

Probabilità

8-22 Febbraio 2019

Marta Lucchini

Orientamatica 2019

Esercizio 1

A, B, C sono tre eventi. Esprimi mediante operazioni insiemistiche i seguenti eventi.

- a) Almeno uno dei tre eventi si verifica.
- b) Non si verifica nessuno dei tre.
- c) Si verifica solo A .
- d) B non si verifica
- e) Si verificano al più due eventi.

Ω spazio campionario.

- $P(E) \geq 0$ per ogni evento E ;
- $P(\Omega) = 1$
- Se E e F sono eventi incompatibili, ovvero tali che $E \cap F = \emptyset$, allora

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

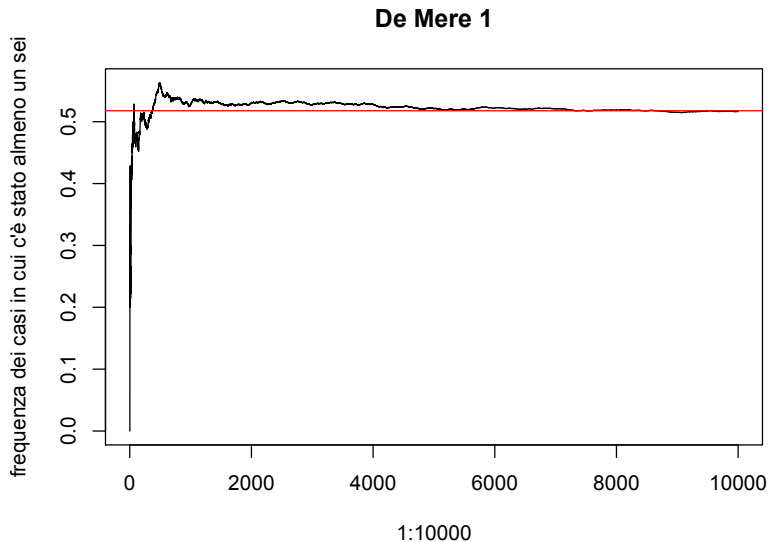
Esercizio 2

A, B eventi.

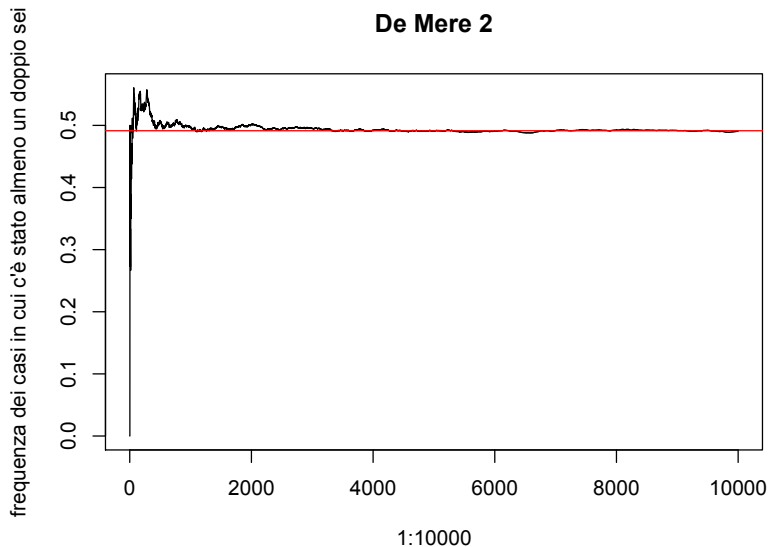
a) Se $P(A) = 1/3$ e $P(B^c) = 1/5$, gli eventi A e B possono essere incompatibili?

b) Se $P(A) = P(B) = 2/5$, può essere $P(A \cup B) = 1/3$? E $P(A \cup B) = 1$?

Le scommesse del Cavaliere De Mere 1



Le scommesse del Cavaliere De Mere 2



Esercizio 3

Un'inchiesta sulla popolazione della città XX ha rivelato che l'8% della popolazione è ricco, il 5% è famoso, il 2% è ricco e famoso.

- a) Qual è la probabilità che un cittadino sia ricco ma non famoso?
- b) Qual è la probabilità che un cittadino non sia né ricco né famoso?

Esercizio 3

Un'inchiesta sulla popolazione della città XX ha rivelato che l'8% della popolazione è ricco, il 5% è famoso, il 2% è ricco e famoso.

- a) Qual è la probabilità che un cittadino sia ricco ma non famoso?
- b) Qual è la probabilità che un cittadino non sia né ricco né famoso?
- c) Qual è la probabilità che un cittadino famoso sia ricco?

Esercizio 4

L'incidenza di una malattia xy su una popolazione è pari all'1%. Un individuo si sottopone a un test diagnostico, per verificare se è malato di xy . Si sa che la sensibilità del test, ovvero la probabilità che un soggetto malato risulti positivo, è del 95%, mentre la *specificità* del test, ovvero la probabilità che un soggetto sano risulti negativo è del 97%.

- a) Calcolare la probabilità che il soggetto sia malato e risulti positivo al test.
- b) Calcolare la probabilità che il soggetto risulti positivo al test.
- c) Calcolare il *valore predittivo* del test, ovvero la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato.

