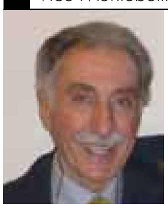
LUCA PACIOLI E LA PROSPETTIVA

PARTE II

di Vico Montebelli

Vico Montebelli



È stato professore di Matematica applicata negli Istituti tecnici e docente a contratto di Statistica e Informatica presso l'Università degli Studi di Urbino. È socio fondatore del Centro Internazionale di Studi "Urbino e la Prospettiva". Si occupa di Storia della Matematica medioevale e rinascimentale. In questo campo ha curato mostre, partecipato a congressi come relatore e scritto numerosi articoli su riviste specializzate. Fra le sue pubblicazioni, ricordiamo come coautore: *Le scienze a Urbino nel tardo Rinascimento* (Quattroventi Urbino, 1988); come curatore: Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, codice Vaticano Urbinate Lat. 632, corredato dalla trascrizione della versione volgare di Luca Pacioli, testo critico dell'edizione nazionale (Giunti, 1995), Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, dal codice Ashburnham 359 della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, testo critico dell'edizione nazionale (Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2013), Federico Commandino, *De centro gravitatis solidorum*, traduzione in italiano e testo critico (Edizioni della Normale, 2015).

La *perspectiva*

La prospettiva come la intendiamo oggi, cioè l'arte di rappresentare sul piano del quadro lo spazio tridimensionale, è figlia dell'Ottica. Il suo nome deriva da *perspectiva* che nel Medioevo e nel Rinascimento, seguita talvolta dall'aggettivo *naturalis* o *communis*, indicava appunto l'Ottica. La prospettiva dei pittori veniva denominata *perspectiva artificialis* o *pingendi*. Questa dipendenza della prospettiva dall'Ottica non stupisce se si considera che i principi base su cui si fonda, come ad esempio che le grandezze lontane appaiono più piccole o che le rette parallele sembrano convergere all'infinito, sono i teoremi 4 e 6 dell'*Ottica* di Euclide [1]. D'altra parte le prime proposizioni del *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca sono teoremi di Ottica con frequenti riferimenti all'*Ottica* di Euclide; le costruzioni prospettiche vere e proprie iniziano solo dalla proposizione XII.

In ambito abachistico il termine *perspectiva* veniva accostato anche alla Geometria pratica, in particolare a quella che si occupava di problemi del tipo: misurare con "*la vista*" o "*a occhio*" l'altezza degli edifici, delle mura e delle montagne, la larghezza dei fiumi, la profondità delle valli. Si tratta di misure indirette condotte spesso con appositi strumenti, ricorrendo alla similitudine dei triangoli. Questa problematica è anch'essa riconducibile all'*Ottica* di Euclide, che contiene infatti quattro teoremi che affrontano proprio queste questioni: teorema 18: "*Sapere quanto è grande un'altezza data, quando c'è il sole*"; teorema 19: "*Sapere quanto è grande un'altezza data quando non c'è il sole*"; teorema 20: "*Sapere quanto è grande una data profondità*"; teorema 21: "*Sapere quanto è grande una larghezza data*" [2].

Nella *Practica geometriae* di Leonardo Fibonacci detto Pisano (1170 ca.-post 1240), caposcuola dell'abachismo, la *septima distinctio* è riservata alla determinazione delle misure di altezze e distanze di oggetti inaccessibili; è molto probabile quindi che nelle scuole d'abaco dei secoli successivi si insegnassero queste cose. In un codice anonimo dell'inizio del Quattrocento la Geometria pratica è definita come "*quella che noi misureremo per perspectiva a occhio la quantitade dubia d'una cossa*" [3]. Antonio di Tuccio Manetti, biografo di Filippo Brunelleschi, ci informa che il nostro nelle scuole fiorentine non solo "*apparò l'abbaco*" ma anche i metodi della "*perspectiva*" pratica per misurare le grandezze inaccessibili, che ebbe

