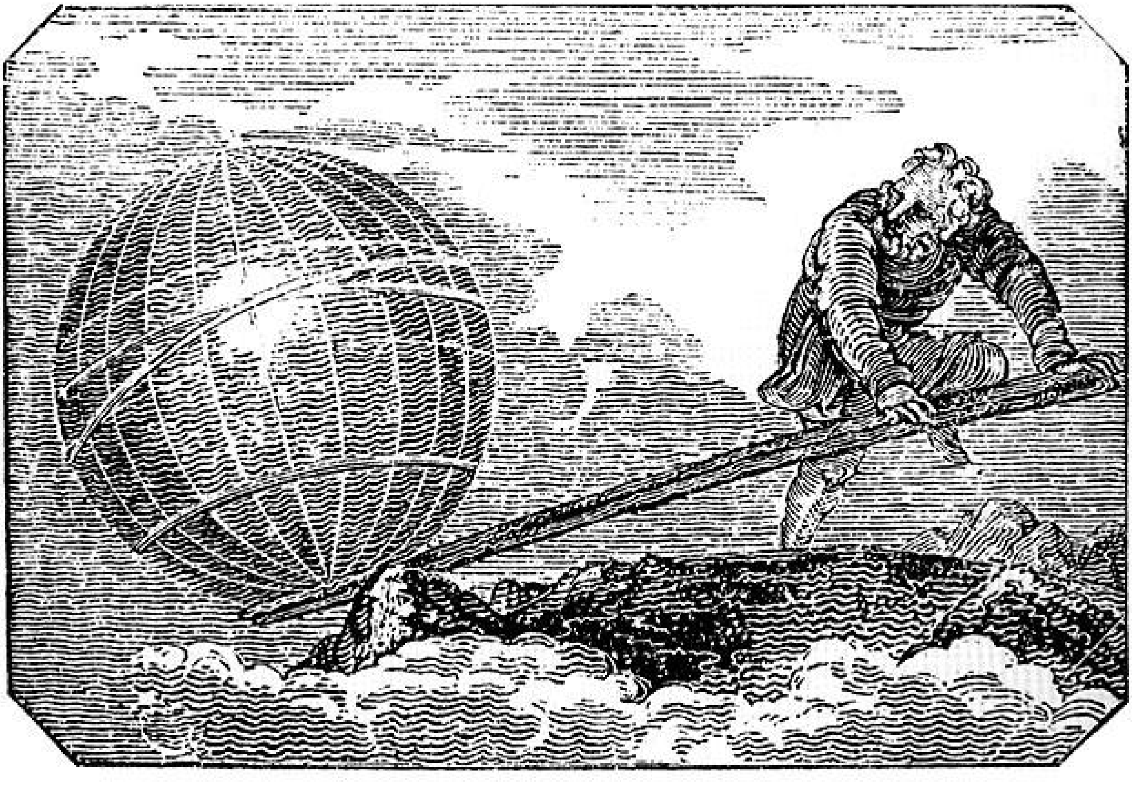
LO *PSAMMITES* DI ARCHIMEDE E LA TRADIZIONE DI PENSIERO ITALICA DELLA SCIENZA

Un’opera italica e illuministica

Giuseppe Boscarino

gpp.bos@libero.it;

www.lascuolaitalica.it



$$N(Sfera_{sabbia}) = N(Sfera_{stellefisse}) < 10^{63}$$

Abstract

Si intende confutare l'opinione di un Archimede, platonico, attraverso lo studio delle tesi fondamentali del suo *Arenario (Psammites)* e di suoi particolari aspetti logico-linguistici, ma soprattutto di un Archimede aristotelico, come sostiene P. Delsedine nel suo articolo *L'infini numérique dans l'Arénaire d'Archimède*. Egli scrive: L'*Arenario* "*répond à la nécessitè d'adapter la notation numérique à l'idée de l'infinité potentielle de l'ensamble des nombres naturales*".

