IMPORTANZA DEL SIMBOLISMO NELLO SVILUPPO DELL'ALGEBRA

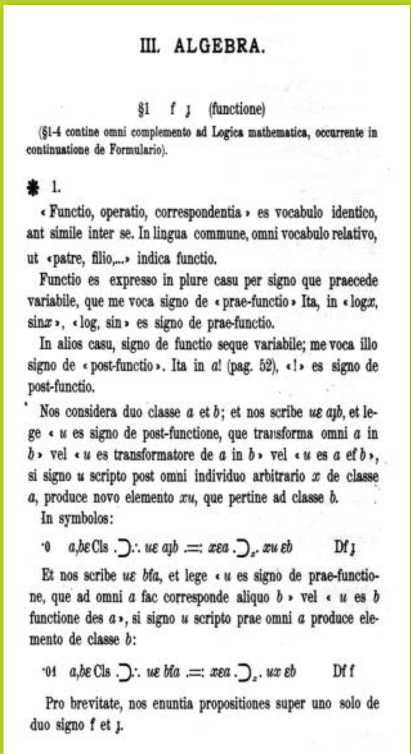
di Silvio Maracchia

Silvio Maracchia

Ha insegnato per trent'anni Storia delle matematiche nell'Università "La Sapienza" di Roma ed è autore di oltre trecento pubblicazioni di carattere scientifico e didattico, volte principalmente all'analisi della nascita delle principali idee matematiche ed al loro sviluppo attraverso i secoli. Ha scritto anche articoli di critica letteraria e di cultura varia. Nel 1976 ha vinto il premio per la Matematica "opera prima" (MPI) ed il premio ministeriale per la Matematica assegnato dall'*Accademia Nazionale dei Lincei*. Per sei anni è stato presidente nazionale della *Mathesis* e contestualmente direttore della rivista *Periodico di Matematiche*. È stato anche direttore della rivista *Archimede* e ha divulgato il suo amore per la Matematica attraverso oltre quattrocento conferenze in Italia e all'estero. I suoi ultimi libri sono: *I grandi matematici. 50 indovinelli per cinquanta biografie* (Pitagora, Bologna); *Storia dell'Algebra* (Liguori, Napoli) entrambi del 2008 e *Delitto in casa pitagorica ed altri racconti* (Goliardica, Bagnara Arsa) del 2009. Ha preso parte a campionati italiani di dama e di tennistavolo ed è ancora oggi un appassionato nuotatore.

Premessa

Una delle tendenze dell'uomo è sempre stata quella di cercare di dominare l'ambiente – ogni tipo di ambiente – per poterlo sfruttare al massimo; un modo per affrontare questa necessità è quello di rendere accessibile l'ambiente stesso schematizzandolo il più possibile in modo da facilitarne la comprensione e quindi lo sfruttamento. Gli esempi sarebbero infiniti in ogni manifestazione umana, sia pratica che teorica: dalla possibilità di capire e schematizzare le caratteristiche dei regni animale e vegetale utili per la sopravvivenza alla semplificazione della comunicazione scritta e orale. Così, aver individuato i suoni principali della voce umana e la successiva costruzione di alfabeti ha portato successivamente alla scrittura che, nonostante le critiche di Platone [1], ha consentito l'accumulo di nozioni in tutti i campi e i corrispondenti sviluppi.


III. ALGEBRA.

§1 f $\jmath$ (functione)

(§1-4 contine omni complemento ad Logica mathematica, occurrente in continuatione de Formulario).

✱ 1.

« Functio, operatio, correspondentia » es vocabulo identico, ant simile inter se. In lingua commune, omni vocabulo relativo, ut «patre, filio,...» indica functio.

Functio es expresso in plure casu per signo que praecede variabile, que me voca signo de « prae-functio » Ita, in « log$x$, sin$x$ », « log, sin » es signo de prae-functio.

In alios casu, signo de functio seque variabile; me voca illo signo de « post-functio ». Ita in $a!$ (pag. 52), « ! » es signo de post-functio.

Nos considera duo classe a et b; et nos scribe $u\varepsilon\, a\jmath b$, et lege « u es signo de post-functione, que transforma omni a in b » vel « u es transformatore de a in b » vel « u es a ef b », si signo u scripto post omni individuo arbitrario x de classe a, produce novo elemento xu, que pertine ad classe b.

In symbolos:

·0 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore\, u\varepsilon\, a\jmath b \,.=:\, x\varepsilon a \,.\supset_x.\, xu\, \varepsilon b$ Df $\jmath$

Et nos scribe $u\varepsilon\, b\mathrm{f}a$, et lege « u es signo de prae-functione, que ad omni a fac corresponde aliquo b » vel « u es b functione des a », si signo u scripto prae omni a produce elemento de classe b:

·01 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore\, u\varepsilon\, b\mathrm{f}a \,.=:\, x\varepsilon a \,.\supset_x.\, ux\, \varepsilon b$ Df f

Pro brevitate, nos enuntia propositiones super uno solo de duo signo f et $\jmath$.


74 III. §1 f $\jmath$

·1 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u\varepsilon\, a\jmath b \,.\, x,y\varepsilon a \,.\, x=y \,.\supset.\, xu=yu$ Oper u

[$§= \mathrm{P}1 \,.\supset.\, x\varepsilon\, z\ni(xu=zu) \,.\, §\varepsilon\, 5{\cdot}2 \,.\supset.\, y\varepsilon\, z\ni(xu=zu) \,.\supset.$ Ths]

Si duo objecto x et y es aequale inter se, et si super illo nos fac identico operatione u, et duo resultatu fi aequale.

Nos « opera per u » quando nos transforma aequalitate $x=y$ in $ux=uy$.

