ORIENTAMATICA a.a. 2017/18
16 marzo 2018

Matematica per l’esame: quesiti e problemi - 2

Maria Grazia Grandi

Le funzioni e i loro grafici

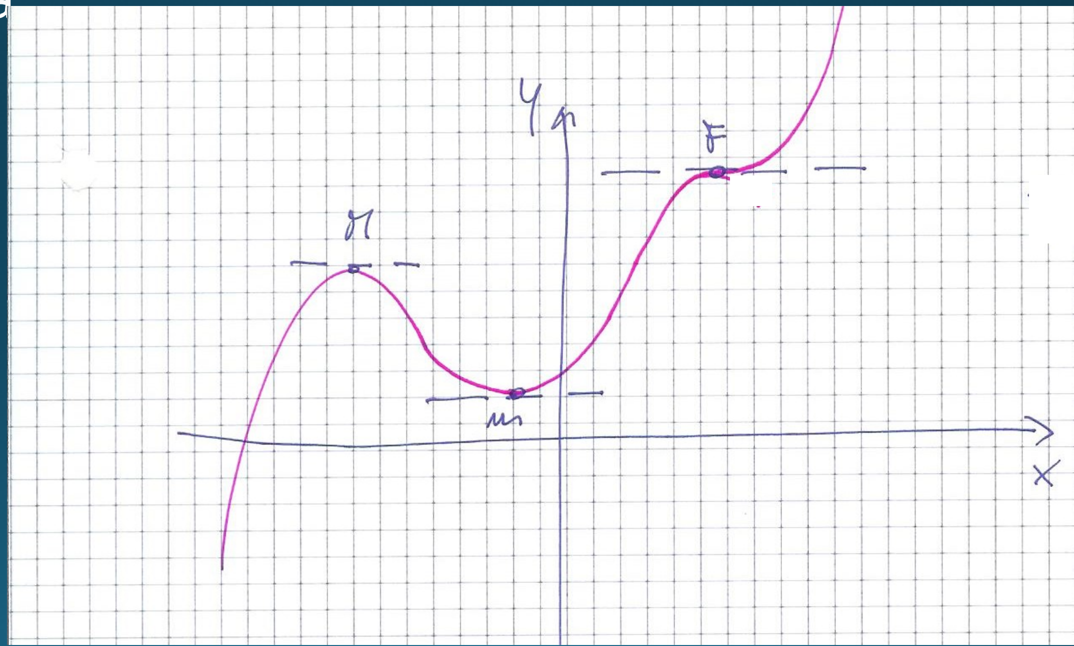
Maria Grazia Grandi

Punti stazionari

Condizione necessaria:

I punti di massimo o di minimo relativo o di flesso orizzontale in cui si annulla la derivata prima