Esercizio 5

Il venditore di uno strumento di controllo dichiara che il suo prodotto ha un'alta affidabilità, dal momento che con probabilità $p = 99\%$ individua correttamente i componenti difettosi e quelli funzionanti. Con questo strumento, andiamo a rintracciare i componenti difettosi di una partita, sapendo che essi ne costituiscono il 5% .

- a) Determinare la probabilità che un componente venga dichiarato difettoso dallo strumento di controllo.
- b) Determinare la probabilità che un componente sia difettoso, se lo strumento lo ha dichiarato tale.
- c) Ora, se vogliamo che la probabilità del punto b) sia pari al 95% , quanto deve valere l'affidabilità p dello strumento?

Esercizio 6

Un'urna contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere.

Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera, la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre tre palline nere. Se invece è bianca, nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede quindi a successive due estrazioni seguendo lo schema appena descritto.

Calcolare la probabilità di estrarre tre palline dello stesso colore.

Esercizio 7

Di tre urne indistinguibili, si sa solo che una contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere, un'altra ne contiene 8, tutte bianche, la terza ne contiene 2 nere. Si estrae una pallina da un'urna, scelta a caso tra le tre.

a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

Esercizio 7

Di tre urne indistinguibili, si sa solo che una contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere, un'altra ne contiene 8, tutte bianche, la terza ne contiene 2 nere. Si estrae una pallina da un'urna, scelta a caso tra le tre.

- a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?
- b) Se la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità di aver pescato dall'urna contenente solo bianche?

Esercizio 8

Tre macchine, A , B e C producono rispettivamente il 60%, il 30% e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica.

Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.

- Qual è la probabilità di estrarre un pezzo difettoso?
- Viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso: qual è la probabilità che sia stato prodotto dalla macchina C ?

Esercizio 9

Anna e Marco tentano il test per entrare alla facoltà di Entrambi hanno probabilità 0.8 di farcela, e lavorano autonomamente, senza copiare l'uno dall'altra.

- a) Qual è la probabilità che lo superino entrambi?
- b) Qual è la probabilità che lo superi almeno uno dei due?

1) Lancio una moneta equa 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte.

Prove di Bernoulli

- 1) Lancio una moneta equa 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte.
- 2) Anna, Marco e altri due studenti partecipano al test per entrare alla facoltà di Ognuno ha probabilità 0.8 di farcela. Qual è la probabilità che almeno due di loro superino il test?

- 1) Lancio una moneta equa 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte.
- 2) Anna, Marco e altri due studenti partecipano al test per entrare alla facoltà di Ognuno ha probabilità 0.8 di farcela. Qual è la probabilità che almeno due di loro superino il test?
- 3) In una determinata popolazione, la percentuale di persone il cui QI supera 120 è del 7%. Qual è la probabilità che, tra 5 persone scelte a caso, ce ne siano esattamente 3 con QI maggiore di 120?

Quesito 4, Esame di Stato 2016

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una sola è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8 domande.

Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Esercizio 11

Quesito 8, Esame di Stato 2017

Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia.

Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Esercizio 12

Un'urna contiene 5 monete, indistinguibili l'una rispetto all'altra, di cui 3 eque e 2 truccate in modo che esca sempre testa.

a) Si estrae una moneta a caso e la si lancia. Qual è la probabilità di ottenere testa?

Esercizio 12

Un'urna contiene 5 monete, indistinguibili l'una rispetto all'altra, di cui 3 eque e 2 truccate in modo che esca sempre testa.

- a) Si estrae una moneta a caso e la si lancia. Qual è la probabilità di ottenere testa?
- b) Se si effettuano in tutto 10 lanci della stessa moneta, qual è la probabilità di ottenere 10 teste?

Esercizio 12

Un'urna contiene 5 monete, indistinguibili l'una rispetto all'altra, di cui 3 eque e 2 truccate in modo che esca sempre testa.

- Si estrae una moneta a caso e la si lancia. Qual è la probabilità di ottenere testa?
- Se si effettuano in tutto 10 lanci della stessa moneta, qual è la probabilità di ottenere 10 teste?
- Qual è la probabilità che l'undicesimo lancio dia testa, sapendo che in tutti i lanci precedenti è uscita testa?

Esercizio 12

Un'urna contiene 5 monete, indistinguibili l'una rispetto all'altra, di cui 3 eque e 2 truccate in modo che esca sempre testa.

- a) Si estrae una moneta a caso e la si lancia. Qual è la probabilità di ottenere testa?
- b) Se si effettuano in tutto 10 lanci della stessa moneta, qual è la probabilità di ottenere 10 teste?
- c) Qual è la probabilità che l'undicesimo lancio dia testa, sapendo che in tutti i lanci precedenti è uscita testa?
- d) Se prima di effettuare ciascun lancio scegliessimo a caso una moneta, quale sarebbe la probabilità di ottenere 10 teste?

Esercizio 13

Un tribunale deve decidere in merito a un evento E , che si ritiene abbia probabilità di accadere $p = 10^{-3}$.

Il processo ha due testimone chiave, A e B . Ciascuno dei due, si suppone, dice la verità nel 90% dei casi, e comunque indipendentemente dall'altro.

Qual è la probabilità che E si sia verificato se entrambi i testimoni hanno affermato che si è verificato?