·2 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u\varepsilon\, a\jmath b \,.\, c\supset a \,.\supset.\, u\varepsilon\, c\jmath b$

[$\mathrm{Hp} \,.\, x\varepsilon c \,.\supset.\, x\varepsilon a \,.\supset.\, xu\, \varepsilon b :\supset.$ P]

·3 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u\varepsilon\, a\jmath b \,.\, b\supset c \,.\supset.\, u\varepsilon\, a\jmath c$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset: x\varepsilon a \,.\supset.\, xu\, \varepsilon b \,.\supset.\, xu\, \varepsilon c :\supset.$ Ths]

Si u transforma to-s a in b, et si c es subclasse de a, tunc u transforma to-s c in b. Si u es semper a ef b, et classe b continere in c, tunc u es a ef c.

✱ 2·1 $+\, \varepsilon\, N_0 \jmath N_0$ [= §+ 1·2]

$+$ « successivo » es operatione que transforma numero in numero. Es propositione primitivo ·2 de §+, scripto per signo $\jmath$.

·2 $s\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, 0\varepsilon s \,.\, +\, \varepsilon\, s\jmath s \,.\supset.\, N_0 \supset s$ [= Induct]

·3 $a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, +a\, \varepsilon\, N_0\jmath N_0 \,.\, \times a\, \varepsilon\, N_0\jmath N_0 \,.\, \curlywedge a\, \varepsilon\, N_0\jmath N_0$
$-a\, \varepsilon\, (a+N_0)\jmath N_0 \;:\; a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, /a\, \varepsilon\, (a\times N_1)\jmath N_1$

[= §+ 4·1 . §× 1·1 . §$\curlywedge$ 1·1 . §− 1·1 . §/ 1·1]

Si a es numero, tunc operationes:

$+a$, « plus a », « additione de a », « to adde a »,

$\times a$, « per a », « to multiplica per a »,

$\curlywedge a$, « ad a », « to eleva ad potestate a »,

transforma numero in numero.

Operatione:

$-a$, « minus a », « to subtrahe a »

es possibile supra numeros superiore ad a, et

$/a$, « in a », « to divide per a »

es possibile supra multiplos de a.

Plure Auctore moderno claude variabile inter ( ). Sed parenthesi jam habe in Arithmetica usu determinato, de collega plure elemento, et nos non pote ute illo in novo sensu. In vero, in **scriptura** (x), **litera** x non es ligato ad aliquo elemento. Omni Auctore scribe log$x$, sin$x$, et non log(x), sin(x); $f(x+h)$ et non $f((x+h))$. Lagrange, Abel,... non scribe parenthesi in hoc novo sensu, introducto verso a.1823.

Nota differentia inter f et f; f es symbolo constante, que nos lege « functione »; f es litera variabile (I §1), que pote repraesenta omni objecto, p. ex. aliquo functione.

TAV. I: LE PRIME DUE PAGINE DEL CAPITOLO "ALGEBRA" DEL *FORMULARIO*

> Nella Matematica il simbolismo si rivelerà ben presto essenziale in ogni campo.

Giuseppe Peano e il simbolismo

Nella Matematica il simbolismo si rivelerà ben presto essenziale in ogni campo. Anche se dobbiamo procedere per esempi (poiché, al di là delle considerazioni generali, sono proprio i casi particolari a fornire le indicazioni e le giustificazioni di quanto è stato detto), riportiamo come ponte tra quelle e queste le prime parole della *Prefatione* del *Formulario Mathematico* di Giuseppe Peano (1858-1932). Penso che non sia il caso di tradurre in italiano quanto Peano scrisse nel suo *latino sine flexione* con il quale stese la quinta edizione del *Formulario*, anche per ricordare il sogno del matematico di Tetti Galant (frazione di Spinetta, in provincia di Cuneo) che aveva sperato di aver trovato l'interlingua con la quale poter esprimere la Matematica in ogni paese: "*Omni progressu de Mathematica responde ad introductione de signos ideographico vel symbolos. Symbolos plus antiquo, hodie adoptato, es cifras Indo-Arabico, o, 1, 2, …, 9, facto Europaeo in anno 1200 circa. Utilitate plus evidente de cifras es brevitate in scriptura. In secundo loco, cifras reduce vocabulario. Nam numeratione per cifras introduce nullo novo symbolo pro vocabulos "decem, viginti … centum, mille …" que es espresso, per symbolos precedente.* (…) [2]. *Inter duo systema symbolico, illo que contine minore numero de symbolos es, in generale, plus perfecto. Sed utilitate fondamentale de cifras es facilitate in calculos* (…). *Rationes de utilitate nunc exposito pro cifras, subsiste pro omni systema symbolico. Signos* +, – *(a. 1500),* × *(a. 1600), = (a. 1550),> (a. 1650), e,* π *(a. 1700),* Σ*,* Π *(1800), constitue calculo algebrico, et nos non potest concipe Algebra sine signos praecedente. In realitate, magno parte de Algebra elementare es scripto in libros VII, VIII, IX, X de Euclide. Introductione de symbols moderno redde libros de Euclide multo plus breve, elimina enorme vocabulario, mortuo in Algebra moderna; redde theorias precedente plus facile, et permitte constructione de numeroso novo theoria".*

Peano non si limitò a queste affermazioni ma le mise in atto con il *Formulario* che nella edizione presa in considerazione, pur trattando in maniera esaustiva la Logica matematica, l'Aritmetica, l'Algebra, la Geometria, i limiti, il Calcolo differenziale e integrale e la Teoria delle curve (il tutto arricchito da indicazioni storiche) si limita, proprio grazie al suo simbolismo, a sole 464 pagine [3]!