$$f'(c) = 0$$

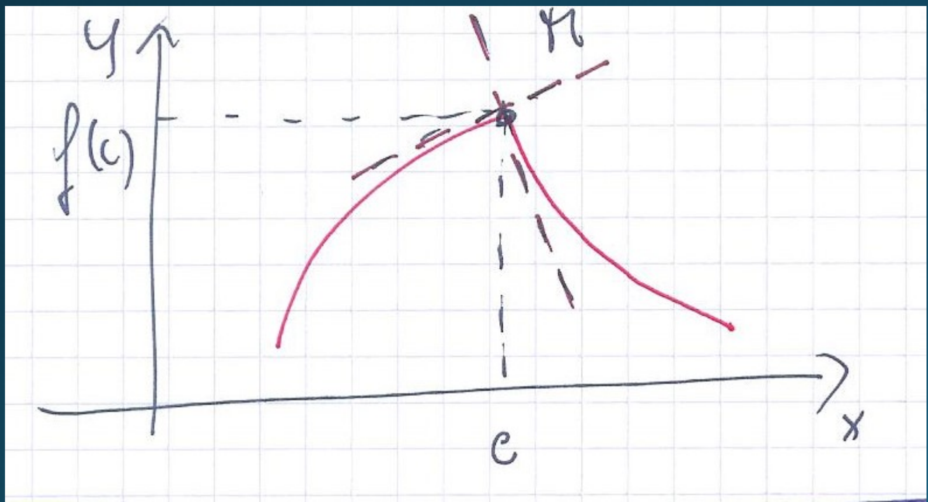


E non solo…

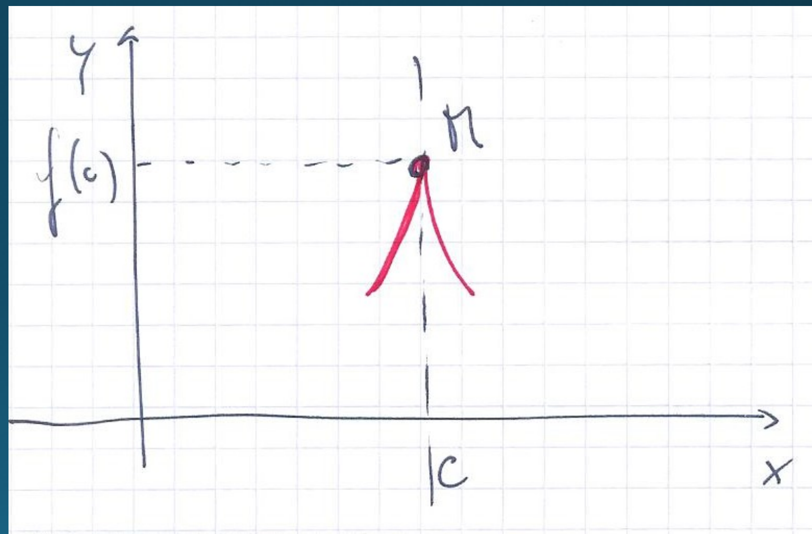
Se la funzione fosse definita in un intervallo chiuso e limitato