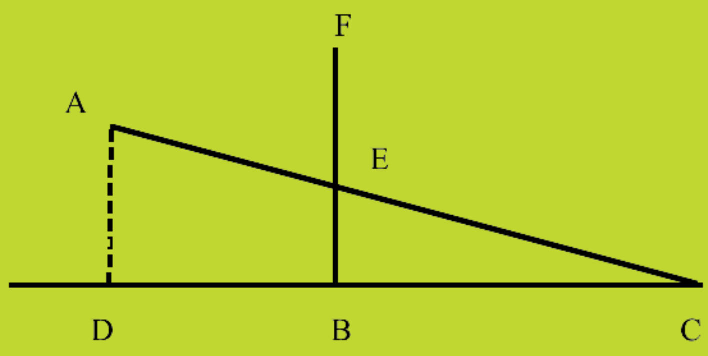


FIG. 1

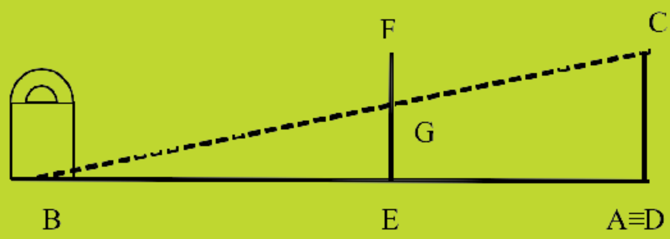


FIG. 2

modo di utilizzare nelle sue campagne di rilevamento dei monumenti romani [4]. Antonio de Mazzinghi, uno dei più prestigiosi maestri d'abaco fiorentini del secolo XIV, viene ricordato da Maestro Benedetto da Firenze (sec. XV) nella *Praticha d'arismetrica* con queste parole: "*Non solamente in arismetricha et geometria, ma in astrologia, musicha anchora, in edificare, in prospettiva, in tutte le arti di gran intelletto fu dotto*" [5]. Ma anche in ambito "dotto" i problemi del misurar "*con la vista*" dovevano essere ritenuti di un certo interesse e in qualche modo attinenti alla prospettiva, se un autore come Leon Battista Alberti, considerato giustamente uno dei padri della nuova scienza prospettica, scrive i *Ludi matematici* (*Ludi Rerum Mathematicarum*) dedicati appunto ai problemi della misura "*a occhio*", cioè con strumenti.
Il legame fra l'arte del "*misurar con la vista*" e la prospettiva come tecnica di rappresentazione su un quadro è evidente e il passaggio dall'una all'altra abbastanza naturale. Ad esempio, nella proposizione XII del *De prospectiva pingendi* [6] Piero della Francesca si propone di rappresentare su un quadro la prospettiva di un segmento posto su un piano orizzontale (ad esempio la profondità di una mattonella del pavimento): "*Da l'ochio dato nel termine posto il piano asignato degradare*" (fig. 1). Sia A l'occhio, BC il segmento da rappresentare sul quadro FB, DB la distanza dell'occhio dal quadro. Dal punto A si traguarda C, l'intersezione di AC con FB sia E. EB è la rappresentazione sul quadro del segmento BC ("*il piano asignato degradato*"). Piero lo dimostra osservando che BE e BC sono visti sotto lo stesso angolo BAC e perciò appaiono uguali, per una proposizione da lui precedentemente dimostrata [7].
Dopo di che calcola su un caso particolare la misura di EB. Pone la profondità del piano BC = 20 braccia, AD = 3, DB = 10; per la similitudine dei triangoli ADC e EBC, risulta AD : DC = EB : BC, dalla quale si ricava EB=2 braccia.
Un abachista, nell'ambito della Geometria pratica delle misurazioni "*a occhio*", si sarebbe posto il problema di determinare la misura di BC e lo avrebbe fatto misurando direttamente EB con qualche strumento e ricorrendo poi alla similitudine dei triangoli. La situazione è rovesciata rispetto a quella affrontata da Piero, cambia la finalità, ma il contesto è identico. Ad esempio nel *Libro di pratica d'arismetricha* di autore ignoto [8], viene posto il problema di determinare la lunghezza del segmento AB, partendo da A (fig. 2), "*chome per esemplo diciamo che uno voglia misurare tutto il lastricho de' Servi cioè quanto sia dal cieraiuolo che è in sul chanto del prato de' Servi infino alla porta della chiesa; et sia AB il righagniolo, vogliamo dire ispigholo che è nel mezo del detto lastricho*" [9]. L'autore usa uno strumento rudimentale costituito da due aste verticali FE e CD di lunghezza 3 "*bracci*", congiunte da un'asta orizzontale ED a terra lunga 4 "*bracci*". Lo strumento viene posto come in fig. 2, con D coincidente con A. Si pone l'occhio in C e si traguarda B, sia G il punto d'incontro di CB con FE. Si misura direttamente FG e dalla similitudine dei triangoli BCD e BGE, applicando opportunamente la proprietà dello scomponendo, si ottiene BD = (DE·DC)/FG, cioè la misura del "*lastricho de' Servi*".