Nonostante questo, tranne per pochissimi simboli, il simbolismo di Peano morì con lui e venne abbandonato, insieme al *latino sine flexione*, anche dai suoi allievi quando si accorsero che erano stati scelti altri simboli e lingue vive. Un'eco della capacità e della precisione di Peano la possiamo dedurre però da quanto scritto da Bertrand Russell nella sua *Autobiografia* [4]: "*Il Congresso* [Russell (1872-1970) fa riferimento al Congresso Internazionale di Filosofia tenutosi a Parigi nel 1900] *segnò una svolta importante nella mia vita intellettuale perché fu in quell'occasione che incontrai Peano. Lo conoscevo già di nome e avevo letto alcune delle sue opere, ma non mi ero mai preso la briga di assimilare i suoi simboli. Durante la discussione del Congresso mi resi conto che era sempre più preciso di tutti gli altri e che in tutte le discussioni risultava invariabilmente il più brillante. Con il passare dei giorni mi convinsi che questo doveva dipendere dalla sua logica matematica e pertanto mi feci dare da lui tutte le sue opere e non appena il Congresso si chiuse mi ri-*

tirai a Fernhurst per studiare in tutta tranquillità tutto ciò che lui e i suoi discepoli avevano scritto. Mi resi conto che il suo metodo di notazioni forniva quello strumento di analisi logica che per anni avevo cercato, e che studiando l'opera sua mi stavo impadronendo di una nuova e potente tecnica per il lavoro che da molto tempo desideravo fare".
Dal successivo appassionato studio di Russell nacquero poco dopo i famosi *The Principles of Mathematics*, "*lavoro* – aggiunge ancora Russell – *a cui mi era accinto parecchie volte inutilmente"* [5].
Aveva capito tutto già Guillaume Oughtred ((1574-1660) che nella sua *Clavis Mathematicae* (1631) cui si deve, ad esempio, il simbolo X per indicare la moltiplicazione, scrive: "*Il mio bel metodo simbolico non opprime la memoria con un grande numero di vocaboli: non grava l'immaginazione né la distrae col paragone e la discussione di un grande numero di oggetti svariati; ma mostra d'un colpo tutta la successione delle operazioni e tutte le fasi successive del ragionamento. Finalmente gli enunciati dei teoremi possono essere compresi, non più soltanto da un unico popolo, ma da tutti i popoli, qualunque sia la loro lingua, purché conoscano i significati dei simboli usati*" [6].
Tra Oughtred e Peano possiamo collocare, per dir così, Gottfried Leibniz (1646-1716) che ebbe, come questi, chiara l'idea dell'importanza essenziale di un simbolismo efficiente e soprattutto fecondo. Vedremo fra poco come Leibniz si esprime nella sua *De Arte Combinatoria*: al contrario di Russell che intendeva esprimere la Matematica attraverso la Logica che concepiva come più generale [7], Leibniz vuole esprimere questa con la Matematica tanto che è rimasto famoso il suo "*Calculemus!*" [8] e cioè la possibilità di poter giudicare della verità di una argomentazione rispetto ad un'altra. È necessario, scrive Leibniz, "[creare] *un metodo generale, nel quale tutte le verità della ragione siano ridotte ad una specie di calcolo. Nello stesso tempo, questo sarebbe una specie di linguaggio o di scrittura universale, ma infinitamente diversa da tutto ciò che è stato proposto fino ad ora, poiché i simboli, come anche le parole, guiderebbero la ragione; e gli errori, salvo quelli di fatto, sarebbero puramente gli errori di calcolo. Sarebbe difficilissimo formare o inventare questo linguaggio o caratteristica*, *ma sarebbe facilissimo comprenderlo senza nessun dizionario*". Leibniz, distratto da molte incombenze, non riuscì però a completare la sua idea per la quale aveva previsto almeno cinque anni di impegno e l'aiuto di vari collaboratori.

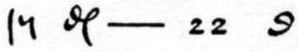
Storia di alcuni simboli

Ritorniamo alle parole di Peano riportate sopra. Le sue indicazioni potrebbero servire come filo conduttore per lo sviluppo di questo articolo. Anzitutto per la scrittura dei numeri: la praticità dei nostri dieci simboli consente di poter scrivere in maniera semplice qualsiasi numero grazie al sistema posizionale che affonda le sue radici nel sistema babilonese e che venne sviluppato dai matematici indiani e successivamente dagli arabi. Questa praticità non dipende solo dall'esiguo numero di simboli (i romani, ad esempio, usavano meno simboli, per non parlare del sistema binario) ma essenzialmente dal sistema posizionale che consente di eseguire facilmente operazioni che risultavano altresì molto complicate [9].
Riporto a questo proposito un significativo passo di André Weil tratto dalla sua *Teoria dei numeri* [10]: "*Per valutare appieno le reali difficoltà che il problema* [della ricerca dei divisori] *presentava per alcuni contemporanei di Fermat, bisogna ricordare che, ancora nel 1640 (Ouevres de Fermat, IV, 69) Marsenne* [11] *chiedeva a Saint-Martin come trovare il numero di divisori di 49.000 e la loro somma senza essere costretti a enumerarli uno per uno; Euclide e probabilmente anche i matematici che gravitarono attorno a Platone* [qui Weil rinvia al suo secondo paragrafo del primo capitolo] *avrebbero probabilmente considerato questo un problema elementare. Per forza di cose, in questo genere di problematiche è di grande aiuto, anzi, si rivela quasi indispensabile una notazione algebrica adeguata*".
Peano parlava delle dimostrazioni di Euclide che il moderno simbolismo

> La praticità dei nostri dieci simboli consente di poter scrivere in maniera semplice qualsiasi numero grazie al sistema posizionale che affonda le sue radici nel sistema babilonese e che venne sviluppato dai matematici indiani e successivamente dagli arabi.