Punti di non derivabilità:
x = c punto di massimo relativo

Punto angoloso

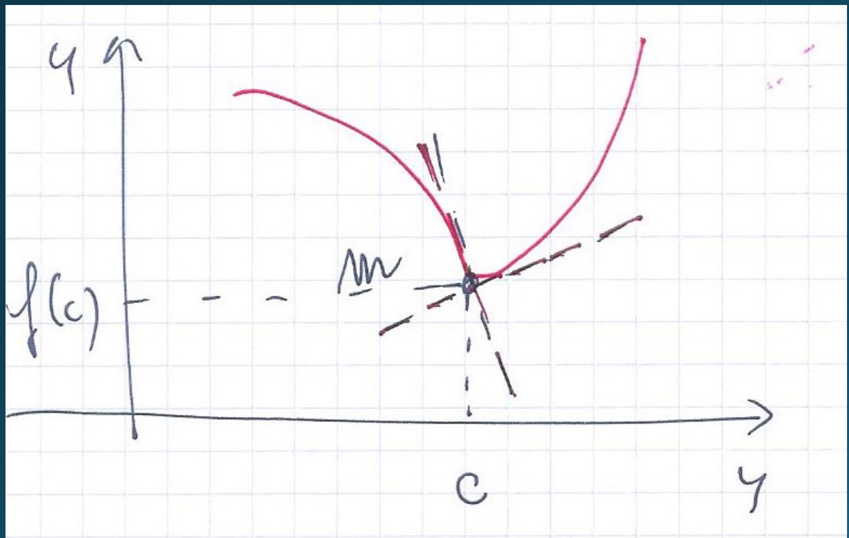


Cuspide

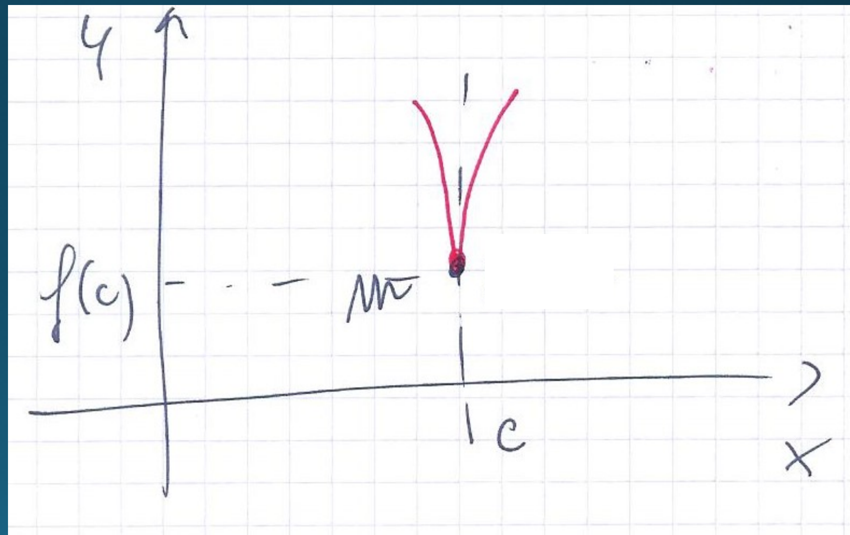


Punti di non derivabilità:
x = c   punto di minimo relativo

Punto angoloso



Cuspide



Maria Grazia Grandi

La derivata prima di una funzione

Date due qualsiasi grandezze x e y,

si definisce derivata prima di una funzione y = f(x)

nel punto x

il limite, se esiste finito

per Δx che tende a zero, del rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

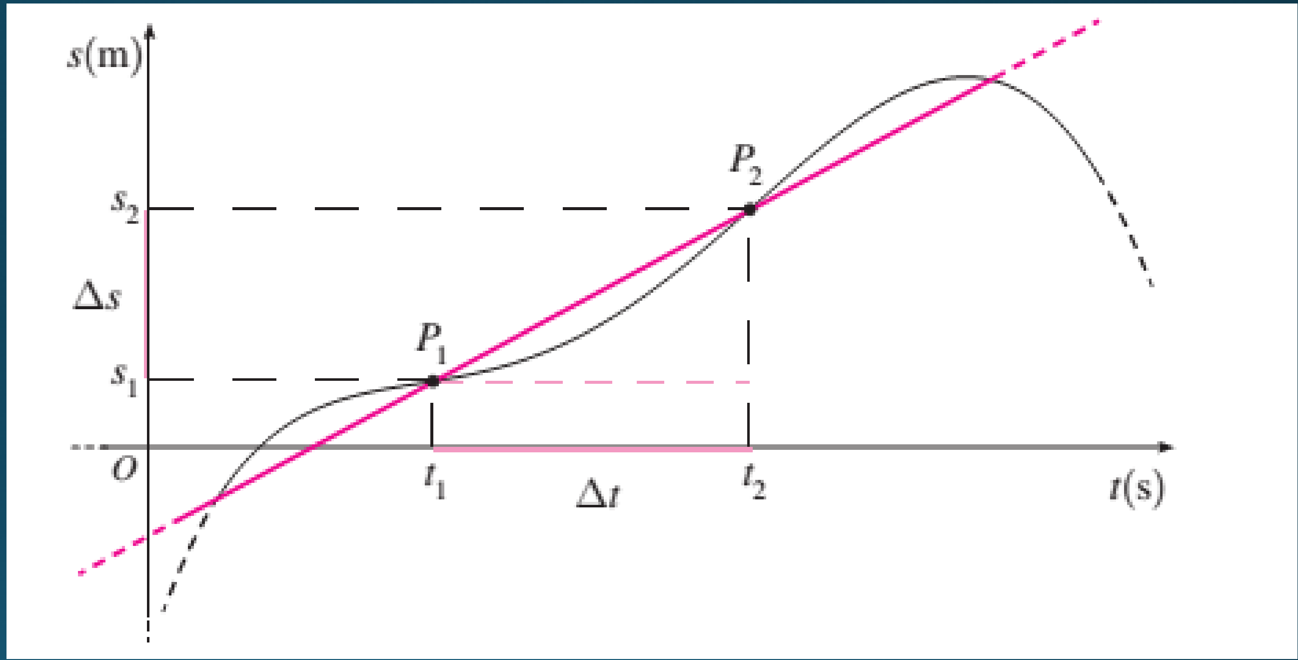
Il rapporto incrementale: la velocità media