La prospettiva di Pacioli

Tornando al Pacioli prospettico, la sua opera rispecchia le due accezioni del termine *perspectiva*, quella legata alla Geometria pratica del "*misurar con la vista*" e quella legata alla *perspectiva* dei pittori. Alla misura "*col viso cioè col vedere*" è riservata la "*distinctio septima*" della seconda parte della *Summa* in cui Luca si occupa di Geometria: "*De instrumentis quibus mediantibus solo aspectu rerum longitudines, latitudines e altitudines habentur*" [10]. Dopo aver descritto il quadrato geo-

metrico e il quadrante, Pacioli spiega come utilizzare questi strumenti per risolvere diciassette problemi riguardanti la misura di altezze, distanze e profondità, in particolare: misurare la distanza fra due punti A e B con osservazioni fatte da un estremo del segmento AB oppure dalla cima di una torre con base in A o in B o in un altro punto C; misurare l'altezza di una torre con osservazioni fatte da un punto del piano di base o dalla cima della torre o dalla cima di un monte; misurare la distanza fra le cime di due torri o la profondità di un pozzo.
Da un punto di vista strettamente matematico, le procedure impiegate per risolvere i vari casi implicano l'uso delle proporzioni fra i lati di triangoli simili. La trattazione che ne fa Pacioli non è particolarmente originale ma è una sintesi efficace di tutto ciò che in questo campo aveva prodotto la tradizione abachistica. A titolo di esempio riportiamo la soluzione del problema VIII [11] (fig. 3): l'osservatore è in cima ad una torre nel punto *b* e deve calcolare l'altezza *bc* della torre. Pone il quadrato geometrico *pqrf* come in figura e da *r* traguarda il punto *a* posto nel piano della base della torre, sia *d* il punto d'incontro di *ra* con *fp*.
Il lato del quadrato geometrico, che misura 1 braccio, è diviso in 60 parti, sia *fd* = 36 parti, si calcola *rd* con il teorema di Pitagora, si ottiene 70 parti. Con il procedimento esposto in un problema precedente – determinare la distanza fra la cima di una torre e un punto del piano di base – si determina *ra*, sia *ra* = 150 braccia. Dalla similitudine dei triangoli *drf* e *acr*, sarà *fd* : *rd* = *rc* : *ra* , 36 : 70 = *rc* : 150, da cui *rc* = 77 + 1/7 braccia. Ne segue che *bc* = 76 + 1/7 braccia.
La "*distinctio octava*" della seconda parte della *Summa* è una miscellanea di problemi di tipo molto diverso tra loro: si va dal calcolo del volume di una botte o di un tino alla determinazione della superficie della stoffa che occorre per fabbricare un tendone da circo o un vestito, da problemi riguardanti la stadera a quelli relativi alla iscrizione di un certo numero di cerchi in un triangolo. Si chiude con il "*particularis tractatus circa corpora regularia e ordinaria*" cioè con la trattazione dei poliedri regolari. Nell'ambito di questa miscellanea Pacioli colloca, senza un ordine apparente, sette problemi di prospettiva [12], come ricorda nell'enunciato del primo: "*Sapi che questa domanda è de perspectiva ma perché questa scientia è subalternata a geometria e aritmetrica sì l'asolveremo*" [13].
La prospettiva trattata da Pacioli si limita alla risoluzione di questi sette problemi, non c'è alcun accenno ad una problematica più vasta e generale, né alcun riferimento specifico a quanto scritto da Leon Battista Alberti e da Piero della Francesca. Il suo intento è diverso da quello di questi autori, al riguardo si possono fare le seguenti osservazioni generali:

1) Pacioli non si prefigge di disegnare gli oggetti in prospettiva quanto piuttosto di calcolare le dimensioni delle immagini, anche se il riferimento al quadro è evidente. Ad esempio, nel quarto e nel sesto problema, il quadro è presente sotto forma di finestra albertiana: scrive infatti che fra l'occhio e un uomo, di cui si vuole determinare l'altezza dell'immagine, c'è "*una finestra quadra o vero balestrera*" [14];
2) le immagini di cui tratta Pacioli sono piuttosto semplici, sono solo quelle della lunghezza di una tavola posta a terra e della altezza di un uomo considerato in varie situazioni;
3) Pacioli assume la visione monoculare e accenna al concetto di piramide o triangolo visivo. Scrive infatti nel secondo problema: "*e si immagini una piramide cioè un triangolo rettangolo* dcb *cioè facto da l'ochio tuo* d *con la linea che va a li soi piedi* db" [15]; nel problema successivo, "*immaginando piramide e triangoli visuali*" [16];
4) affronta la prospettiva con una mentalità prevalentemente mate-

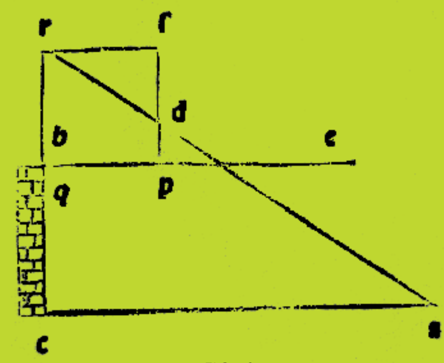


FIG. 3

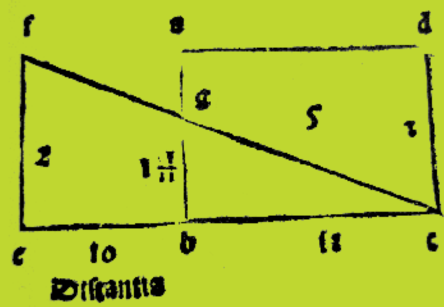


FIG. 4

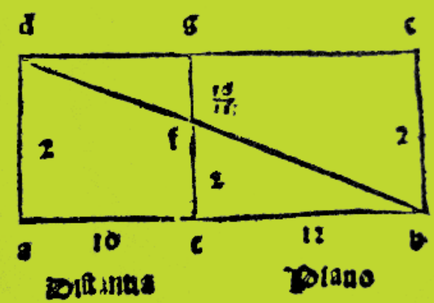


FIG. 5

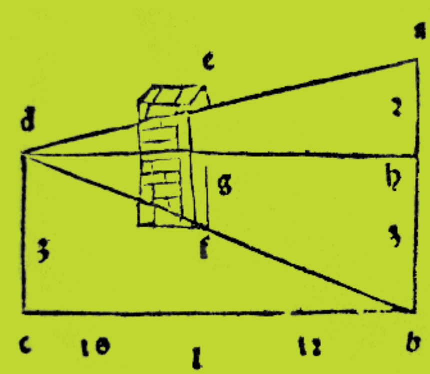


FIG. 6

matica, come risulta per esempio dal fatto che accanto al normale problema prospettico di determinare l'altezza dell'immagine di un uomo data la sua altezza reale, la distanza dell'occhio e dell'uomo dal quadro [17], si pone anche il problema di quanto deve essere la distanza del quadro dall'occhio e dall'uomo, sapendo l'altezza reale dell'uomo, la misura della sua immagine e la distanza dell'occhio dall'uomo [18]; oppure si propone di determinare quanto deve essere alto un uomo sapendo la misura della sua immagine e le distanze del quadro dall'occhio e dall'uomo [19]. Questi ultimi due problemi inversi non rientrano certamente nel campo di interesse di un pittore.

