Tecnologia e didattica della Matematica

GIULIO C. BAROZZI

CIRAM-Università di Bologna

barozzi@ciram.ing.unibo.it
http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi

Ringrazio gli organizzatori per avermi invitato a trattare un tema delimitato, qual è quello che dà il titolo a questa relazione; un tema più ampio (e più difficile) sarebbe stato Tecnologia e Matematica. Non so se sarei stato in grado di affrontarlo; ma certamente avrei accennato a due sviluppi recenti, fortemente influenzati dalla tecnologia: l'esplosione della Matematica Computazionale e la riscoperta in chiave algoritmica della teoria dei numeri (codici crittografici a chiave pubblica).

Limitandomi alla sola didattica della Matematica, toccherò i tre punti seguenti:

- uso dei PC e delle calcolatrici tascabili;
- comunicazione visiva e didattica della Matematica;
- Internet e didattica della Matematica.

1. Uso dei PC e delle calcolatrici tascabili scientifiche

La storia è cominciata circa trenta anni fa con il lancio della prime calcolatrici scientifiche: ricordo la HP 35 (così chiamata perché aveva 35 tasti) e tutte le altre che sono seguite, sempre più sofisticate. Qual è stato l'influsso delle calcolatrici sul mondo della scuola? Non piccolo: mandò in pensione in breve tempo le tavole dei logaritmi e il regolo calcolatore. Ma non provocò una rivoluzione nell'insegnamento.

Il vero impatto si ebbe con l'introduzione dei PC programmabili. In Italia questo ha coinciso in larga misura con il PNI (Piano Nazionale per l'Informatica). A suo tempo il PNI fu sommerso da un coro di critiche per l'improvvisazione con cui fu realizzato. Vorrei tuttavia ricordare due punti importanti a favore del PNI:

1. esso ha dato inizio all'innovazione curricolare;
2. ha favorito la valorizzazione (e la conoscenza reciproca) di un numero rilevante di docenti della scuola secondaria superiore che, senza il PNI, sarebbero rimasti confinati alle loro realtà locali.

L'educazione al pensiero algoritmico andava a braccetto con l'insegnamento di un linguaggio di programmazione. La polemica sulla programmazione strutturata oppure no, sintetizzata nel dualismo

Pascal versus BASIC

fu molto accesa. Oggi possiamo dire che l'obiettivo dell'educazione al pensiero algoritmico non è stato perseguito nel tempo. Il Pascal sta progressivamente sparendo, ma non si è individuato un chiaro successore.

Il C è il linguaggio vincente a livello di applicazioni professionali, ma non sembra proponibile nelle scuole non specificatamente indirizzate all'Informatica.

I linguaggi contenuti nei vari sistemi di calcolo algebrico (CAS = *Computer Algebra Systems*) sembrano troppo complicati se ci si riferisce a quelli dei sistemi "grandi" (Maple, *Mathematica*, ...) e sembra ancora troppo grezzo il linguaggio contenuto in DERIVE.

Paradossalmente, il linguaggio contenuto nelle calcolatrici evolute di TI (TI 92 e TI 89) è preferibile a quello contenuto in DERIVE, pur essendo entrambi prodotti dalla Soft-Warehouse di Honolulu. Quello che fa più difetto nel linguaggio di DERIVE, almeno come si configura in questo momento (versione 5), è il fatto che non esiste un buon ambiente per la scrittura e correzione (*editing*) dei programmi: basta pensare che occorre introdurre i listati su una sola riga, salvo poi vederli su più righe una volta introdotti. È chiaro che appena si hanno listati di una qualche complessità, questa situazione è didatticamente inaccettabile.

C'è qualcosa che sfugge alla mia comprensione, qualcosa che probabilmente trova la sua giustificazione in considerazioni di tipo commerciale. È verosimile che la difficoltà segnalata sopra venga superata, e che di conseguenza i linguaggi dei sistemi come DERIVE o simili si pongano in modo naturale come quelli più adatti per un insegnamento della Matematica in un contesto di laboratorio.