Data la funzione s = s(t)

In fisica è la legge oraria

- $\Delta s = s_2 - s_1$
- $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



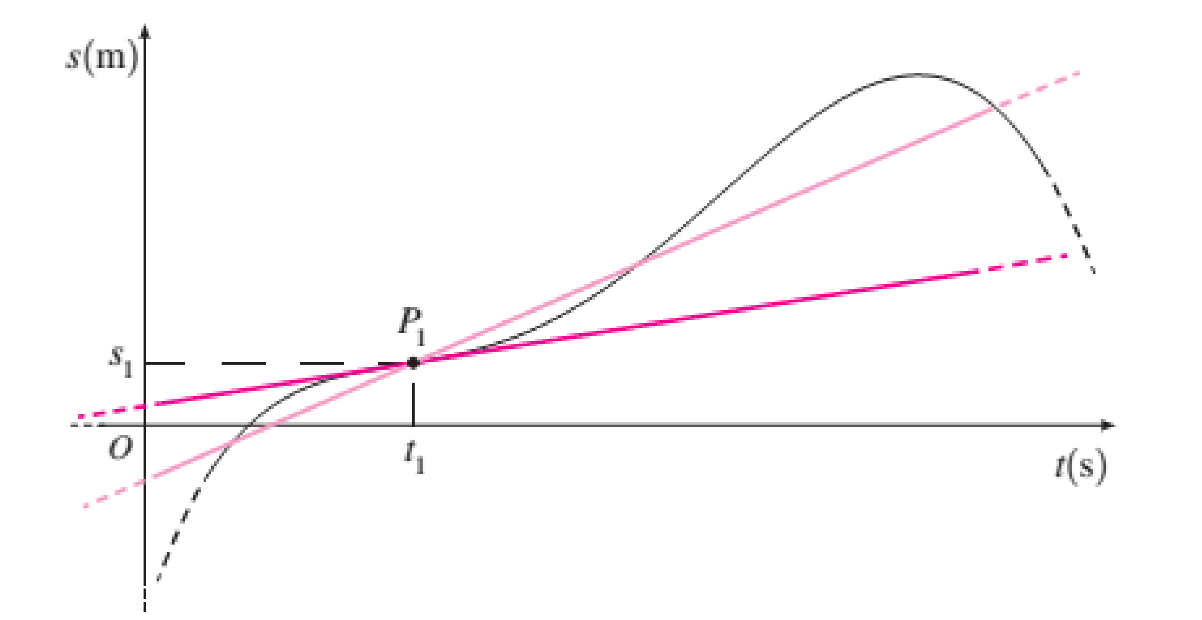
Il coefficiente angolare della retta rappresenta la velocità media di un punto materiale nell'intervallo di tempo Δt

Il coefficiente angolare

Se si riduce l'intervallo di tempo fino a farlo diventare prossimo a zero, ma non zero

La retta congiungente i due punti da retta secante diventa al limite la retta tangente alla curva s(t) nell'istante t_1

La velocità istantanea, v_i, è il limite (se esiste finito), per Δt che tende a zero, del rapporto incrementale $\Delta s/\Delta t$, ovvero della velocità media



$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

$$v_i = \frac{ds}{dt}$$

La derivata: infinite applicazioni!

Valori medi	Valori istantanei	Simbolo della derivata prima
$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$	$v_i = \frac{ds}{dt}$
$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$	$a_i = \frac{dv}{dt}$
$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$F_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$	$F_i = \frac{dp}{dt}$
$\bar{i} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	$i_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$	$i_i = \frac{dq}{dt}$
$\overline{f.e.m._i} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$	$f.e.m._i = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}\right) = \Phi'(t)$	$f.e.m_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