Passiamo ora in rassegna i singoli problemi: nel problema I [20] è considerata una tavola posta a terra di larghezza *ab* = *cd* = 2 braccia e lunghezza *ad* = *bc* = 12 braccia che Pacioli rappresenta come in fig. 4. Una persona mette l'occhio in *f* che dista dal suolo *fe* = 2 braccia e dalla tavola *eb* = 10 braccia. Si chiede quanto appare profonda la tavola vista dall'occhio *f* su *ab* preso come quadro (in realtà il quadro è sul piano verticale passante per *ab*). Pacioli unisce *f* con *c*, l'intersezione con *ab* è *g*, calcola *bg* ricorrendo ai triangoli simili *fec* e *gbc*, ottenendo *bg* = 1+ 1/11 braccia. Per giustificare che *bg* è l'immagine di *bc*, ricorre ad una motivazione singolare, afferma che se sovrapponiamo a *bg* un bastone e traguardiamo da *f,* non vediamo più la tavola, da qui la conclusione che *bg* è l'immagine della tavola.
È una giustificazione più sperimentale e abachistica che propriamente matematica ed è interessante notare sullo stesso tema la differenza con Piero. Nella già citata proposizione XII del *De prospectiva pingendi* Piero affronta lo stesso caso anche se le lettere usate e i dati numerici sono diversi. Fa la stessa costruzione, calcola la misura di *bg,* ma per dimostrare che *bg* è la rappresentazione prospettiva di *bc* ricorre ad una argomentazione tutta teorica, più rigorosa da un punto di vista matematico. Si appella infatti alla proposizione II del *De prospectiva*: "*Tucte le base vedute socto uno medesimo angolo, ben che le sieno diversamente poste, s'apresentano a l'ochio equali*", che risolve il nostro caso considerato che *bc* e *bg* sono visti sotto lo stesso angolo *bfc.*
C'è inoltre da osservare che Pacioli trascura del tutto il problema di determinare l'immagine della larghezza posteriore della tavola di cui nel testo assegna inutilmente la misura; si limita ad osservare che la larghezza della parte anteriore della tavola appare così come è, perché sta sul piano del quadro: "*De la largeça non si fa caso poiché par quella medema poiché sta in maiesta*" [21]. Anche nei problemi successivi questo aspetto è trascurato, visto che in essi si occupa solo delle altezze. Ciò è comprensibile, lo scopo di Pacioli non era il disegno ma una sorta di esercitazione matematica condotta sulla materia prospettica. Piero invece, che voleva disegnare la prospettiva di un quadrato, determina nella proposizione XIII [22] anche l'immagine della sua larghezza, anteriore e posteriore rispetto al punto di vista.
I sei problemi che seguono riguardano tutti il problema di determinare l'altezza di un uomo visto da un altro.
Nel problema II [23] sono presenti 3 uomini, alti 2 braccia e sistemati come segue: il primo si trova in *eg* (fig. 5), il secondo in *bc*, il terzo in *ad*, la distanza fra il terzo e il primo è *ae* = 10 braccia e quella fra il primo e il secondo è *eb* = 12 braccia. Si chiede come appariranno il primo e il secondo uomo al terzo che ha l'occhio in *d*. Il riferimento (il quadro) viene posto da Pacioli in *eg,* per cui l'altezza del primo uomo sarà come quella reale, cioè 2 braccia; per determinare l'immagine del secondo uomo, traccia *db*; l'immagine sarà *gf,* la cui misura, determinata considerando i triangoli simili *dbc* e *dfg*, risulta *fg* = 10/11 braccia. Nella descrizione dello svolgimento del problema c'è da osservare l'uso di termini che sono propri del linguaggio della prospettiva e dell'Ottica.
Innanzitutto, come già anticipato, l'utilizzo del concetto di piramide o triangolo visivo: "*E si immagini una piramide cioè un triangolo rettangolo* dcb *cioè facto da l'ochio tuo* d *con la linea che va a li soi piedi* db", poi il concetto che gli oggetti lontani, che si trovano sotto l'occhio, sono visti più alti di quelli vicini: "*cioè li piedi* [b] *se levano in alto a vedere supra la potumissa*" [24]. Nell'*Ottica* di Euclide il teorema 10 recita: "*Tra i piani che giacciono sotto l'occhio quelli* [più] *lontani appaiono più in alto*" [25].