Dapprima ci si sofferma sugli aspetti generali dell'opera che ne mettono in luce il suo carattere illuministico e pitagorico-democriteo, quindi si passa all'analisi di suoi particolari aspetti logico-linguistici e delle tesi fondamentali, tradotte in forma simbolica, in cui ancora se ne mette in evidenza il suo carattere pitagorico-democriteo o italico.

Nella **Sinossi** si danno in forma simbolica le procedure matematiche dell'opera.

Key words: *Apeiron* (non-finito), *meghetos* (grandezza), n*aritmos* (il numero in sé), *monas* (l'idea di uno = *ιuno* [iota uno] = *autò to en* = il numero stesso = l'uno in quanto uno), *pletos* (molteplicità o il numero della molteplicità). Tradizione pitagorico-democritea o italica di pensiero e tradizione platonico-aristotelica o ionica di pensiero.

1. INTRODUZIONE

L'*Arenario* è opera di matematica,se si vuole di aritmetica, ma anche di astronomia, di fisica, fonte di importanti e preziose notizie storiche nel campo della storia delle scienze, in particolare dell'astronomia, della matematica e della tecnologia scientifica, ma soprattutto, a nostro parere, opera di profonda portata culturale, filosofica ed epistemologica, non messa in evidenza dalle diverse letture che sono state date di esso.

Smentisce inveterati luoghi comuni sulla natura della cosiddetta scienza greca e sulla personalità di Archimede; per questo ne ho fatto oggetto della mia massima attenzione scientifica e filosofica, nella lettura come nel commento e nell'interpretazione. Opera perciò complessa sia dal punto di vista filosofico e scientifico, sia dal punto di vista linguistico.

L'opera smentisce intanto il luogo comune di una **scienza greca asettica**, come quella che appare nel testo di Euclide, fatta di definizioni, assiomi e teoremi, senza humus culturale, nel momento in cui l'opera archimedea è scritta sotto forma di lettera ad un re, il re Gelone, di Siracusa, a cui si riconosce una certa competenza matematica e una certa conoscenza astronomica (Vedi *Arenario* I, 3, 4) e a cui si rivolge per impegnarlo nella lotta contro un pregiudizio o più pregiudizi, **acritici e fideistici**, diffusi nelle credenze religiose dei più, come dei poeti e dei filosofi, ovvero *che non possono esistere numeri che riescano a contare molteplicità grandi, quanto possono essere i granelli di sabbia del mare,ma anche quelli formanti tutto l'universo conosciuto.* (Vedi per una più rigorosa esposizione par. 2 di questo articolo).

Si pensi al poeta Pindaro, del V secolo a.C., vissuto per un certo periodo nella Siracusa, che sarà poi la patria di Archimede, che già aveva scritto *"la sabbia sfugge il numero" (Ode olimpica, II, 98)* e a tutta la coeva o quasi, ad Archimede, letteratura religiosa biblica, osannante alla innumerabilità della sabbia del mare, il cui numero può essere conosciuto solo da una sapienza superiore all'uomo, che può essere solo quella di Dio (*Tutta la sapienza viene dal Signore ed è con lui per tutti i secoli. La sabbia del mare e le gocce della pioggia e i giorni dei secoli chi può mai contarli? Uno solo è sapiente e molto terribile seduto sopra il suo trono: Dio.* (Vedi *Bibbia, Ecclesiastico, 1.1; 1.6).*

Opera quindi profondamente **illuministica**, ante litteram, tanto sulla **scia del pensiero di Democrito**, l'unico filosofo, che troviamo citato nelle opere rimaste di Archimede, il quale ha osato immaginare un universo omogeneo, dal punto di vista fisico- metafisico, un mondo formato di soli atomi fisici, come sono i granelli di sabbia, che Archimede immagina formanti il suo ipotetico universo fisico, di cui vuol contarne il numero,quindi che non è disomogeneo né gerarchico, come quello platonico e aristotelico, quanto sulla **scia del pensiero di Parmenide**, secondo il quale *il non essere né lo puoi pensare né lo puoi esprimere*,per cui *il pensare è lo stesso che l'essere* (vedi Diels-Kranz, 28, B, 2.5; B, 3), come pure sulla **scia del pensiero sofistico,** di critica del pregiudizio, mitico e religioso acritico, non a misura d'uomo.