rende molto più brevi. Vediamo un solo esempio e precisamente la proposizione IX, 36 nella quale Euclide dimostra che un numero, ottenuto dal prodotto tra una somma del tipo $1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots$ interrotta allorché essa dà per risultato un numero primo e l'ultimo di essi, risulta un numero perfetto [12] cioè un numero uguale alla somma dei suoi divisori minori del numero stesso (ad esempio, 28 è numero perfetto poiché si ha $28 = 1+2+4+7+14$). In altre parole, ricordando che $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, nel caso in cui tale somma risulti essere un numero primo, Euclide dimostra che il numero $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ è numero perfetto. Ad esempio, poiché $1 + 2 + 2^2 = 7$ è numero primo, allora $N = (1 + 2 + 2^2)\, 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$ è numero perfetto. Ebbene, con il nostro simbolismo, dimostrare che la somma dei divisori propri del nu-

1. Ältestes Minuszeichen.
Dresd. C. 80. Deutsche Algebra, fol. 368′
(um 1486)



$15 - 22x$

Fig. 100.—Minus sign in a German MS, C. 80, Dresden Library. (Taken from J. Tropfke, *op. cit.*, Vol. II [1921], p. 14.)

ITALIAN: F. GHALIGAI
(1521, 1548, 1552)

139. Ghaligai's *Pratica d'arithmetica*[1] appeared in earlier editions, which we have not seen, in 1521 and 1548. The three editions do not differ from one another according to Riccardi's *Biblioteca matematica italiana* (I, 500–502). Ghaligai writes (fol. 71*B*): x=*cosa*=c^o, x^2=*censo*=□, x^3=*cubo*=□, x^5=*relato*=□, x^7=*pronico*=□, x^{11}=*tronico*=□, x^{13}=*dromico*=□. He uses the m^o for "minus" and the $\bar{p}$ and *e* for "plus," but frequently writes in full *piu* and *meno*.

[1] *Pratica d'arithmetica di Francesco Ghaligai Fiorentino* (Nuouamente Riuista. & con somma Diligenza Ristampata. In Firenze. M.D.LII).

TAV IV: IL SIMBOLISMO DI GALIGAI [F. CAJORI (1928), P. 112]

2. Ältestes Pluszeichen.
Dresd. C. 80. Lat. Algebra, fol. 350′
(um 1486)

$x^3 + 2x^2$

TAV. II: SEGNI + E –
IN MANOSCRITTI MEDIOEVALI
[CAJORI (1928), P. 231]

> “I segni + e – che noi usiamo sono di origine oscura ma si trovano in Germania in vari manoscritti verso la fine del XV secolo.”

Wechsel

RENAISSANCE DEALER IN EXCHANGE
From the 1500 edition of Widman's arithmetic (1489)

TAV III: DALL'*ARITMETICA* DI WIDMAN [SMITH (1958), P. 573; CAJORI (1928), P. 134]

4 + 5 Wiltu das wyss-
4 — 17 sen oder dessgley-
3 + 30 chen / So summier
4 — 19 die zenntner vnd
3 + 44 lb vnnd was auss
3 + 22 — ist / das ist mi-
Zentner 3 — 11 lb nus dz setz beson-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zů lb gemachett
3 — 12 hast vnnd das /
3 + 9 + das ist meer
darzů Addierest) vnd 75 minus. Nun
solt du für holz abschlahen allweeg für
ain legel 24 lb. Vnd das ist 13 mal 24.
vnd macht 312 lb darzů addier das —
das ist 75 lb vnd werden 387. Dye sub-
trahier von 4539. Vnd bleyben 4152
lb. Nun sprich 100 lb das ist ein zentner
pro 4 ff $\frac{1}{5}$ wie kummen 4152 lb vnd kume
171 ff 5 ß 4 heller $\frac{4}{5}$ Vñ ist recht gmacht

Pfeffer

A

Fig. 54.—From the 1526 edition of Widman's arithmetic. (Taken from D. E. Smith, *Rara arithmetica*, p. 40.)

> La storia del simbolismo matematico nasce allorché ad una data operazione viene dato un particolare nome, tratto di solito dal lessico comune (forma retorica), e poi lo si stacca dal nome iniziale con un opportuno segno distintivo (forma letterale e, infine, simbolica).

