PREMESSA

In questo capitolo analizzeremo le funzioni elementari e quelle derivanti da queste tramite l'applicazione di semplici trasformazioni.

Ricorderemo dunque le seguenti tipologie:
- funzioni potenza;
- altre funzioni elementari (esponenziali, logaritmiche, goniometriche, valore assoluto e segno);
- trasformazioni geometriche (traslazione, prodotto per uno scalare, …);

e per ciascuna forniremo degli esempi. Al termine, come per tutti i capitoli, gli esercizi svolti, gli esercizi particolari e quelli proposti.

FUNZIONI POTENZA

Si intende per funzione potenza una funzione del tipo $y = x^{\alpha}$ con $\alpha \in R$.
Ricordiamo che per $\alpha = 0$ la funzione diventa $y = 1$.

Se α è un intero naturale $\alpha = n \in N$ la funzione è del tipo $y = x^n$. Analizziamo al variare di n intero positivo i grafici corrispondenti a tali funzioni.
Ricordiamo che:
- se n è pari la funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y e nel punto (0,0) l'asse delle x è tangente al grafico della funzione;
- se n è dispari la funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine e nel punto (0,0) l'asse delle x è tangente al grafico della funzione (ad esclusione del caso $n = 1$, che corrisponde all'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante).

Se α è un intero negativo la funzione è del tipo $y = x^{-n}$ con $n \in N$. La funzione può essere riscritta come $y = \frac{1}{x^n}$ (reciproche di funzioni potenza a esponente intero naturale $n \in N$) ovviamente il dominio sarà $R - \{0\}$. Analizziamo al variare di n i corrispondenti grafici.
Ricordiamo che anche in questo caso:
- se n è pari la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y;
- se n è dispari la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Se $\alpha = \frac{m}{n}$ con m, n naturali e primi tra loro e ovviamente $n \neq 0$, la funzione è del tipo $y = x^{\frac{m}{n}}$ (funzioni potenza con esponente razionale). Analizziamo al variare di m e n i grafici corrispondenti a tali funzioni.

Ricordiamo che:

- se n è pari y esiste solo per $x \geq 0$;
- se n è dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$.

Nel caso n dispari, se m è pari la funzione è pari, se m è dispari la funzione è dispari. Inoltre, se $\frac{m}{n} > 1$ nel punto (0,0) la curva è tangente all'asse delle ascisse (cioè la tangente alla curva è orizzontale), se $\frac{m}{n} < 1$ nel punto (0,0) la curva è tangente all'asse delle ordinate (cioè la tangente alla curva è verticale).

Infine, per completare l'argomento, la generica funzione $y = x^{\alpha}$ con α irrazionale, esiste per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, esiste per $x > 0$ se $\alpha < 0$.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

1) $y = x^2$;

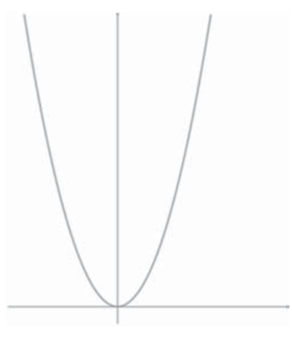
2) $y = x^4$;

3) $y = x$;

4) $y = x^3$.

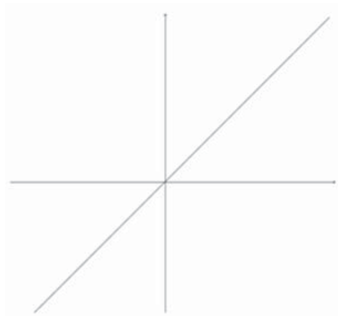
SOLUZIONI

1) La funzione è pari, il dominio coincide con R e l'insieme delle immagini è l'intervallo $[0, +\infty)$. Inoltre in (0,0) la curva è tangente all'asse delle x (la retta tangente nell'origine è orizzontale).

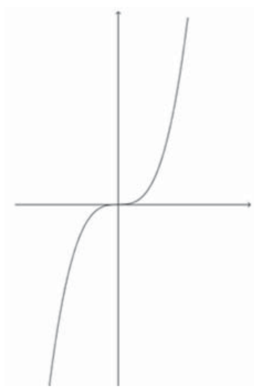


2) Allo stesso modo e con analoghe considerazioni il grafico è il seguente:

3) La funzione è dispari, il dominio e l'insieme delle immagini coincidono con *R*.



4) Allo stesso modo e con analoghe considerazioni il grafico è il seguente:



Notiamo che in (0,0) la curva è tangente all'asse delle x (la retta tangente nell'origine è orizzontale).