Solo chi sa osare pensare in modo matematico, che è come dire per Archimede, **in modo razionale**, conclude questi la sua opera, sa liberarsi dal pregiudizio, ovvero sa pensare e nominare numeri grandi quanto vuole e assegnarli a molteplicità esse pure grandi quanto si vuole, siano esse pure grandi quanto tutto l'universo che noi conosciamo.

"*Penso infine, o re Gelone, che tutte queste cose sembreranno non credibili ai più, che sono inesperti di cose matematiche, ma quelli che le coltiveranno e si applicheranno a conoscere le distanze e le grandezze della terra, del sole, della luna e del mondo intero, le ammetteranno a seguito della mia dimostrazione. Ed è per questo che io ho ritenuto opportuno che anche tu ne prendessi conoscenza*" (vedi, *Arenario,* IV, 20).

L'opera smentisce allora l'altro luogo comune di una matematica greca, rivolta a fondare la sola scienza della geometria e a farla progredire, poiché essa è **rivolta alla fondazione di una scienza dei numeri**, come emerge da una stessa testimonianza di Archimede, presente nell'opera, nella quale si dice che Archimede ha già inviato scritti di aritmetica a una scienziato del suo tempo, Zeusippo, purtroppo andati perduti.

"*Ma, io tenterò di mostrarti,per mezzo di dimostrazioni geometriche, che tu sarai in grado di seguire, che, fra i numeri da me nominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non solo il numero della massa di sabbia uguale in volume alla terra riempita nel modo da me descritto,ma anche quello di una massa uguale in volume al cosmo*" (vedi *Arenario,* I, 3)

Sarebbe da chiedersi perché siano andati perduti i suoi scritti di aritmetica e non quelli di geometria. Riteniamo che i motivi non siano stati casuali ed accidentali, ma ben più profondi, esterni al progredire della scienza.

L'opera smentisce ancora **l'altro pregiudizio del progredire della scienza greca in senso univoco, senza conflitti sul campo, di sola matrice platonico-aristotelica,** specie nel campo dell'astronomia, nel momento in cui porta la testimonianza di un sistema eliocentrico, quale quello di Aristarco, III a.C., di tutt'altra **matrice, pitagorico-democritea**, cioè di un universo non solo non geocentrico, come quello del pitagorico Filolao, ma anche non-finito e acentrico, come quello di Democrito.

Ma l'opera smentisce **soprattutto l'inveterato pregiudizio,duro a morire di una scienza greca, prettamente teoretica, contemplativa, idealistica, slegata dalle operazioni fisiche di misura come dall'uso di strumenti tecnici di misurazione.**

Nell'opera è descritto in modo analitico l'uso della dioptra che Archimede ha costruito per misurare il diametro apparente del sole, per calcolare poi quello dell'universo e quindi il suo volume; si riconosce l'uso delle mani e degli strumenti nel campo della scoperta scientifica.

"*Io suppongo che il diametro del sole sia più grande del lato del chiliago inscritto nel cerchio massimo del mondo. Suppongo ciò, in quanto Aristarco ha trovato che il sole ci appare pressappoco come la settecentoventesima parte del cerchio dello zodiaco; io stesso,avendo esaminato ciò,nello stesso modo, ho cercato con strumenti di trovare l'angolo che sottende il sole e che ha il suo vertice nell'occhio.*

Tuttavia non è facile misurare quest'angolo con precisione,poiché né la vista né le mani né gli strumenti,che sono necessari per misurarlo, sono abbastanza sicuri per farcelo conoscere con esattezza. Per il momento non è opportuno prolungare la nostra discussione su queste cose,specialmente perché questo genere di cose è stato spiegato molte volte" (vedi *Arenario*,I, 10, 11).