Resta un problema di fondo: i linguaggi contenuti nei CAS consentono non solo di fare tutto quello che si fa con un linguaggio di programmazione tipo Pascal (semplici algoritmi sugli interi, soluzione approssimata di equazioni, calcolo numerico di integrali,...) ma anche di calcolare in forma simbolica derivate e primitive, sviluppi di Taylor ed espressioni algebriche di varia complessità, ecc.

Il problema che si pone è: prima della disponibilità dei CAS venivano richieste come irrinunciabili alcune abilità manuali (ad esempio: saper calcolare le derivate delle funzioni composte mediante funzioni elementari); ora che disponiamo dei CAS in grado di svolgere i compiti a cui tali abilità erano deputate, dobbiamo ancora esigere dai nostri studenti il possesso delle stesse, oppure possiamo farne a meno?

C'è molta discussione su questo punto e francamente io non ho una risposta netta al riguardo. Forse il buon senso ci aiuterà a trovare un punto di equilibrio. Sarei propenso a rispondere sì alla domanda:

- è bene che uno studente sappia calcolare le derivate delle funzioni composte mediante funzioni elementari?

ma sarei incline a rispondere no alla domanda:

- è necessario che uno studente sia in grado di determinare le primitive di funzioni complicate (sempre che tali primitive siano esprimibili elementarmente)?

Sono abbastanza vecchio per ricordare che l'esame di Analisi 2 era largamente influenzato dall'abilità (o meno) dello studente nella determinazione delle primitive. Oggi una macchina che sta in un taschino sicuramente mi batte nella ricerca delle primitive.

Al di là dell'esempio, che può anche essere stato scelto in modo discutibile, resta il problema: quali abilità deve possedere un utente consapevole di un CAS per farne un uso produttivo?

Il dibattito è aperto e io non ho una risposta pronta; sarei incline a dire: un utente più colto, anche se tecnicamente meno abile. Non bisogna dimenticare che i CAS lavorano a livello *sintattico* e non *semantico*; per dirla in parole semplici, i CAS non sanno letteralmente quello che fanno. Prova ne sia che molti errori degli utenti principianti (e anche non principianti) dei sistemi CAS nascono dal fatto che occorre esplicitare tutte le informazioni.

Faccio un esempio forse un po' banale: se chiedo ad un mio studente di Ingegneria Elettronica o TLC: "quanto fa $\sin(n\pi)$?", con tutta probabilità, se è appena un po' bravo, mi risponde che fa 0, mentre un CAS mi rimbalza la domanda (cioè me la restituisce inalterata) a meno che io non sia in grado di dire al sistema che n è un intero.

Credo che il futuro stia in un uso ragionato di un linguaggio che consenta di fare al tempo stesso manipolazioni numeriche e simboliche (diciamo un'evoluzione dell'attuale linguaggio contenuto in DERIVE).

C'è molta resistenza nei confronti di un'evoluzione del tipo di quella che io auspico, per ragioni anche un po' filistee. È chiaro che non si possono più valutare gli studenti con i metri di un tempo, non si possono più dare gli stessi compiti in classe, non si possono proporre gli stessi scritti all'Esame di Stato, e cambiarli, cioè farne di nuovi che siano significativi, richiede fatica, fantasia, molto lavoro e qualche rischio. Molto più semplice restare nella tradizione.

2. Comunicazione visiva

Uno dei cambiamenti più notevoli portati dalla rivoluzione informatica è stata la possibilità di produrre immagini accurate e avvincenti e soprattutto immagini in movimento. Credo che una delle storie di successo di questi ultimi dieci anni sia stata l'introduzione dei micro-mondi geometrici, primo tra tutti Cabri-Géomètre. La stato dell'insegnamento della geometria nelle nostre scuole era (e temo ancora sia) molto deficitario: ebbene la novità portata dalla tecnologia che può consentire un'inversione di tendenza (e già l'ha prodotta, là dove ci sono insegnanti volonterosi e capaci) è proprio l'uso dei questi micromondi, che consentono di recuperare il movimento.