ESEMPIO 2

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

1) $y = \frac{1}{x^2}$;

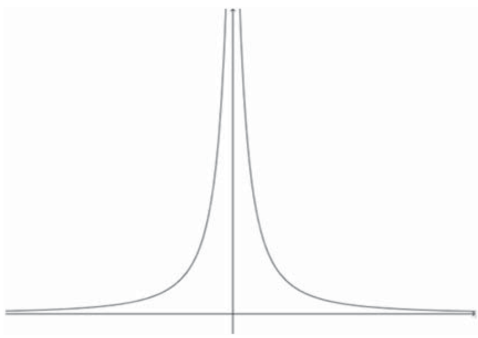
2) $y = \frac{1}{x^6}$;

3) $y = \frac{1}{x}$;

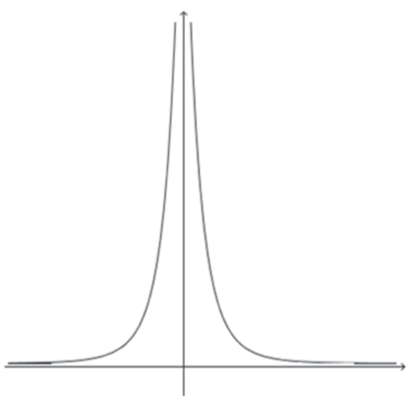
4) $y = \frac{1}{x^3}$.

SOLUZIONI

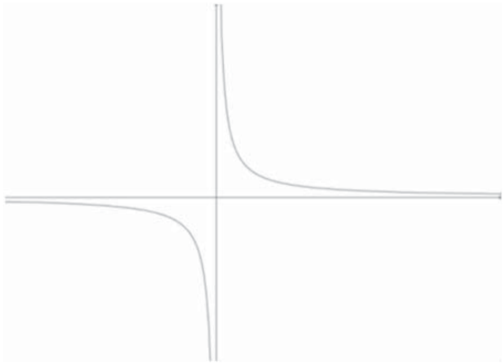
1) La funzione è pari, il dominio coincide con $R - \{0\}$, mentre l'insieme delle immagini è $(0, +\infty)$.



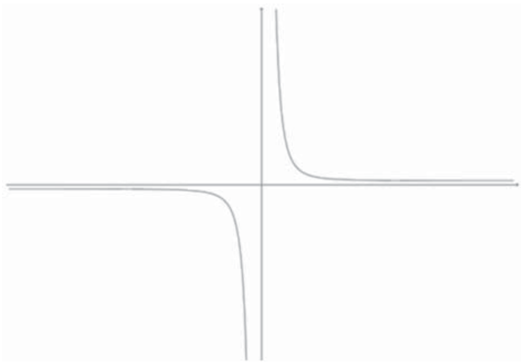
2) Analogamente alla funzione precedente, la funzione $y = \frac{1}{x^6}$ è pari, il dominio coincide con $R - \{0\}$, mentre l'insieme delle immagini è $(0, +\infty)$:



3) La funzione è dispari, il dominio e l'insieme delle immagini coincidono con $R - \{0\}$.



4) Analogamente, $y = \dfrac{1}{x^3}$ è dispari, il dominio e l'insieme delle immagini coincidono con $R - \{0\}$:



ESEMPIO 3

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$;

2) $y = x^{\frac{5}{3}}$;

3) $y = x^{\frac{4}{3}}$;

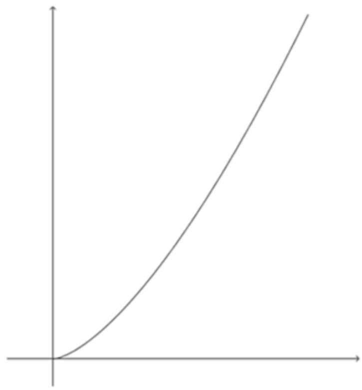
4) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

5) $y = x^{\frac{1}{5}}$;

6) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

SOLUZIONI

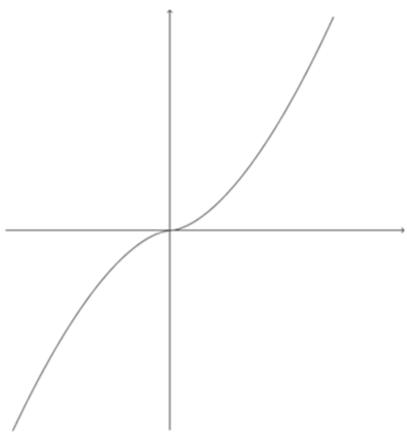
1) essendo il denominatore dell'esponente pari la funzione esiste solo per $x \geq 0$; essendo $\frac{3}{2} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *x* e il grafico è il seguente:



Il dominio coincide con l'intervallo $[0, +\infty)$.