Opera allora complessa e poliedrica, di assoluto interesse filosofico ed epistemologico, oltre che scientifico e storico, pur nell'apparenza di un gioco raffinatissimo, quale quello di voler contare il numero dei granelli di sabbia del mare e dell'intero universo, da essi formato, come dai tanti atomi di Democrito.

Opera complessa dicevamo non solo dal punto di vista contenutistico, ma anche linguistico, tale da farne una testimonianza nello smentire **un altro pregiudizio, a nostro parere, di una scienza tutta greca (una Grecia mai esistita dal punto di vista culturale e politico statuale), anzi attica, anzi ateniese.**

L'opera è stata scritta in lingua dorica, anzi in dialetto siracusano. L'opera testimonia allora che c'è stata una **scienza autoctona**,con molti poli,uno dei quali è stato Siracusa, con una **sua tradizione culturale pitagorico-democritea** (ricordo *Iceta* ed *Ecfanto* **siracusani e pitagorici**, che, già nel V-IV secolo a.C., secondo le testimonianze, parlano di rotazione della terra attorno a sé stessa, come di una realtà formata da atomi fisici, indivisibili, monadi quindi in senso antiplatonico e antiaristotelico - *Ecfanto siracusano diceva che principi di tutte le cose sono i corpi indivisibili e il vuoto: costui per primo disse che sono corporee* ***le monadi dei Pitagorici*** - vedi D.K. 51,2),che ha una sua lingua, il dorico-siracusano.

Ha scritto uno studioso sulla fortuna di Archimede nei retori e negli Autori cristiani antichi.

"*La lingua, in cui sono scritte le opere di Archimede, ha perduto ogni traccia delle sue forme di origine. Se il dialetto ionico si adattava alla medicina, l'attico, alla filosofia e alla storia, il dorico della Sicilia, invece, alla scienza di Archimede. Lo Heiberg con una metodica osservazione sugli scritti archimedei, degna di rilievo, cercando di risalire alle forme originarie, ha potuto dedurre* *che vi si avvicina solo l'Arenarius, mentre tutte le altre hanno sofferto aggiunte e mutazioni da parte di un interpolatore che conosceva il dorico. Inoltre ribadisce che il "De sphaera et cilindro" e il "De dimensione circoli" hanno ancora subito, dopo, l'età di Eutocio, altre variazioni da parte di un secondo interpolatore. Lo Schmid concorda con lo Heiberg nel sostenere che il dorico di Sicilia usato da Archimede è completamente oscurato nelle opere di maggiore diffusione,mentre nelle altre è abbastanza conservato"* (Antonio Quaquarelli, *La fortuna di Archimede nei retori e negli autori cristiani antichi*, in Celebrazioni archimedee del XX secolo,vol. IV, Siracusa,1965).

Questo pertanto ci può portare a parlare di una scienza **non greca, ma mediterranea, del Mediterraneo centro orientale, acentrica, con tradizioni di pensiero in conflitto, primo tra tutti, tra la tradizione di pensiero pitagorico-democritea, a cui riteniamo che idealmente appartengano i siracusani Iceta e Ecfanto, e quindi il nostro Archimede, e quella platonico-aristotelica, contro cui nella sua opera combatte,nella fattispecie nella sua opera,** *l'Arenario***.**

Archimede, anche se non lo cita, è sulla scia di **Archita di Taranto,V-IV, sec. a.C., pitagorico**, il quale, secondo la testimonianza di Orazio, ha osato contare il numero dei granelli di sabbia del mare. Orazio: *La sabbia del mare e della terra racchiude te, o Archita,che l'hai contata* (te mensorem)" (Vedi Orazio, *Carmina*,I,28).