Questi sistemi consentono anche di recuperare l'aspetto algoritmico insito nella geometria euclidea, aspetto che sfugge in un contesto di insegnamento tradizionale.

Vorrei illustrare le possibilità offerte dalla comunicazione visiva con tre esempi.

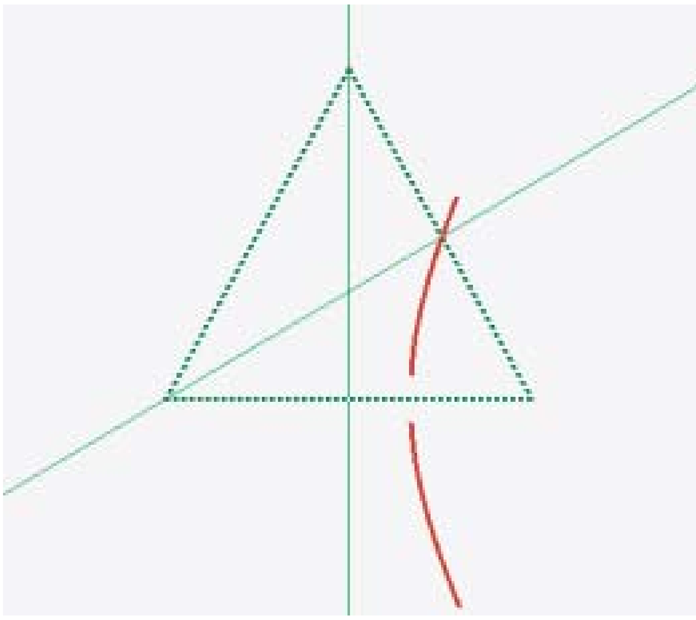
Esempio 1. Un problema sui triangoli isosceli

Consideriamo il seguente problema.

Dato un triangolo isoscele, si consideri l'intersezione tra la bisettrice di un angolo alla base e il lato opposto; se il vertice viene fatto scorrere lungo l'asse della base, qual è il luogo geometrico descritto dal punto d'intersezione considerato? In particolare: qual è la posizione limite assunta da tale punto quanto l'altezza tende a 0?

Utilizzando il software CABRI si ottiene una luogo geometrico del tipo mostrato nella figura a pagina seguente. Non è ben chiaro dove la curva descritta dal punto d'intersezione tagli la base del triangolo, anche perché il tracciamento del luogo in esame diventa incerto, in quanto esso è generato da due rette che s'intersecano formando un angolo molto piccolo.

Che tipo di curva sarà quella mostrata in figura? Prendendo un sistema di riferimento rispetto al quale gli estremi della base siano collocati nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e



scegliendo come parametro t la pendenza della bisettrice, si trova per il luogo in questione la rappresentazione seguente:

$$x = \frac{1+t^2}{3-t^2}, \qquad y = \frac{4t}{3-t^2}.$$

A questo punto occorre eliminare il parametro t, operazione non semplicissima da fare a mano. Ma il comando `Eliminate` di *Mathematica* ci aiuta al riguardo e ci fornisce l'equazione

$$1 + y^2 = 2x + 3x^2.$$

Si tratta di un'iperbole che incontra l'asse delle ascisse nei punti ascissa -1 e $1/3$. Più precisamente si tratta di un'iperbole con centro nel punto $(-1/3, 0)$ e distanza focale $2/3$.