> "Lo scopo di Pacioli non era il disegno ma una sorta di esercitazione matematica condotta sulla materia prospettica."

Il problema III [26] è una variante del II. Un uomo dista dall'osservatore 10 braccia; se l'uomo si allontana dall'osservatore di 12 braccia, la sua immagine agli occhi dell'osservatore aumenta o diminuisce? Segue l'indicazione di procedere come nel caso precedente.
Nel problema IV [27] l'occhio è in *d* (fig. 6) e a distanza 22 braccia c'è un uomo *ab* alto 5; fra l'occhio e l'uomo è interposta una "*finestra quadra o vero balestrera*" distante 10 dall'occhio e 12 dall'uomo.
Si chiede di determinare l'altezza dell'immagine dell'uomo sulla "*finestra*": "*Si vego diponto colui da la cima del capo fino a la pianta di piedi dimando quante bracci sirà alta ditta finestra*". Questo non è l'unico accenno alla pittura: per stabilire l'altezza dell'occhio, Pacioli scrive che: "*Avenga che in l'arte pictoria si metta*

> Il problema VII è più complesso dei precedenti ma riguarda sempre la determinazione delle altezze delle immagini di uomini.

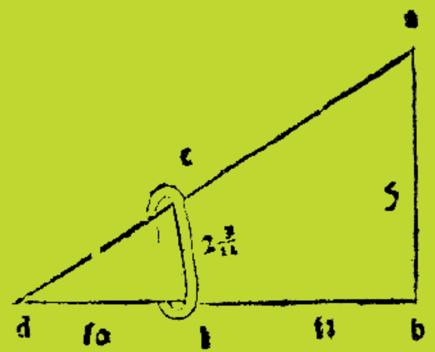


FIG. 7

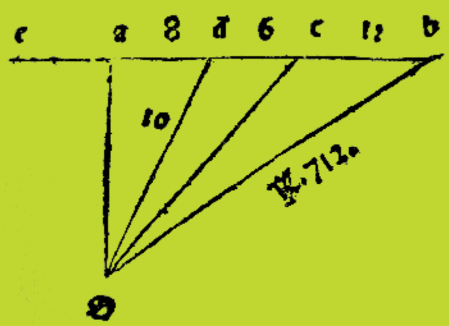


FIG. 8

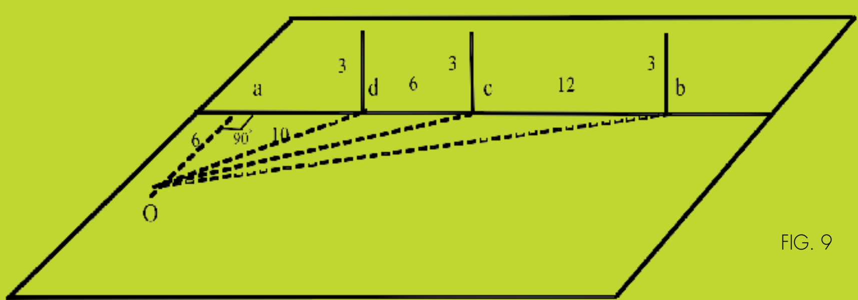


FIG. 9

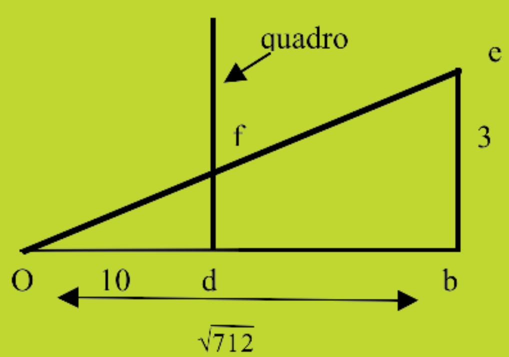


FIG. 10

comunamente l'omo longo bracci 3". Vengono assegnati due procedimenti di risoluzione. Nel primo si determina *eg* ricorrendo ai triangoli simili *dah* e *deg*, ottenendo *eg* = 10/11 e si trova la misura di *fg* considerando i triangoli simili *dbh* e *dfg*, quindi risulta *fg* = 1+4/11 braccia. In conclusione l'altezza dell'immagine *ef* = *eg* + *fg* = 2+3/11 braccia.