Già R. Mondolfo in una interessantissima nota del suo libro *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica*, notava una continuità ideale tra Archimede e i suoi predecessori Archita e i pitagorici, "*Secondo l'ordine cronologico, da Archita e Platone dovremmo passare ad Aristotele; che invece qui posponiamo, per seguire in Aristarco e in Archimede lo sviluppo dei problemi calcolatori di Archita e degli altri Pitagorici*". (ivi,p.219)

Archita può essere collocato tra quelli di cui,parla Archimede nella sua opera.

"*Alcuni poi* (Archita?)*, pur considerandola limitata* (nel numero, la sabbia formata da granelli; mia aggiunta*), pensano ancora che nessun numero possa essere nominato che sia tanto grande da superare la sua molteplicità*" (vedi, *Arenario*, 1,1).

Dice poi Archimede: *Furono dati nomi sino ad una miriade e al di là di una miriade i nomi che si diedero sono abbastanza noti; non si fece che ripetere una miriade sino a diecimila miriadi. Orbene i numeri ora indicati e che vanno sino ad una miriade di miriadi siano chiamati numeri* ***primi*** *(protoi) mentre una miriade di miriadi di numeri primi sia chiamata* ***unità*** *dei numeri* ***secondi***. <u>*Contiamo mediante tale unità*</u> *per decine,centinaia,migliaia e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi. Una miriade di miriadi di numeri secondi sia chiamata* ***unità*** *dei numeri* ***terzi***. <u>*Contiamo per mezzo di queste unità*</u> *per decine, centinaia, migliaia e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi…" (* Vedi *Arenario,* III, 2) e così via, sino a quanto diciamo subito dopo.

Così Archimede non solo **osa** contare i granelli di sabbia del mare, come pure quelli che formassero l'intero universo, ma, da **buon pitagorico**, **osa costruire i numeri**, con cui si può contare qualunque molteplicità, che possa essere immaginata.

Infatti se la realtà,quella razionale,che è quella vera, è <u>pitagorico- democritea</u>, costituita da atomi, o comunque da elementi, da granelli di sabbia, che nel caso di Archimede ne diventano quasi una specie di rappresentazione sensibile, (in verità sia Democrito sia la tradizione pitagorica si sono già rappresentati gli atomi o gli elementi di realtà come granelli di polvere in movimento, come emerge da questa testimonianza, riportata dal Luria nel suo *Democrito*, 200: *Democrito considerava gli elementi come somiglianti a granelli di polvere che si muovono con grande velocità nell'aria, mentre alcuni dei Pitagorici consideravano come elementi quegli stessi granelli di polvere*) allora essa deve essere in linea di principio numerabile, mentre è infinita, non numerabile, caotica, la realtà sensibile, apparente, non vera.

Pertanto è possibile costruire – e quindi contare – a partire dall'elemento, la monade, **la monas**, ovvero **l'unità,** l'uno in quanto **idea di uno**, ιuno, **<u>non</u> mero numero**, ma **quantità, grandezza**, molteplicità sempre più numerose raggruppabili in unità, monadi superiori, o altrimenti detto: dall'**unità** della serie dei numeri **primi** del *primo* periodo, all'**unità** della serie dei numeri **secondi** del *primo* periodo, all'**unità** della serie dei numeri **terzi** del *primo* periodo, sino a $(10^{8x10^8}\ \iota uno)$ e da qui dal numero indicante una molteplicità $(10^{8x10^8}\iota uno)$ presa come **nuova unità** di *periodo superiore*, ovvero **unità** della serie dei numeri **primi** di *secondo* periodo, $\iota(10^{8x10^8}\ iuno)$, che da adesso pongo uguale ad **A**, all'**unità** della serie dei numeri **secondi** del *secondo* periodo, $\iota 10^8(A)$ all'**unità** della serie dei numeri **terzi** del *secondo* periodo, $\iota 10^{8x2}(A)$ sino alla molteplicità **A** del *secondo* periodo, AxA= $A^2 =\ (10^{8x10^8})(10^{8x10^8})\iota uno$ e sempre di nuovo dall'**unità** della serie dei numeri **primi** del *terzo* periodo $\iota A^2 = \iota\left[\ (10^{8x10^8})x(10^{8x10^8})\iota uno)\ \right]$, all'**unità** della serie dei numeri **secondi** del *terzo* periodo, $\iota 10^8 A^2 = \iota\left\{\ 10^8\left[\ (10^{8x10^8})(10^{8x10^8})\ \right]\iota uno\ \right\}$, sino alla molteplicità A di periodo 10^8, ovvero $A^{10^8} = (10^{8x10^8})^{10^8}\ \iota uno$, un numero formato dall'unità seguita da 80 milioni di miliardi di cifre, che Archimede denomina *una miriade di miriade di **numero** una miriade di volte una miriade di **periodo** una miriade di volte una miriade* (di unità), che oggi possiamo scrivere in cifre