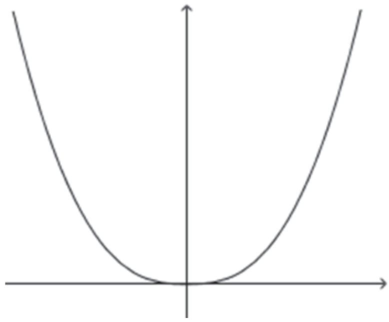
L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

2) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente dispari la funzione è dispari, inoltre poiché $\frac{5}{3} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *x*; il grafico è il seguente:



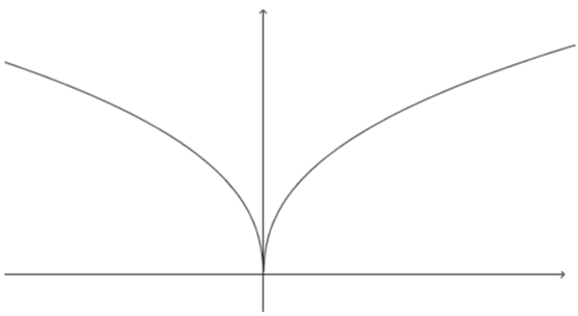
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini coincide con *R*.

3) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente pari la funzione è pari e inoltre poiché $\frac{4}{3} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *x*; il grafico è il seguente:



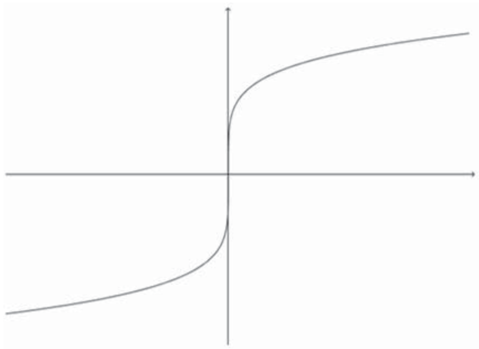
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

4) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente pari la funzione è pari, inoltre essendo $\frac{2}{3} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*. Il grafico è il seguente:



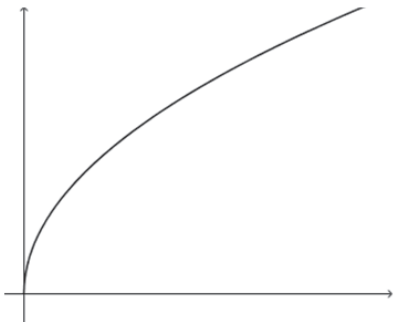
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

5) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente dispari la funzione è dispari, inoltre poiché $\frac{1}{5} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*. Il grafico è il seguente:



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'insieme *R*.

6) essendo il denominatore dell'esponente pari la funzione esiste per ogni $x \geq 0$, essendo $\frac{1}{2} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*; il grafico è il seguente:



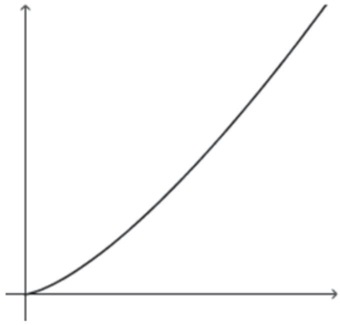
Il dominio è l'intervallo $[0, +\infty)$.

L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

ESEMPIO 4

Rappresentare il grafico della funzione $y = x^{\sqrt{2}}$, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini.

Poiché $\sqrt{2}$ è positivo la funzione esiste per $x \geq 0$, essendo $\sqrt{2} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle ascisse. Il grafico è il seguente:

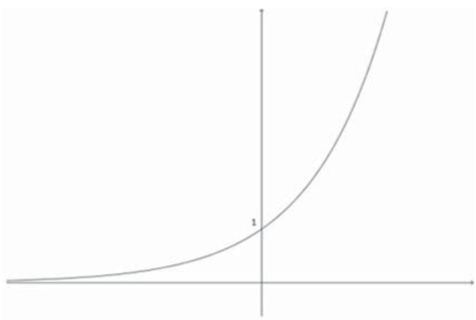


ALTRE FUNZIONI ELEMENTARI

Ricordiamo i grafici e le relative caratteristiche delle altre funzioni elementari.

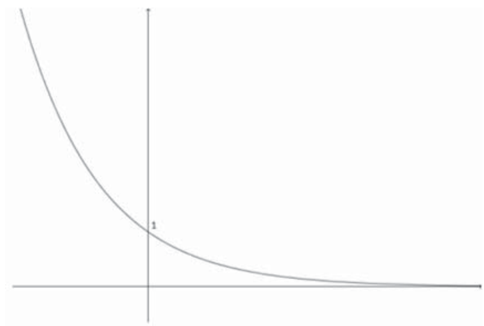
Funzione esponenziale
Sono funzioni aventi equazione $y = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.
Distinguiamo le due tipologie:

$y = a^x$ con $a > 1$



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'intervallo $(0, +\infty)$.