mero $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ [con $(2^n - 1)$ numero primo] è uguale al numero stesso è immediato [13] mentre la geniale dimostrazione di Euclide è piuttosto lunga e probabilmente sarebbe stata ugualmente lunga, se non ancora di più, quella di Marsenne.
Peano pone anche le date in cui alcuni simboli matematici vennero usati per la prima volta. Dobbiamo dire che non sempre le date autentiche sono note anche perché non sempre è facile stabilire, specialmente prima dell'invenzione della stampa, quando e da chi un simbolo è stato usato [14].
La storia del simbolismo matematico nasce allorché ad una data operazione viene dato un particolare nome, tratto di solito dal lessico comune (forma retorica) e poi lo si stacca dal nome iniziale con un opportuno segno distintivo (forma letterale e, infine, simbolica). È il caso ad esempio dell'addizione, non indicata nella Matematica pre-ellenica ed ellenica se non con giustapposizione dei termini, alla stregua della numerazione greca e di quella romana, fatta eccezione per qualche accorgimento. Successivamente in Occidente l'addizione venne indicata con *et*, con *plus*, poi con *p* e solo alla fine con il nostro segno +.
Quasi analogo sviluppo ha subito il segno della sottrazione che però venne indicato con un particolare segno già da Diofanto di Alessandria (III secolo d. C. circa) sul tipo di una Ψ rovesciata: ⋔. In seguito venne usato *minus* e poi semplicemente *m* e, infine, il nostro –.
I segni + e – che noi usiamo sono di origine oscura ma si trovano in Germania in vari manoscritti verso la fine del XV secolo (v. tavola II) e per la prima volta stampati nell'opera *Behende und hubsche Rechnung* (1489) di J. Widmann [15].
Osserviamo, come ulteriore esempio, la nascita del segno di uguale (=) e il suo uso essenziale per lo sviluppo dell'Algebra nel porre uguale a zero i termini di un'equazione. L'operazione, a ben vedere, svincolava l'Algebra dalla Geometria rendendola del tutto autonoma. Infatti, anche in semplici espressioni del tipo $3x + 5 = 0$ oppure $5x^2 + x + 4 = 0$, non si deve più concepire il primo membro costituito da rettangoli o quadrati come si era soliti fare alle origine della nascita dell'Algebra limitando l'Algebra stessa [16]. Inoltre, la possibilità di avere tutti i termini in un solo membro, positivi o negativi che siano, supera l'esigenza di dover considerare vari casi particolari unificando così l'analisi delle equazioni. Joseph Needam scrive [17] sul segno di uguale: "*Forse il più importante di tutti i simboli, quello che rende* [infatti] *possibili le equazioni, era il segno = dell'uguaglianza. Per designarlo erano stati usati in Babilonia e in Egitto vari segni*" [18].
Ma qui intendiamo parlare proprio del simbolo = e dell'uguaglianza a zero. Tale uguaglianza viene attribuita a Thomas Harriot (1560-1621) (cfr. la *Artis analitycae praxis* del 1631 in cui si trovano anche i simboli di > e <) pur essendo stata considerata già prima da Bombelli nel suo manoscritto; ma anche nell'opera a stampa egli scrive, trattando un'equazione, "*agguaglisi a zero*" [19]. Riguardo poi al segno di uguale, esplicito anch'esso nell'opera di Bombelli, già Regiomontano e Pacioli usano una sola lineetta ma in un libro di Fisica cinese del secolo XVI viene usato il nostro segno di uguale, anche se più allungato [20]. Tale simbolo, scelto indipendentemente, viene attribuito non impropriamente a Robert Record (1510-1558) nella sua opera *The Wetstone of Witte* del 1557 perché da essa si impose all'attenzione dei matematici. Egli scrive infatti che userà tale simbolo per evitare noiose ripetizioni, aggiungendo che nulla può esprimere meglio l'idea di uguaglianza che due rette parallele [21].

L'incognita e le sue dignità

Passando all'Algebra si può notare che, dopo un iniziale non-simbolismo (Algebra retorica), prevale la simbologia geometrica in cui l'incognita è indicata solitamente con un segmento, il prodotto di essa con un coefficiente numerico con un rettangolo e l'incognita al quadrato con un quadrato geometrico. Questo accade, ad esempio, nell'Algebra babilonese ma queste corrispondenze, pur con varie eccezioni, sopravvivono sino a Cardano. In questo modo l'Algebra non poteva limitarsi, come abbiamo già visto, che ai primi gradi (uno o due) con solo qualche limitata sortita nel terzo grado, data la maggiore complessità della Geometria solida (si veda il rimprovero di Platone! [22]).
Un progresso si ottiene allorché l'incognita viene indicata in maniera esplicita, distaccata dalla Geometria, anche se i procedimenti per ottenerla sono spesso ancora geometrici: "mucchio" (aha) in Egitto, "numero" (ἀριθμός) in greco oppure semplicemente la finale "ς" o, infine, "cosa" in indiano e in arabo. Quest'ultima indicazione si trasferì poi in Occidente così che l'"arte della cosa" venne talvolta ad indicare l'Algebra. Si pensi, ad esempio, ai versi di Tartaglia: "*Quando ch'el cubo con le cose appresso/ se agguaglia a qualche numero discreto* …" $(x^3 + ax = b)$.
Queste varie notazioni e altre usate per indicare di volta in volta la sottrazione, la potenza o il denominatore mostrano una ricerca tesa a

$144x^0$. Evidently, $x^0=1$; he has the correct interpretation of the exponent zero. He multiplies $.12.^0$ by $.10.^2$ and obtains $120.^2$; also $.5.^1$ times $.8.^1$ yields $.40.^2$; $.12.^3$ times $.10.^5$ gives $.120.^8$; $.8.^1$ times $.7^{1.\tilde{m}.}$ gives $.56.^0$ or $.56.$; $.8.^3$ times $.7^{1.\tilde{m}.}$ gives $.56.^2$ Evidently algebraic multiplication, involving the product of the coefficients and the sum of the exponents, is a familiar process with Chuquet. Nevertheless, he does not, in his notation, apply exponents to given numbers, i.e., with him "3^2" never means 9, it always means $3x^2$. He indicates (p. 745) the division of $30-x$ by x^2+x in the following manner:

$$\frac{30.\ \tilde{m}.\ 1^1}{1^2\ \tilde{p}.\ 1^1}.$$

TAV.V: IL SIMBOLISMO DI CHUQUET
[F. CAJORI, OP. CIT., P. 103]

TAV. VI: DA *L'ALGEBRA* DI RAFAEL BOMBELLI
[(1966), P. 133, 157

più via più di meno fa più di meno
meno via più di meno fa meno di meno
più via meno di meno fa meno di meno
meno via meno di meno fa più di meno
più di meno via più di meno fa meno
più di meno via men di meno fa più
meno di meno via più di meno fa più
meno di meno via men di meno fa meno.[7]

$$\begin{bmatrix} (+)(+i)=i \\ (-)(+i)=-i \\ (+)(-i)=-i \\ (-)(-i)=+i \\ (+i)(+i)=- \\ (+i)(-i)=+ \\ (-i)(+i)=+ \\ (-i)(-i)=- \end{bmatrix}$$