Esempio 2. Le radici di un'equazione di secondo grado

Consideriamo l'equazione di secondo grado $z^2 + bz + 1 = 0$, con b parametro reale. A seconda dei valori di b tale equazione ammette due radici reali e distinte, una radice reale doppia, oppure due radici complesse coniugate. In ogni caso il prodotto delle radici vale 1, dunque se le radici sono complesse coniugate, esse sono entrambe di modulo unitario, in quanto $z\overline{z} = |z|^2 = 1$.

Dunque al variare di b tali radici o appartengono all'asse reale, oppure descrivono la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. L'animazione che alleghiamo mostra il valore di b mediante il segmento collocato in alto, e l'andamento delle radici nel piano complesso, al variare di b.

[Animazione 1. Fare clic sl riquadro]

Esempio 3. La funzione esponenziale in campo complesso

Si deve ad Eulero (1743) la scoperta che, se nella serie esponenziale di scrive formalmente iy al posto della variabile x, si trova

$$1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$$

dunque $\cos y + i \sin y$. Possiamo visualizzare una somma parziale di una serie a termini complessi rappresentando, uno di seguito all'altro, i segmenti che rappresentano i termini stessis. Si ottiene una poligonale nel piano complesso e la convergenza della serie significa che tale poligonale si "stringe" su un punto limite, che rappresenta la somma della serie. Nel caso in esame, questo punto limite appartiene alla circonferenza unitaria.

Non è difficile costruire un'animazione in cui tutto ciò viene mostrato al variare di y nell'intervallo $[0, \pi]$ e dunque la somma della serie descrive la semicirconferenza di raggio unitario contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Per $y = \pi$ si ottiene la celeberrima relazione $e^{i\pi} + 1 = 0$ che lega le cinque costanti più importanti della Matematica.

[Animazione 2. Fare clic sul riquadro]

3. Internet e didattica della Matematica

Recentemente si è avuta un'esplosione di siti per la didattica della Matematica: anche troppi (compreso il mio) e non più gestibili in modo artigianale.

Segnalo alcuni siti, di preferenza italiani:

- Il sito gestito da G.Gazzaniga:

  `http://dragon.ian.pv.cnr.it/~gianna/sitiwww.html`
- il sito dell'Università Bocconi:

  `http://matematica.uni-bocconi.it`
- il sito del progetto Ulisse della SISSA di Trieste:

  `http://ulisse.sissa.it`
- il sito del progetto *Polymath* del Politecnico di Torino:

  `http://www.polito.it/polymath`
- il sito del progetto Fardiconto dell'IRRE (ex IRRSAE) Emilia Romagna:

  `http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto`
- il sito del progetto di Perugia (Brandi, Salvadori):

  `http://www.innovamatica.it/`
- il sito del progetto di Trento:

  `http://www.science.unitn.it/orientamat/`

... e tanti altri (chiedo venia per le omissioni).

Molti hanno messo in rete i propri materiali didattici; tutto bene, se la finalità è quella di fornire agli studenti materiali meno incerti degli appunti presi dagli studenti stessi. Forse il docente di scuola secondaria amerebbe frequentare siti in cui ci sia un minimo di controllo, un po' come accade per le riviste, e non soltanto curiosare tra i materiali prodotti dai colleghi. Anche qui il tempo del fai da te sta passando rapidamente.

Vorrei fare un esempio di integrazione tra Internet e comunicazione visiva: il sito di D. Joyce sugli *Elementi* di Euclide:

- `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html`

in cui le figure che illustrano le singole proposizioni sono fornite in Java, e come tali possono essere animate dall'utente.

4. Conclusione

Quale conclusione? Nessuna conclusione: difficile giudicare il corso di un fiume mentre ci si sta nuotando dentro. Come spesso accade la tecnologia non è, di per sé, né buona né cattiva; tutto dipende dall'uso che se ne fa. Io sono fermamente convinto che se ne possa fare un buon uso e ho cercato di mostrarlo.

Terminerò con le parole di Amleto:

There is nothing either good or bad,
but thinking makes it so.

Milano, 17 aprile 2002