IL METODO DI CARDANO

Vediamo come Cardano affronta la risoluzione delle equazioni di terzo grado e qual è esattamente l'importanza del caso irriducibile nella sua costruzione.

Nell'*Ars Magna*, in cui ammette di aver sfruttato il lavoro di Tartaglia, la formula risolutiva è presentata dopo l'esposizione di una "*demonstratio*". Vediamo quindi (cfr. bibliografia [7, cap. XI]) come Cardano tratta l'equazione $x^3 = a_1x + a_0$ del "*cubo uguale alle cose e al numero*".

Riprendendo il suggerimento di Tartaglia, Cardano vuole mostrare che, data l'equazione $x^3 = a_1x + a_0$, se vale:

$$\begin{cases} AB\cdot BC = \dfrac{a_1}{3} \\ AB^3 + BC^3 = a_0 \end{cases},$$

allora $AC = AB + BC = x$. Infatti, posto $y = Y^3$ e $z = Z^3$, si ha:

$$\begin{cases} Y^3 + Z^3 = a_0 \\ Y^3Z^3 = (\dfrac{a_1}{3})^3 \end{cases}, \quad \text{vale a dire} \quad \begin{cases} Y^3 + Z^3 = a_0 \\ YZ = \dfrac{a_1}{3} \end{cases},$$

da cui la soluzione $x = Y + Z$.

Sia dunque $AC = x$. A partire dalle due condizioni del sistema precedente e dallo sviluppo del cubo di un binomio, è immediato mostrare che vale l'uguaglianza data dall'equazione. Infatti, dalla prima condizione $AB\cdot BC = a_1/3$ si ricava che $3AB\cdot BC\cdot AC = a_1x$; dallo sviluppo del cubo del binomio si ha:

$$(AB + BC)^3 = AB + 3AB^2\cdot BC + 3AB\cdot BC^2 + BC^3,$$

vale a dire:

$$AC^3 = 3AB\cdot BC\cdot AC + (AB^3 + BC^3).$$

Usando anche la seconda condizione $AB^3 + BC^3 = a_0$ del sistema, si ritrova l'equazione $x^3 = a_1x + a_0$ che volevamo.

Osserviamo che Cardano dimostra in un lemma a parte che $3AB\cdot BC\cdot AC = 3AB^2\cdot BC + 3AB\cdot BC^2$. Qui, Cardano usa in modo essenziale il diagramma ("*latera enim omnia omnibus sunt æqualia*") e la distributività dell'operazione "·" rispetto all'operazione "+" tra segmenti, per giustificare i seguenti passaggi:

$$AB\cdot BC\cdot AC = AB\cdot BC\cdot CE = AB\cdot(BE) = AB\cdot((CD) + (DE)) = AB^2\cdot BC + AB\cdot BC^2.$$

Cardano dimostra in un capitolo precedente la formula per lo sviluppo del cubo del binomio, a partire da un ragionamento geometrico (se così lo si vuol chiamare) del tipo del libro II degli *Elementi* di Euclide (in effetti, Cardano usa *El.* II, 4 per giustificare la propria dimostrazione. L'idea è di dividere in due parti un segmento dato, sul quale si costruisce poi il cubo, che risulta così anch'esso diviso in otto corpi. Cfr. bibliografia [7, cap. VI.6]).

A questo punto, Cardano giustappone direttamente quella che chiama la "regola", secondo la quale:

$$AC = x = \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}}$$

che vale a condizione (che rientra in $\Delta_3 < 0$) che:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 > \left(\frac{a_1}{3}\right)^3.$$

Nel caso in cui la condizione non sussista, Cardano rinvia al capitolo XXV, nell'edizione 1545 dell'*Ars Magna* (si veda anche il *De Regula Aliza*, nelle edizioni del 1570 e 1663). Nel capitolo XXV dell'*Ars Magna* Cardano elenca una serie di regole "particolari", in cui cioè i coefficienti soddisfano certe condizioni. Ad esempio, consideriamo l'equazione $x_3 = a_1x + a_0$ e siano:

$$\begin{cases} a_1 = f + g \\ a_0 = f\sqrt{g} \end{cases}.$$

Allora

$$x = \sqrt{f + \frac{1}{4}g} + \frac{1}{2}g$$

(cfr. in bibliografia [7, cap. XXV]).