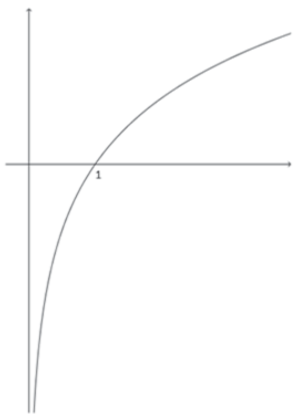
$y = a^x$ con $0 < a < 1$



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'intervallo $(0, +\infty)$.

Funzioni logaritmiche
Sono funzioni aventi equazione $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.
Distinguiamo le due tipologie:

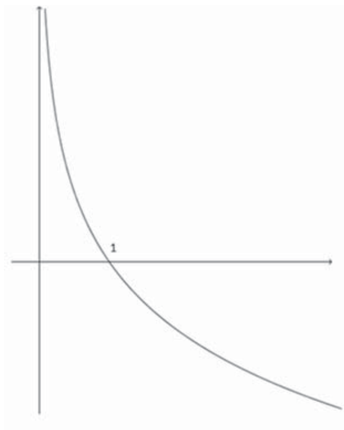
$y = \log_a x$ con $a > 1$



Il dominio coincide con l'intervallo $(0, +\infty)$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

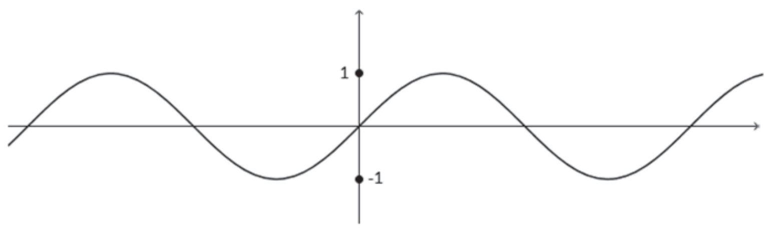


Il dominio coincide con l'intervallo $(0, +\infty)$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

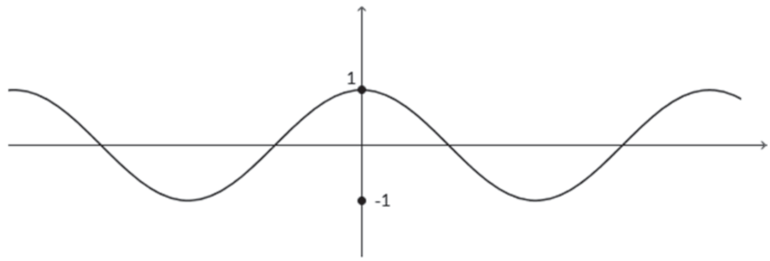
Funzioni goniometriche
Ricordiamo le funzioni goniometriche:

$y = \sin(x)$, funzione periodica di periodo 2π.



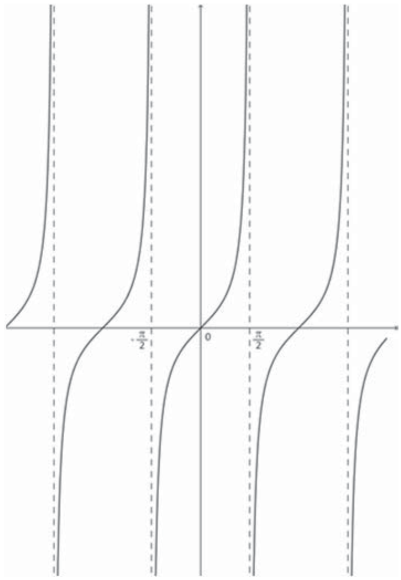
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con $[-1, 1]$.

$y = \cos x$, funzione periodica di periodo 2π.



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con $[-1, 1]$.

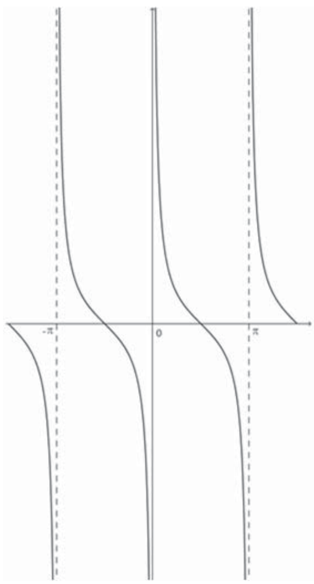
$y = \tan x$, funzione periodica di periodo π.