1 via 1 fa 2
1 via 2 fa 3
1 via 3 fa 4
1 via 4 fa 5
1 via 5 fa 6
1 via 6 fa 7
1 via 7 fa 8
1 via 8 fa 9
1 via 9 fa 10
1 via 10 fa 11
1 via 11 fa 12

2 via 2 fa 4
2 via 3 fa 5
2 via 4 fa 6
2 via 5 fa 7
2 via 6 fa 8
2 via 7 fa 9
2 via 8 fa 10
2 via 9 fa 11
2 via 10 fa 12

3 via 3 fa 6
3 via 4 fa 7
3 via 5 fa 8
3 via 6 fa 9
3 via 7 fa 10
3 via 8 fa 11
3 via 9 fa 12

4 via 4 fa 8
4 via 5 fa 9
4 via 6 fa 10
4 via 7 fa 11
4 via 8 fa 12

5 via 5 fa 10
5 via 6 fa 11
5 via 7 fa 12

6 via 6 fa 12

Potenza cuba, o cubo di potenza 6
Secondo relato 7
Potenza di potenza di potenza 8
Cubo di cubo 9
Potenza del primo relato 10
Terzo relato 11
Cubo di potenza di potenza 12

4 via 3 2 fa 12 2
7 2 via 18 2 fa 126 4
5 1 via 8 2 fa 40 3

3 4 via 5 3 fa 15 7
56 1 via 12 4 fa 672 5
7 2 via 84 fa 588 2

4 2 via 6 2 fa 24 4
5 1 via 7 3 fa 35 4
3 1 via 8 2 fa 24 3

scrivere in maniera non tanto simbolica quanto più rapida (Algebra letterale). Possiamo infatti parlare di simbolismo solo quando, seguendo Peano, i simboli diventano parte di un piano coerente che consente non solo una scrittura più rapida ma anche la capacità di sviluppo, di generalizzazione dei problemi, in modo da potersi applicare anche a problemi più elevati. Così, se osserviamo il singolare simbolismo usato dal matematico Francesco Galigai (*Pratica d'Arithmetica*, 1521), costituito da quadratini e rettangoli (TAV. IV), notiamo che difficilmente avrebbe potuto avere uno sviluppo successivo.

Consideriamo poi l'opera di Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484). Secondo Gino Loria, la presenza di notevoli italianismi testimonia una sicura influenza della Matematica italiana [23] ma – aggiunge poco dopo – "*la caratteristica più notevole di quest'opera consiste nel fatto che ivi fanno la loro prima comparsa gli esponenti* [24]". Ad esempio $.10.^1$ sta per $10x$; $.12.^2$ sta per $12x^2$ e, più significativamente $.5.^1$ moltiplicato per $.8.^1$ porta a $.40.^2$ (TAV. VI).

È probabile però che l'influenza maggiore in relazione agli esponenti delle incognite si debba alla molto più diffusa *Algebra* di Rafael Bombelli (? - 1572?) nella quale le incognite e le corrispondenti potenze venivano ugualmente poste in relazione ai numeri interi, con una chiara indicazione di come operare con esse [25]. La consapevolezza mostrata da Bombelli su come trattare l'incognita e le sue potenze (*dignità* le chiama Bombelli) viene mostrata in maniera esplicita nel libro secondo della sua *Algebra* [26] dedicato alla risoluzione algebrica delle equazioni dei primi quattro gradi.

Per quanto riguarda il tema del nostro lavoro notiamo che, dopo aver definito l'incognita con il "tanto" per distinguerlo dalla troppo generica "cosa", Bombelli mostra come trattare monomi e polinomi [27]. Successivamente egli pone il para-

> Le potenze scritte con i numeri interi portarono come logica induzione a voler affrontare anche le equazioni di grado maggiore di tre, quattro e così via.

grafo *Del moltiplicare delle dignità fra loro semplicemente*. Nel paragrafo si stabilisce come scrivere le dignità (si veda la Tavola VI) e le loro operazioni [28]: "*Quando si haverà a moltiplicare dignità si sommaranno i numeri delle abbreviature posti di sopra, e di quelli si formarà una abbreviatura di dignità ed il numero che darà disparo a esse dignità* [il coefficiente numerico] *si moltiplicarà semplicemente (come si moltiplicano gli altri numeri)*".
Il simbolismo subirà successivamente importanti progressi quando, con François Viète (1540-1603), si indicheranno sistematicamente con lettere i coefficienti presenti nelle equazioni [29] generalizzando le procedure di risoluzione e stabilendo le regole dell'uguaglianza in modo da rendere l'Algebra un sistema ipotetico deduttivo sul tipo della Geometria. La sua "legge di omogeneità", secondo la quale tutti i termini di un'equazione (con la presenza di una corrispondenza geometrica) devono essere di uguali dimensioni, appesantiva però alquanto il simbolismo. Sarà il contemporaneo Descartes (1596-1650), il cui simbolismo algebrico è assai vicino al nostro, a svincolarlo dal condizionamento della Geometria. Descartes scrive infatti, forse con riferimento anche a Viète: "*Quanto poi all'Analisi degli antichi e all'Algebra dei moderni, oltre a riferirsi esclusivamente a materie astrattissime e che sembrano inutili, la prima è sempre talmente vincolata alla considerazione delle figure da non poter esercitare l'intelletto senza affaticare molto l'immaginazione, e la seconda è talmente assoggettata a certe regole e a certe cifre da divenire un'arte confusa e oscura, che confonde la mente invece di esercitarla*" [30]. Dopo aver indicato alcuni suoi modi usati per scrivere alcuni termini aritmetici, aggiunge significativamente [31]: "*A questo proposito debbo notare che con a^2 o b^3 o espressioni simili intendo in genere soltanto linee assolutamente semplici, anche se le chiamo per servirmi dei termini dell'algebra, quadrati, cubi ecc.*".