Osserviamo che questo tipo di dimostrazione è del tutto opaco rispetto al procedimento di scoperta della formula risolutiva. Altrimenti detto, se il legame tra la dimostrazione e la formula risolutiva non è esplicitato ma è comunque ovvio, niente è invece detto su come le ipotesi della dimostrazione siano state trovate. Infatti, sappiamo che $AC = AB + BC$ e che:

$$\begin{cases} AB\cdot BC = \dfrac{a_1}{3} \\ AB^3 + BC^3 = a_0 \end{cases}.$$

Se troviamo quindi AB, BC in funzione dei coefficienti dati a_1, a_0, avremo un'espressione esplicita per AC. Si verifica facilmente che le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} AB = \sqrt[3]{\dfrac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a_1}{3}\right)^3}} \\ BC = \sqrt[3]{\dfrac{a_0}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a_1}{3}\right)^3}} \end{cases} \text{e} \quad \begin{cases} AB = \sqrt[3]{\dfrac{a_0}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a_1}{3}\right)^3}} \\ BC = \sqrt[3]{\dfrac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a_1}{3}\right)^3}} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi un'unica espressione simmetrica per $AC = AB + BC$:

$$AC = x = \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}}.$$

Tutti i capitoli dell'*Ars Magna* dedicati alla risoluzione delle equazioni di terzo grado hanno una struttura simile a quello appena visto: viene dato l'enunciato, segue la dimostrazione, la formula risolutiva viene poi riassunta e infine messa alla prova con alcuni esempi numerici.

Tra tutte le dimostrazioni, solo quelle per $x^3 + a_1x = a_0$ e $x^3 = a_1x + a_0$ nei capitoli XI e XII non hanno rimandi al procedimento risolutivo di altre equazioni. Queste prime due dimostrazioni, benché indipendenti tra loro, sono calcate l'una sull'altra.

La dimostrazione per $x^3 = a_1x + a_0$ (cfr. in bibliografia [7, cap. XI]) usa essenzialmente lo stesso tipo di giustificazione (sviluppo del binomio di un cubo, riferimento al diagramma e distributività del-

l'operazione "·" rispetto all'operazione "+" tra segmenti) di quella appena vista per $x^3 + a_1x = a_0$. La dimostrazione presenta solo una leggera modifica riguardo al segno di BC per tener conto del fatto che, preso $BC > 0$, questa volta il segmento risolutivo è $x = AB = AC - BC$ (da leggere sullo stesso diagramma).
Per quanto riguarda la dimostrazione della soluzione delle altre equazioni, l'equazione $x^3 + a_0 = a_1x$ nel capitolo XIII forma un gruppo compatto con le due precedenti. Cardano sa (cfr. in bibliografia [7, cap. I, punti 5 e 6]) che (nel caso $\Delta_3 < 0$) le due soluzioni reali "vere" sommate danno la soluzione di $x^3 = a_1x + a_0$ e nella dimostrazione si limita a illustrare questo fatto, assumendo come in precedenza delle ipotesi che portano direttamente alla formula risolutiva, ma di cui non si coglie l'origine.
Per le equazioni restanti (tranne che per $x^3 + a_0 = a_2x^2$ nel capitolo XVI), Cardano usa sempre la stessa strategia che consiste nel giustificare tramite una dimostrazione la sostituzione $x = y \pm a_2/3$. Elimina così il termine di secondo grado e può ricondursi a una delle tre equazioni che sa già risolvere. In particolare, usa:

$$x = y - \frac{a_2}{3}$$

se i termini x^3 e a_2x^2 sono nello stesso membro, altrimenti $x = y\frac{a_2}{3}$.

Per l'equazione $x^3 + a_0 = a_2x^2$ Cardano preferisce sfruttare dal capitolo VII la sostituzione:

$$x = \frac{(\sqrt[3]{a_2})^2}{y}$$

che conduce direttamente all'equazione $y^3 + a_0 = a_2\sqrt[3]{a_0}\,y$.

Se il segno dei nuovi coefficienti dell'equazione trasformata necessita di discussione, Cardano introduce dei sottocasi, dimostrati in modo del tutto analogo. Prendiamo ad esempio $x_3 + a_2x^2 = a_0$ nel capitolo XV, che presenta un solo livello di suddivisione in casi. La sostituzione:

$x = y - \frac{a_2}{3}$ conduce all'equazione $+2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 = \frac{(a_2)^2}{3}y$, in cui

$x = y - \frac{a_2}{3}$ poiché $a_2 > 0$, mentre il segno di $2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0$ può

variare e quindi va discusso. In particolare, se $2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 > 0$,

allora ci si riconduce all'equazione $y^3 + 2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 = \frac{(a_2)^2}{3}y$, da

risolvere con il metodo del capitolo XIII. Se $2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 = 0$, ci si

riconduce all'equazione $y^3 = \frac{(a_2)^2}{3}y$, vale a dire $y^2 = \frac{(a_2)^2}{3}$, che

è di secondo grado. Se infine $2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 < 0$, ci si riconduce

all'equazione $y^3 = 2(\frac{a_2}{3})^3 - a_0 + \frac{(a_2)^2}{3}y$, da risolvere con il

metodo del capitolo XII.
Osserviamo che, quando si presentano dei casi o sottocasi, la dimostrazione è parziale nel senso che Cardano fornisce la dimostrazione solo per un caso.