Il dominio coincide con l'insieme $\{x \in R: \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z\}$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

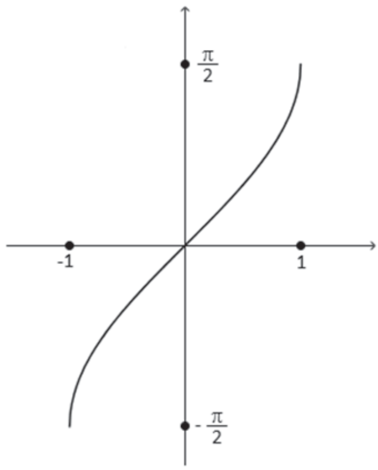
$y = \text{cotg}\ x$, funzione periodica di periodo π.



Il dominio coincide con l'insieme $\{x \in R: \ x \neq k\pi, \ k \in Z\}$.
L'insieme delle immagini coincide con *R*.

Ricordiamo anche le seguenti funzioni inverse di alcune funzioni goniometriche.

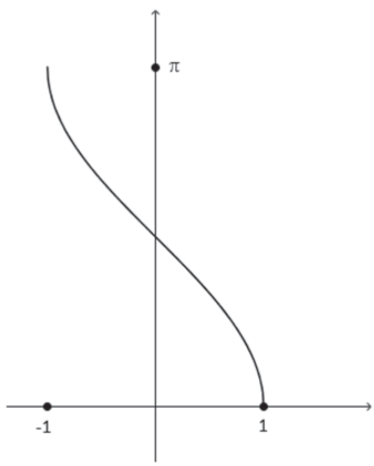
$y = \arcsin x$



Il dominio coincide con l'intervallo $[-1, 1]$.

L'insieme delle immagini con $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

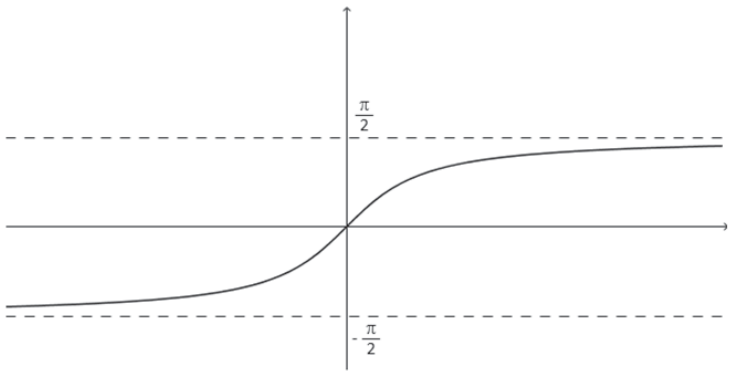
$y = \arccos x$



Il dominio coincide con l'intervallo $[-1, 1]$.

L'insieme delle immagini con $[0, \pi]$.

$y = \arctan x$



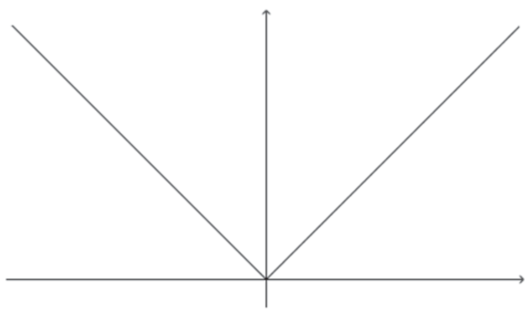
Il dominio coincide con l'insieme *R*.

L'insieme delle immagini è l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto di x è la seguente:

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



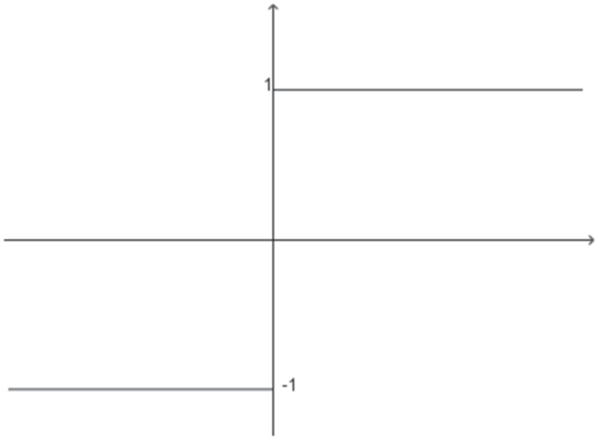
Il dominio coincide con l'insieme *R*.