La derivata seconda

La velocità all'istante t è la derivata prima della posizione s = s(t)

$$v(t) = s'(t)$$

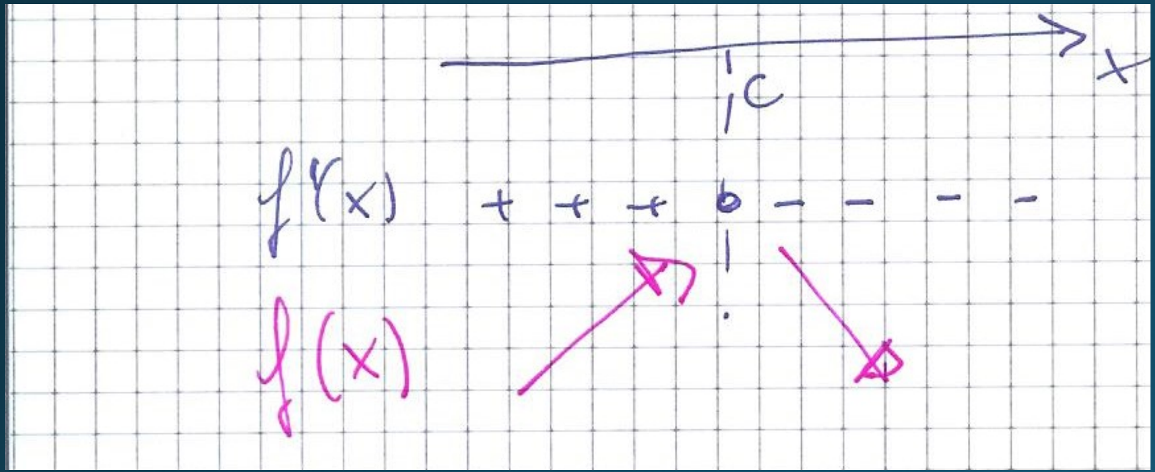
L'accelerazione istantanea è la derivata della derivata prima della posizione s(t) ovvero è la derivata seconda della legge oraria s(t):

$$a_i(t) = v'(t) = s''(t)$$

Si scrive:

$$a_i = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

Il segno della derivata prima



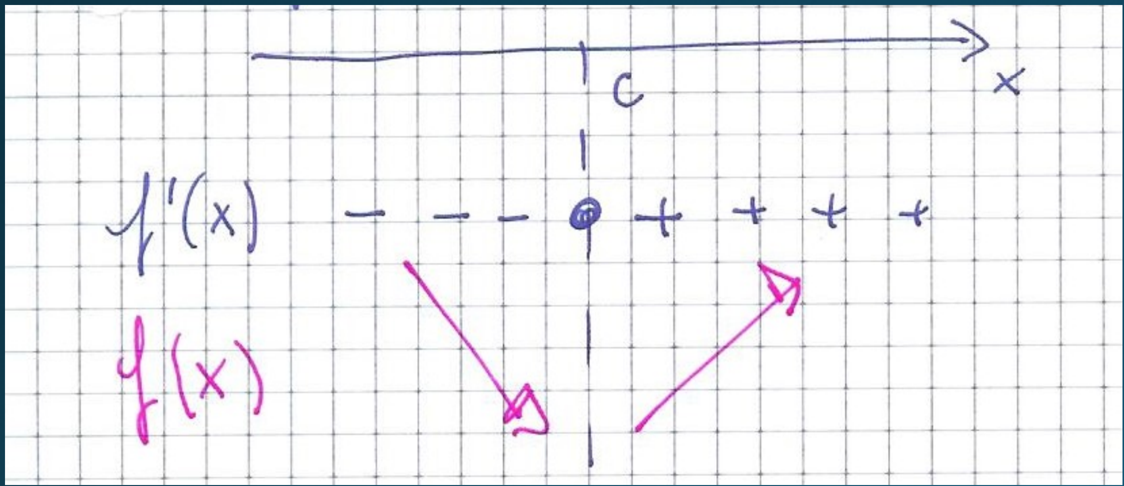
CNS

$x = c$

punto di massimo relativo

f(c) è il massimo relativo

Il segno della derivata prima



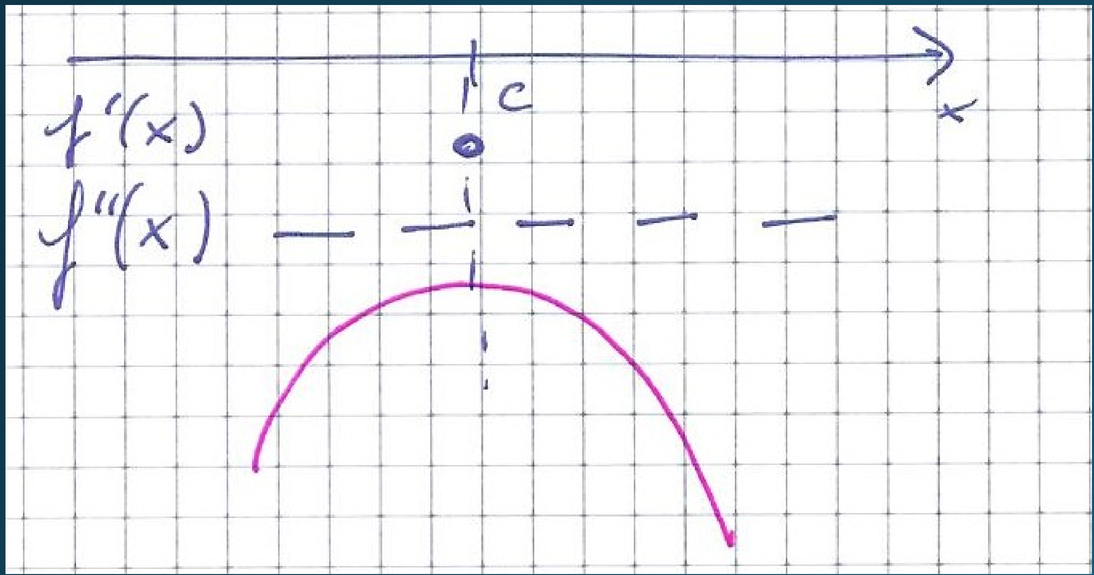
CNS

$x = c$

punto di minimo relativo

f(c) è il minimo relativo

Il segno della derivata seconda



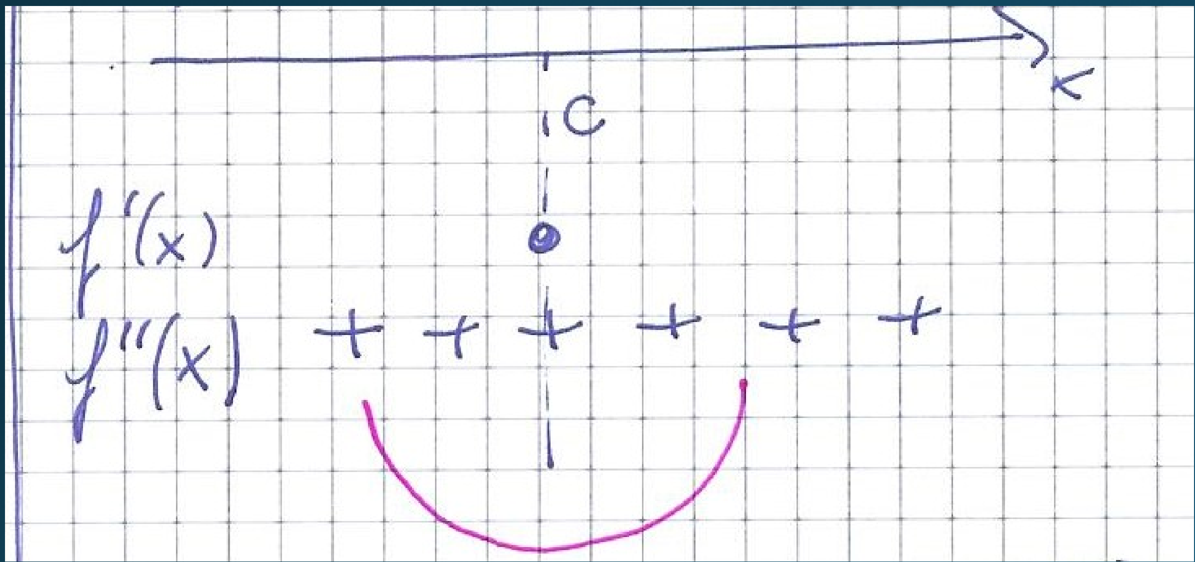
CNS

x = c

punto di massimo relativo

f(c) è il massimo relativo

Il segno della derivata seconda



CNS

x = c

punto di minimo relativo

f(c) è il minimo relativo

Maria Grazia Grandi

La concavità

Se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$

allora $f'(x)$ è una funzione monotòna *crescente* nell'intervallo *I*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 < \alpha_2$$

