ed auspicabile includere anche elementi di geometria non euclidea nei programmi?

3. Metodi

Come dovremmo insegnare la geometria? Ogni argomento insegnato in geometria può essere collocato da qualche parte fra i due estremi di un approccio "intuitivo" e di un approccio "formalizzato" o "assiomatico". Dovremmo accentuare solo uno di questi due approcci a qualunque livello scolastico, o dovrebbe esserci una interazione dialettica fra di essi, o dovrebbe anche esserci un graduale passaggio dal primo al secondo di essi, col progredire dell'età degli studenti e del livello della scuola? Qual è il ruolo dell'assiomatica all'interno dell'insegnamento della geometria? Un insieme completo di assiomi dovrebbe essere fornito sin dall'inizio (e, in questo caso, a che età e a che livello scolastico) o è consigliabile introdurre l'assiomatica gradualmente, cioè con un metodo di "deduzione locale"?

Tradizionalmente, la geometria è una materia dove "si dimostrano teoremi". La "dimostrazione di teoremi" dovrebbe essere limitata esclusivamente alla geometria?

Dovremmo cercare di mettere gli studenti di fronte a diversi livelli di rigore nelle dimostrazioni, secondo il crescere dell'età e del tipo di scuola? Le dimostrazioni dovrebbero essere strumenti per la comprensione personale, per convincere altri, o per spiegare, per chiarire, per verificare?

Partendo da un certo livello di scuola, ogni affermazione dovrebbe essere dimostrata, o bisognerebbe scegliere pochi teoremi da provare? In questo caso, bisognerebbe scegliere questi teoremi a causa della loro importanza all'interno di una specifica struttura teorica, o a seconda del grado di difficoltà di tali dimostrazioni? E bisognerebbe privilegiare gli enunciati intuitivi o quelli non intuitivi?

Sembra che ci sia una tendenza internazionale verso l'insegnamento dei metodi analitici in un numero crescente di corsi di livello inferiore, a spese degli altri aspetti (sintetici) della geometria. La geometria analitica si presuppone presenti modelli geometrici per situazioni geometriche. Ma, non appena gli studenti sono introdotti a questi nuovi metodi, essi sono improvvisamente proiettati in un nuovo mondo di simboli e di calcoli nel quale il collegamento fra situazioni geometriche e i loro modelli algebrici viene meno e le interpretazioni geometriche dei calcoli numerici sono spesso trascurate. Quindi, a che età e livello di scuola dovrebbe partire l'insegnamento della geometria analitica?

Quali attività, metodi e contesti teorici possono essere usati per ripristinare il collegamento tra la rappresentazione algebrica dello spazio e la situazione geometrica che essa simbolizza?

Come meglio possiamo accrescere l'abilità degli alunni di scegliere gli strumenti per risolvere specifici problemi geometrici (concettuali, manipolativi, tecnologici)?

4. Libri, computer, e altri strumenti per l'insegnamento

I libri di testo tradizionali sono adatti per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria, e come vorremmo che fossero? Come usano attualmente, gli insegnanti e gli studenti, i libri di testo di geometria e gli altri strumenti per l'insegnamento? E come vorremmo che li usassero?

Quali cambiamenti potrebbero e dovrebbero avvenire nell'insegnamento e nell'apprendimento della geometria nella prospettiva di un aumentato accesso al software, video, materiali con-

creti e altri dispositivi tecnologici? Quali sono i vantaggi, dal punto di vista educativo e geometrico, che possono seguire dall'uso di tali strumenti? Quali problemi e quali limitazioni possono scaturire dall'uso di questi strumenti, e come possono essere superati?

Fino a che punto la conoscenza acquisita in ambiente computerizzato può essere trasferita ad altri ambienti?

5. Verifica

Le modalità di verifica e di valutazione degli alunni influenzano fortemente le strategie d'insegnamento e di apprendimento. Come dovremmo formulare obiettivi e finalità, e come dovremmo costruire le tecniche di verifica che siano coerenti con tali obiettivi e finalità? Sono stati messi a punto modi di verifica caratteristici dell'insegnamento della geometria?

In che modo l'uso di calcolatori, computer e software geometrico specifico influenza gli esami riguardo al contenuto, all'organizzazione e alla valutazione delle risposte degli studenti?

Le procedure di verifica dovrebbero essere basate principalmente sui fogli di esami scritti, come sembra consuetudine in molti paesi, o anche quale dovrebbe essere il ruolo della comunicazione orale, del disegno tecnico e del lavoro con il computer?

Cosa esattamente bisognerebbe valutare e considerare per la verifica: la soluzione ottenuta? Il processo risolutivo? Il metodo di ragionamento? Le costruzioni geometriche?

6. La preparazione degli insegnanti

Una componente essenziale per un processo efficace di insegnamento-apprendimento, è una buona preparazione dell'insegnante, sotto l'aspetto della competenza disciplinare, educativa, epistemologica, tecnologica e sociale. Pertanto, quale preparazione specifica in geometria è necessaria, e realisticamente raggiungibile, per insegnanti occasionali o professionali?

È ben noto che gli insegnanti tendono a riprodurre nella loro professione gli stessi modelli che hanno sperimentato da studenti, indifferenti ai successivi contatti con differenti punti di vista. Com'è possibile, allora, motivare la necessità di cambiamenti nella prospettiva dell'insegnamento della geometria, sia dal punto di vista del contenuto sia da quello metodologico?

Quali supporti didattici (libri, video, software...) dovrebbero essere resi disponibili nella formazione degli insegnanti, per favorire un approccio flessibile e mentalmente aperto all'insegnamento della geometria?

7. valutazione degli effetti a lungo termine

Troppo spesso il successo, o il fallimento, di una riforma innovativa curriculare e/o metodologica in un certo sistema scolastico è valutato solo sulla base di un breve periodo di osservazione dei suoi risultati. Tuttavia, in genere non vi sono studi comparativi sui possibili effetti unilaterali del cambiamento o del contenuto o dei metodi. Viceversa, potrebbe essere necessario guardare anche a cosa accade nel lungo termine. Per esempio:

- un'educazione visiva da un'età molto precoce ha un impatto sul ragionamento geometrico nei corsi successivi?
- In che modo una precoce introduzione dei metodi analitici nell'insegnamento della geometria influenza l'intuizione visiva degli alunni? Quando questi alunni si inseriscono nel mondo pro-

fessionale, devono fare affidamento più sulle parti intuitive o su quelle razionali dell'insegnamento della geometria che hanno già conosciuto?

Qual è l'impatto di un uso estensivo di strumenti tecnologici nell'apprendimento della geometria?

8. Impianto

Al quinto ICME (Adelaide, 1984) J. Kilpatrick pose una questione provocatoria: *che cosa conosciamo sull'educazione matematica nel 1984 che non conoscevamo nel 1980?* Recentemente la stessa domanda è stata ripresa di nuovo nello studio dell'ICMI che sta partendo: *"Che cos'è la ricerca nel campo dell'educazione matematica e quali sono i suoi risultati"*. Come per la geometria, la possibilità di fare affidamento sui risultati della ricerca potrebbe essere estremamente utile per evitare di riproporre in futuro cammini già percorsi senza successo e, viceversa, per trarre profitto dalle soluzioni di successo. E, come per le questioni incerte e rilevanti, vorremmo che la ricerca ci desse informazioni utili per chiarire i vantaggi e gli svantaggi delle possibili alternative.

Pertanto una questione chiave potrebbe essere:

che cosa sappiamo già dalla ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria e cosa vorremmo che la ricerca futura ci dicesse?

(di V. Villani. Traduzione di S. Nicosia)