Conclusioni

Le potenze scritte con i numeri interi portarono come logica induzione a voler affrontare anche quelle di grado maggiore di tre, quattro e così via. L'uso di simboli pratici favorì queste estensioni anche se fu sempre necessaria una notevole capacità e, in qualche caso, addirittura il genio per lo sviluppo dell'Algebra delle equazioni di oggi. Anzi un simbolismo sempre più stringato portò quasi naturalmente a quella che oggi va sotto il nome di Algebra astratta.
A conclusione della nostra breve storia, possiamo riassumerla osservando che per la conquista delle vette più alte, oltre ad una notevole preparazione fisica e un grande coraggio, sono necessarie anche delle scarpe comode ed efficienti! ■

Bibliografia

Bombelli R., *L'Algebra*, a cura di Ettore Bortolotti, Feltrinelli, Milano, 1966.

Bortolotti E., "Sulla rappresentazione simbolica della incognita e delle potenze di essa introdotta dal Bombelli", *Archivio di Storia della Scienza*, vol. VIII, 1927, pp. 49-63, pubblicato anche nella sua *Seconda serie di Studi e Ricerche sulla storia della matematica in Italia* (Zanichelli, Bologna, 1944 primo articolo).

Bortolotti E., "Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI", *Periodico di Matematiche*, 1925.

Cajory F., *A History of Mathematical Notations*, La Salle, Illinois, 2 voll., 1928-1929.

Cardano G., *Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis* (opera nota comunemente come *Ars Magna*) e Cardano G., *Ars Magna Arithmeticae* (1963 a), entrambe inserite nel IV volume delle opere di Cardano stampate a Lugduni, 1663.

Cossali P., *Origine e trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, Tip. Parmense, II, 1799.

Descartes R., *Opere scientifiche*, a cura di E. Lojacono, Utet, Torino, Vol. II, 1983.

Einsenlohr A., *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Papyrus Rhind des British Museum) *Übersetzt und erklärt*, Leipzig, Hinrich, 1891[2].

Euclide, *Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Utet, Torino, 1970.

Itard J., *Essai d'histoire des Mathématiques*, Blanchard, Paris, 1984.

Libri G., *Histoire des Sciences Mathematiques en Italie*, vol. IV, Paris, 1840.

Loria G., *Storia della Matematica*, Cisalpino-Goliardica, Milano, 1982.

Maracchia S., *Storia dell'Algebra*, Liguori, Napoli, 2008[2].

Mugnai M., *Leibniz e la logica simbolica*, Sansoni, Firenze, 1973.

Needam J., *Scienza e Civiltà in Cina*, Einaudi, Torino, vol. III, 1985.

Peano G., *Formulario Mathematico*, riproduzione in fac-simile dell'edizione originale (1908), a cura di Ugo Cassina, Cremonese, Roma, 1960.

Platone, *Opere*, Laterza, Bari, 2 voll., 1966.

Russell B., *Autobiografia*, Vol 1°, 1872-1914, Longanesi, Milano, 1967 (trad. di Maria Paola Dettori Ricci).

Smith D. E., *History of Mathematics*, Dover Publications, New York, vol. 2°, 1958.

Weil A., *Teoria dei Numeri*, (tr. di A. Collo), a cura di C. Bartocci, *Introduzione* di Enrico Bombieri, Einaudi, Torino, 1993.

Note

[1] Platone, *Fedro*, 275 e seguenti.

[2] Peano mostra la numerazione greca che ha bisogno di molti simboli per esprimere non solo i primi nove numeri ma anche 10, 20, …, 100, 200, …

[3] Per indicazioni bibliografiche più precise si veda la bibliografia finale.

[4] Cfr. Russell (1967), cap. VI.

[5] Ivi, pp.236-238.

[6] Citazione tratta da Gino Loria (1982), p. 448. Si noti che Florian Cajory [(1928), p. 187 e seguenti] enumera circa 150 simboli che testimoniano, a parere nostro, il motivo per cui essi non furono adottati.

[7] Ogni dimostrazione – aveva scritto Aristotele – non è che un sillogismo ma non viceversa (*Pr. An. 25 b*, 28-36). Teniamo presente infatti che nella struttura del sillogismo si possono trovare quegli stadi di un sistema ipotetico deduttivo (definizioni; assiomi; regole di inferenza; una grammatica; una sintassi; teoremi) che poi si ritroveranno negli *Elementi* di Euclide ma che Aristotele aveva in parte mutuato dalla Matematica stessa.

[8] Tra le numerosissime indicazioni bibliografiche a questo proposito, ci limitiamo ad indicare *Leibniz e la logica simbolica* di Massimo Mugnai, ricco anche di indicazioni bibliografiche e di una parte antologica.

[9] Anche il sistema binario usa la tecnica posizionale ma in questo caso i numeri anche non molto grandi avrebbero un numero rilevanti di cifre e il loro uso sarebbe poco pratico.

[10] Mi servo dell'edizione italiana [Weil (1993), pp. 46-47] con l'*Introduzione* di Enrico Bombieri che vede in Weil uno dei più grandi matematici che univano il rigore all'*ampiezza di respiro*.

[11] Si noti che Marin Marsenne era un matematico assai noto all'epoca. Quanto alla decomposizione di 49.000 in fattori, questo è un problema oggi alla portata di qualsiasi studente di scuola secondaria di primo grado.