allora $f(x)$ è concava verso l'alto nell'intervallo *I*

Se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$

allora $f'(x)$ è una funzione monotòna *decrescente* nell'intervallo *I*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

allora $f(x)$ è concava verso il basso nell'intervallo *I*

I flessi ascendenti o discendenti

Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

allora $f(x)$ è una funzione monotòna *crescente* nell'intervallo *I*

Sia F un flesso

Si ha un Flesso ascendente quando f > t nell'intorno destro di c (e viceversa)

Si ha un Flesso discendente quando f < t nell'intorno destro di c (e viceversa)

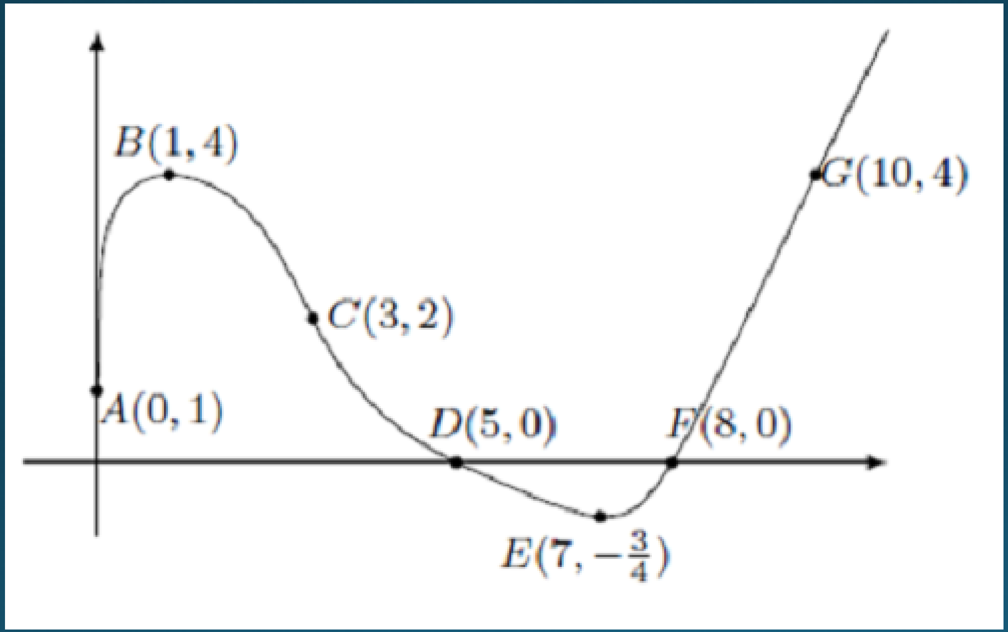
Quali informazioni si possono ricavare sui grafici della derivata prima e della derivata seconda nell'intorno di x = c ?

I Quesiti di un Problema

Maria Grazia Grandi

NES 2016 – Problema 2

Nella figura è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f\colon\ [0,+\infty) \to R$, derivabile in $(0,+\infty)$ e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.



È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$

NES 2016 – Problema 2

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G.
Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco ABCD, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$, $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta indicativamente i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |\, f'(x) \,|$$

$$y = |\, f(x) \,|\,'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

Specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0\,,8\,]$, il valore medio $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1\,,7\,]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9\,,10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascissa 0 e 8, motivando le risposte.

Soluzioni delle prove dell'Esame di Stato

http://matematica.unibocconi.it/articoli/
esame-di-stato-20xx-la-prova-di-matematica

Per un ripasso sui metodi matematici per

Prepararsi alla seconda prova scritta di fisica e matematica del Liceo scientifico

Maria Grazia Grandi

Ed. ETAS Rizzoli, 2015