L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

Funzione segno

La funzione segno è:

$$y = sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Il dominio è: $R-\{0\}$.

Insieme delle immagini è l'insieme contenente solo i due valori $\{-1,1\}$.

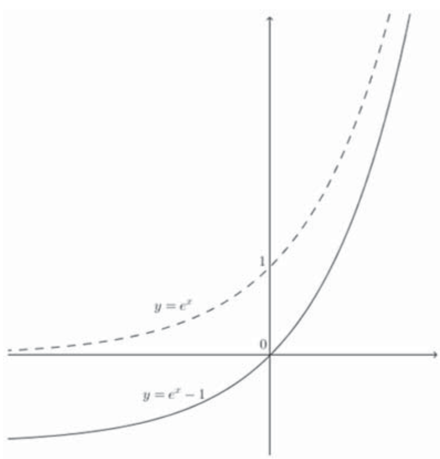
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Traslazione sull'asse delle y: $f(x)+k$

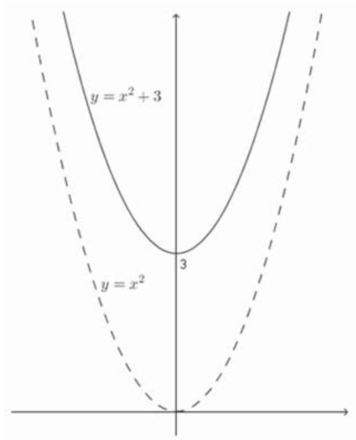
Il grafico si ottiene traslando il grafico della funzione f verso l'alto di k unità se $k>0$, verso il basso se $k<0$.

ESEMPI

1) $y=e^{x}-1$



2) $y = x^2 + 3$

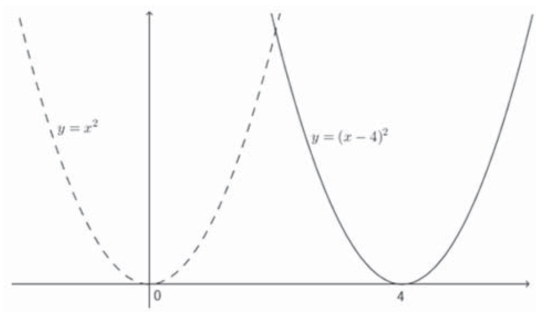


Traslazione sull'asse delle x: $f(x+k)$

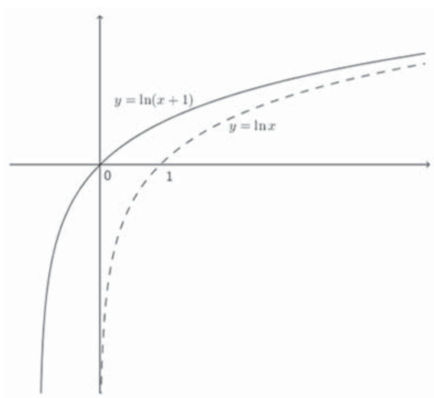
Il grafico si ottiene traslando il grafico della funzione *f* orizzontalmente di *k* unità, a sinistra se $k > 0$, a destra se $k < 0$.

ESEMPI

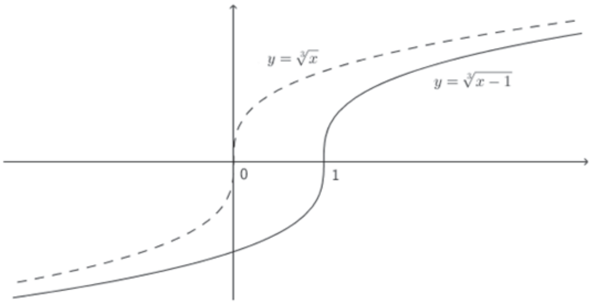
1) $y = (x-4)^2$



2) $y = \ln(x+1)$



3) $y = \sqrt[3]{x-1}$

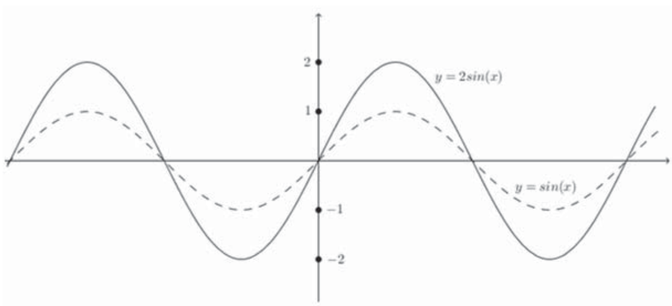


Prodotto di una funzione per uno scalare: $k \cdot f(x)$

Le ordinate di $f(x)$ risultano moltiplicate per *k*. Se $k > 1$ le ordinate aumentano e quindi il grafico si allunga, se $0 < k < 1$ le ordinate diminuiscono e il grafico si abbassa. I punti la cui ordinata vale zero rimangono invariati (punti fissi). Se si moltiplica per un valore di *k* negativo il grafico, oltre alle precedenti trasformazioni, viene anche ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