[12] *Elementi*, Prop. IX, 36: "*Se partendo dall'unità, si prendano quanti si vogliano numeri raddoppiando successivamente sino a che la loro somma venga ad essere un numero primo, e se la somma stessa vien moltiplicata per l'ultimo dei numeri considerati, il prodotto sarà un numero perfetto*".

[13] I divisori propri di N sono $1; 2; 2^2; 2^3; \ ; 2^{n-1}; 1\ (2^n - 1); 2\ (2^n - 1); 2^2\ (2^n - 1); 2^3\ (2^n - 1); \ ; 2^{n-2}\ (2^n - 1)$ la cui somma risulta $1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{n-1} + (2^n - 1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-2}) = (2^n - 1) + (2^n - 1)(2^{n-1}-1) = (2^n - 1)\ 2^{n-1} = N$.

[14] Osserva Florian Cajori [(1929), p. 337)]: "*Spesso la nascita di un particolare simbolo fu dovuta ad una speciale presenza [configuration] di circostanze (un grande gruppo di allievi e amici, la popolarità di alcuni libri, la traduzione di un testo) oltre ad un intrinseco merito del simbolo*".

[15] Nella sua documentata *Histoire*, Guglielmo Libri [(1840), p. 46] attribuisce a Leonardo da Vinci (MSS, Vol. A, f. 19) l'invenzione dei segni + e -.

[16] Ricordiamo che, quando si accinge a trattare le equazioni di quarto grado, Cardano [(1663 a), 323] quasi si scusa scrivendo: "*La sesta cosa da notare* [è] *che non appena l'uomo sarà giunto a conoscere i Capitoli* [sc. Le equazioni] *sino a quelli relativi al cubo e sono 19 ne ha quanto basta per ogni caso algebrico, poiché sino al cubo si trova gradazione in natura: infatti vi sono linee, superfici e corpi e le linee corrispondono alle incognite lineari; le superfici ai quadrati; i corpi ai cubi. Se pertanto avremo fornito su queste notizie sufficienti, sarà noto ciò che è necessario; in verità ciò che aggiungiamo al di là, è per diletto* ["*ad voluptatem*"] *e non per compimento di ciò che può trarsi da* [tale] *studio. Tali Capitoli successivi non esistono veramente in sé ma solo per caso fortuito, se anche ve ne siano* [formule] *generali*". Così nella sua opera maggiore – *Ars Magna del* 1545 – Cardano [(1963), p. 222] parla di aver affrontato le equazioni di grado quarto "*quasi per estensione* (…) *in ciò che non è lecito in natura*". Omar Khayyam (1044-1123/24) si era espresso molto prima alla stessa maniera [si veda Maracchia (2008), p. 303], ma la sua opera verrà conosciuta in Occidente solo dall'edizione della sua *Algebra* ad opera di Franz Woepke nel 1851.

[17] J. Needam (1985), p. 144.

[18] Notiamo che il simbolo di uguale è talvolta sottointeso da "è" oppure "dà" e simili. Poniamo un solo esempio tratto dal problema 19 del papiro di Mosca (XIX sec. a. C.): *Metodo per calcolare un mucchio*: (1 + ½) *volte* [del mucchio] *con 4 è diventato dieci. Quanto è questo mucchio?*. Altre volte si usa per disteso ἴσος o semplicemente l'iniziale "ι" e poi anche *aequalis* oppure *aeq* ecc.

[19] In Bombelli (1966) l'equazione indicata si trova alla pagina 191. A testimonianza che la ricerca delle origini dei simboli matematici è però (oltre che piuttosto sterile) assai complessa, ricordiamo che Cossali [(1799), p. 322] vede in un procedimento di Cardano l'uguaglianza a zero di una particolare equazione anche se non resa del tutto esplicita.

[20] J. Needam (1985), p. 144.

[21] Il simbolo di = entrò però nell'uso corrente solo dopo che esso venne accettato e usato da Wallis e da Newton.

[22] Platone, *Repubblica*, 528 d.

[23] Così si esprime anche l'editore di Chuquet, Aristide Marre (*Bullettino Boncompagni* XIII, 1880). Non è però di questo avviso Jean Itard (1984, p. 170) che vi vede piuttosto dei latinismi.

[24] G. Loria (1982), p. 271.

[25] L'opera manoscritta di Bombelli si trova nel Codice B. 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna, pubblicata poi nel 1572. Il manoscritto risale però al 1550 come scrive Bortolotti [(1925), p. 175]. Per quanto riguarda il contributo dei simboli delle incognite in Bombelli, si possono consultare molti articoli scritti a tale proposito da Ettore Bortolotti e in particolare [(1927), 49-63].

[26] Il primo libro si occupa delle operazioni tra le potenze dei numeri e tra i radicali di ogni tipo con la successiva estensione ai numeri complessi di cui fornisce, per primo, una corretta aritmetica (v. tav. VI).

[27] Sarà questo il percorso che poi seguiranno tutti i testi di Algebra delle equazioni; è accaduto così con l'Algebra quello che accadde per la Geometria dopo gli *Elementi* di Euclide la cui esposizione fece da esempio per i testi successivi.

[28] R. Bombelli (1966), p. 157.

[29] Si noti che questo importante passo del simbolismo ha avuto vari precedenti. Si rimanda a questo proposito alla nostra già citata *Storia dell'Algebra* (2008), al cap. 6 dedicato a Viète e a Descartes e in particolare al paragrafo 6.2.7 "Algebra letterale".

[30] R. Descartes, *Opere Scientifiche*, a cura di E. Lojacono (1983), p. 134.

[31] R. Descartes, *op. cit.*, p. 532. Uno sviluppo del modo di scrivere le equazioni nel corso dei secoli si può trovare in Maracchia (2008), pp. 567 e seguenti.