Con il secondo procedimento si considerano i triangoli simili *dab* e *def*, da cui si ricava direttamente *ef* = 2+3/11 braccia. Nell'ambito della descrizione di questa procedura Pacioli utilizza di nuovo il concetto di piramide visiva: "*Perché l'ochio tuo causa piramide e anche un triangolo* [dab]".

I due problemi successivi sono delle variazioni matematiche sullo stesso tema del problema IV e sono illustrati da un unico disegno (fig. 7). Nel problema V [28], l'occhio è in *d*, l'uomo *ab* è alto 5 braccia ed è lontano dall'occhio 22 braccia. In mezzo è disposta "*una finestra*" che mostra l'immagine alta 2+3/11 braccia.

Si chiede la distanza della "*finestra*" dall'occhio e dall'uomo. Ricorrendo alla similitudine dei triangoli *dab* e *def* si trova *df* = 10 e *fb* = 12.

Nel problema VI [29], invece, l'occhio è sempre in *d* , sono assegnate le distanze della "*finestra*" dall'occhio e dall'uomo, rispettivamente 10 e 12 bracci, e l'altezza dell'immagine *ef* = 2+3/11; si chiede l'altezza dell'uomo. Ricorrendo alla similitudine degli stessi triangoli si trova ovviamente *ab* = 5 braccia.

Il problema VII [30] è più complesso dei precedenti ma riguarda sempre la determinazione delle altezze delle immagini di uomini. Pacioli rappresenta la situazione in pianta (fig. 8), la rappresentazione tridimensionale è nella fig. 9. In *o* è posto l'occhio, in *d*, *c*, *b* tre uomini alti 3 braccia, le cui distanze reciproche sono *dc* = 6 e *cb* = 12. L'occhio dista dalla retta su cui giacciono le tre persone 6 braccia (*oa* = 6) e dista dalla prima persona *od* = 10 braccia. Si chiede "*quanto me s'arepresenta ciascuna de ditte*

persone e quanto dissgrada una e quanto l'altra" e Pacioli ricorda "*che questa è gentil domanda in perspectiva*". In pratica chiede quale sarà l'altezza delle immagini delle tre persone viste dall'occhio *o* su un quadro posto perpendicolare alla direzione rispettivamente *od*, *oc*, *ob* alla distanza dall'occhio pari a 10 braccia.
È chiaro che la persona in *d* apparirà nella sua altezza naturale di 3 braccia, in quanto giace sul quadro – "*quel che sta al ponto* d *te s'apresenta quel medesimo che egli è cioè bracci 3*" –, per le altre Pacioli adotta il procedimento seguente: applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *oad* e calcola *ad* = 8, quindi, ancora con Pitagora applicato ai triangoli *oac* e *oab*, trova $oc = \sqrt{232}$ e $ob = \sqrt{712}$. Portando il quadro perpendicolarmente alla direzione *ob* alla distanza dall'occhio *od* = 10 braccia, l'altezza *df* dell'immagine dell'uomo posto in *b* e alto 3 braccia (fig. 10) si ottiene dalla proporzione seguente $\sqrt{712} : 3 = 10 : x$, ottenuta, come nei casi precedenti, considerando i triangoli simili *obe* e *odf*.
Si ha $df = \sqrt{1+47/178}$. Con un analogo procedimento si ottiene l'altezza dell'immagine dell'uomo in *c* formata su un quadro posto a distanza 10 dall'occhio perpendicolare alla direzione *oc*. Risulta uguale a $\sqrt{3+51/58}$.
Pacioli fa notare che, se in *a* fosse posto un uomo alto 3 braccia, allora rispetto ad esso l'immagine della persona posta in *d* sarebbe minore di 3 braccia, precisamente sarebbe 1+4/5 braccia e ovviamente si ridurrebbero anche le immagini delle persone poste in *c* e in *b*, che Luca ricalcola di nuovo [31]. La cosa si può generalizzare: "*E così se fossero infinite persone sopra una medesima linea o da man destra o da senestra commo si voglia o de equali o voi de diverse distantie o de diverse alteçça o ver stature (commo torri, merli o simili cose)*" [32]. In conclusione, Pacioli osserva che se la cosa percepita con altezza invariata fosse quella posta nella posizione più lontana *b*, allora le altre apparirebbero con altezza maggiore da calcolarsi con lo stesso procedimento: "*E quando te fosse datto fermo l'ultimo quello del ponto* b *e per quello tu volesse sapere quanto te s'arapresenterà gli altri più, alora faresti al contrario perché ciascuno te virrà a crescere*" [33]. ■