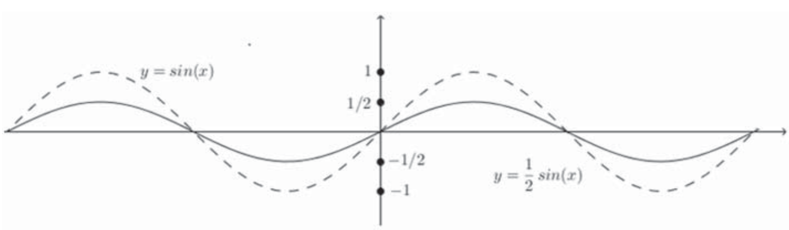
ESEMPI

1) $y = 2 \sin x$



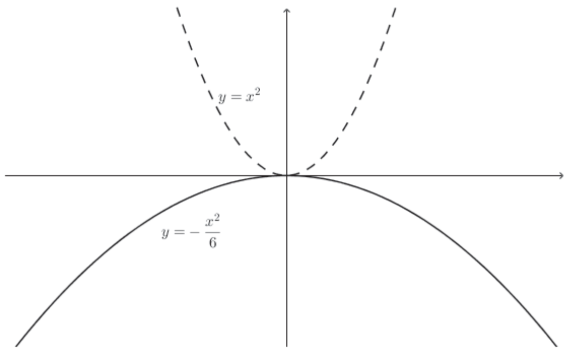
Osserviamo che in questo caso il periodo della funzione è sempre 2π, mentre l'insieme delle immagini è l'intervallo $[-2, 2]$.

2) $y = \frac{1}{2} \sin x$



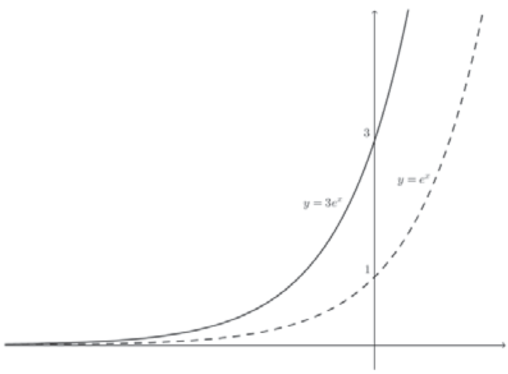
Osserviamo che in questo caso il periodo della funzione è ancora 2π mentre l'insieme delle immagini è l'intervallo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

3) $y=-\frac{1}{6}x^2$



In questo caso le ordinate si sono abbassate e hanno cambiato segno.

4) $y=3e^x$



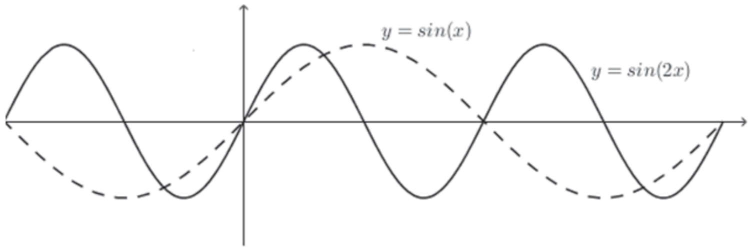
In quest'ultimo caso le ordinate sono moltiplicate per tre e il grafico si è alzato.

Dilatazione e contrazione: $f(k\cdot x)$

Le ascisse del dominio della funzione risultano moltiplicate per *k*. Se $k>1$ si ha una contrazione del grafico, se $0<k<1$ si ha una dilatazione. Inoltre se si moltiplica per un valore di *k* negativo il grafico viene ribaltato rispetto all'asse delle ordinate.

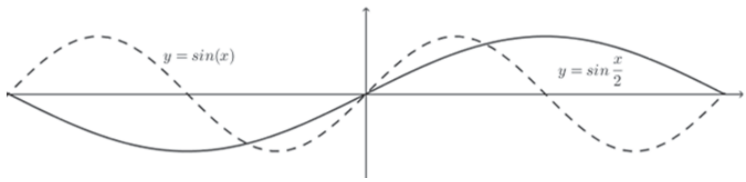
ESEMPI

1) $y=\sin 2x$



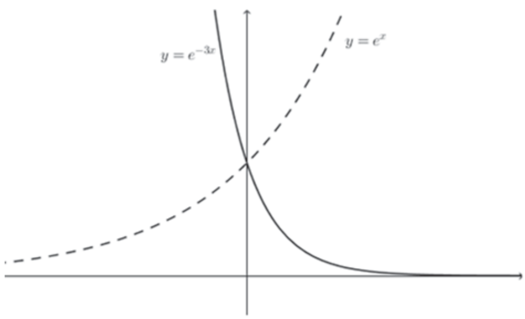
In questo caso il periodo della funzione è dimezzato (in quanto risulta $\frac{2\pi}{k}$ con $k = 2$), quindi vale π.

2) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$



Per il motivo appena detto, osserviamo che in questo caso il periodo della funzione raddoppia e vale 4π.

3) $y = e^{-3x}$



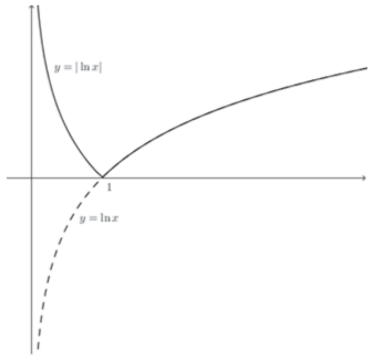
Valore assoluto di una funzione: $|f(x)|$

Il valore assoluto applicato a una funzione la rende sempre maggiore o uguale a zero.

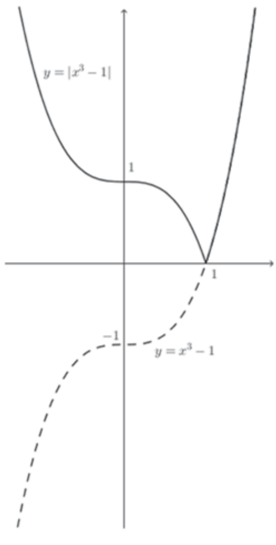
Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando al di sopra dell'asse delle ascisse le parti del grafico di $f(x)$ che si trovano al di sotto (si osservi che le intersezioni con l'asse delle ascisse e le parti di grafico che inizialmente erano posizionate al di sopra dell'asse delle x restano invariate).

ESEMPI

1) $y = |\ln x|$

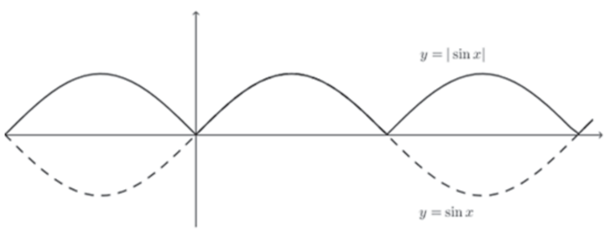


2) $y = \left|x^3 - 1\right|$



È opportuno notare che nei punti in cui l'argomento del modulo si annulla e cambia segno (ovvero quelli in cui avviene il ribaltamento al di sopra dell'asse delle ascisse) si presentano delle forme che poi saranno analizzate durante lo studio della relativa funzione.

3) $y = |\sin x|$



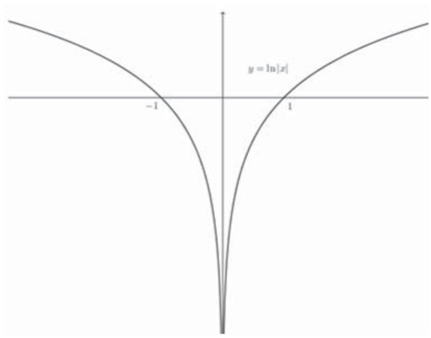
In quest'ultimo caso il valore assoluto modifica la periodicità della funzione, infatti il periodo diventa π.

Valore assoluto della variabile indipendente di una funzione: $f(|x|)$

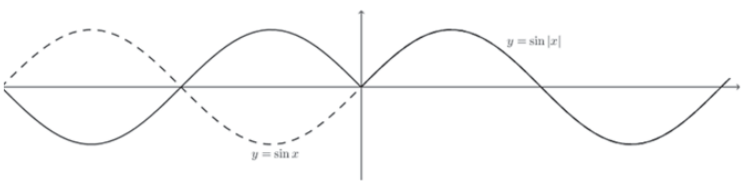
Il grafico si ottiene tenendo inalterate le parti del grafico che si trovano nel semipiano delle ascisse positive e ribaltandole, rispetto all'asse delle y, nel semipiano delle ascisse negative. La funzione così ottenuta sarà simmetrica rispetto all'asse y e dunque pari.

ESEMPI

1) $y = \ln|x|$



2) $y = \sin|x|$



Si noti che in questo caso la funzione non risulta più periodica!

3) $y = \sqrt{|x|}$