Note

[1] Euclide, *Ottica*, a cura di Francesca Incadorna, traduzione dal testo greco dell'edizione di I. L. Heiberg, Lipsia 1895, Di Resto Editore, Roma 2011. Teorema 4: "*Tra intervalli uguali e giacenti sullo stesso segmento rettilineo quelli visti da una distanza più grande appaiono più piccoli*", p. 132. Teorema 6: "*Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli*", p. 134.
[2] *Ibi*, pp. 148-151.
[3] Anonimo, *Aritmetica*, 1410 ca., Venezia, Biblioteca Nazionale Marciana, It. IV 497 (5263), cc. 16r-19v.
[4] A. Di Tuccio Manetti, *Vita di Filippo Brunelleschi, preceduta da la novella del grasso*, a cura di D. De Rubertis, Milano 1976, pp. 67-68.
[5] Benedetto da Firenze, *Prathica d'arismetrica*, c. 451r, in G. Arrighi, "Il codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena e la Bottega dell'Abaco a Santa Trinità in Firenze", in *Physis. Rivista internazionale di storia della scienza*, anno VII (1965), fasc. 4, pp. 369-400.
[6] Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, edizione critica a cura di G. Nicco-Fasola, Le Letture, 2005, p. 75.
[7] *Ibi*, Prop. II : "*Tucte le base vedute socto uno medesimo angolo, ben che le sieno diversamente poste, s'apresentano a l'ochio equali*", p. 66.
[8] Codice Ottobiano latino 3307, Biblioteca Apostolica Vaticana, cfr. G. Arrighi, "Un estratto del "De visu" di M° Gratia de' Castellani", op. cit., p. 46, in *Atti della Fondazione G. Ronchi*, XXII, 1967, pp. 44-58.
[9] *Ibi*, pp. 46-47.
[10] Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, Venezia 1494, "*Tractatus geometrie*", "*Distinctio septima*", ff. 50r-52r.
[11] *Ibi*, f. 51r.
[12] *Ibi*, ff. 65r-66r. Pacioli non enumera i problemi.
[13] *Ibi*, f. 65r.
[14] *Ibi*, IV problema, f. 65v: "*Fra lui e me ene una finestra quadra overo balestrera distante da me bracci 10 e distante da lui bracci 12*"; VI problema, f. 65v: "*Fra lui e me c'è una finestra che me lo mostra de ponto da piè a capo alto bracci 2+3/11*".
[15] *Ibi*, f. 65r.
[16] *Ibid.*
[17] *Ibi*, problemi II, III, IV e VII, ff. 65r e v.
[18] *Ibi*, problema V, f. 65v.
[19] *Ibid.*, problema VI.
[20] *Ibi*, f. 65r.
[21] *Ibid.*
[22] Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, op. cit., "*Il piano degradato in quadro reducere*", p. 76.
[23] Luca Pacioli, *Summa de arithmetica*, op. cit., f. 65r.
[24] *Ibid.*
[25] Euclide, *Ottica*, op. cit., p. 140.
[26] Luca Pacioli, *Summa de arithmetica*, op. cit., f. 65r.
[27] *Ibi*, f. 65v.
[28] *Ibid.*
[29] *Ibid.*
[30] *Ibi*, ff. 65v-66r.
[31] *Ibi*: "*Ma quando nel ponto* a *vine fusse un altro de la medesima alteçça che virria a esser distante dal* d *bracci 8, alora similmente quel che sta nel ponto* d *virria a degradare ancor lui e quel che stesse nel ponto* a *staria saldo in sua quantità poi che gli è il termine a te più prossimo che sia*", f. 66r.
[32] *Ibid.*
[33] *Ibid.*