$$\left[\ (10^4 x 10^4)^{10^4 x 10^4}\ )\ \right]^{10^4 x 10^4}\ \iota uno_{Archimede} = ((10^8)^{10^8})^{10^8}\ \iota uno = (10^8)^{10^{16}}\ \iota uno$$

Si noti come in tutto il discorso archimedeo l**'unità** non viene considerata un numero, come la rappresentano in modo ambiguo Eecke o Loria nel loro commento all'opera di Archimede (vedi p. 365 in Eecke e p. 755 in Loria), ma come l'unità di misura del numero, **l'idea di uno**, di un ente sia esso un uno o una molteplicità, poiché, come già per i Pitagorici e per Euclide, *il numero è pluralità composta da unità* e l'unità è l'idea di uno. Dice Euclide: "l'unità è l'ente che è detto uno". (Vedi Euclide, libro VII, def. 1 e def. 2) .

In quanto $10^8\iota uno, 10^{16}\ \iota uno, \ \ldots$, questi indicano molteplicità, sono elementi dei numeri, ma in quanto indicano unità, $\iota\left(\ 10^8\iota uno\ \right), \iota\left(\ 10^{16}\iota uno\ \right), \ldots$ non sono un numero, poiché essi significano la molteplicità presa in quanto tale, come uno, idea, unità, monade.

A partire da queste unità si costruiscono i numeri come indicanti molteplicità, contanti molteplicità, $10^8\iota uno, 10^{16}\ \iota uno, \ldots$

Archimede non colloca l'unità nella serie dei numeri che costruisce e che nomina, come già avevano fatto i Pitagorici ed Euclide, come emerge dalla definizione di numero di Euclide e dalla testimonianza di Aristotele sui pitagorici, dove si scrive: *L'uno non è altro che la misura di una molteplicità ed il numero non è altro se non una pluralità misurata e una pluralità di misure (perciò è anche logico che **l'uno non sia un numero**) giacché l'unità di misura non si identifica con le misure, ma tanto l'unità di misura quanto l'uno sono un principio" (Metafisica*, XIV, 1088a, 5).

In una illuminante testimonianza poi di Aristotele possiamo leggere come già questi individuasse tra l'atomismo di Democrito e la concezione del numero, come composto di unità,monadi, che è quella dei Pitagorici e di Euclide come del nostro Archimede, una continuità ideale, un isomorfismo di fondo.

"*Democrito sostiene l'impossibilità che da due cose se ne generi una e che da una se ne generino due, giacché egli identifica le sostanze con le grandezze indivisibili. Pertanto è ovvio che la cosa starà allo stesso modo anche per il numero, se è vero che **il numero, come affermano alcuni, è una composizione di monadi**" (Metafisica VII, 1039a, 10).*

Richiamarsi ad un presunto platonismo di Archimede (vedi Frajese, *Opere* di Archimed*e*, p. 427, Utet, Torino, 1974) a questo proposito è una forzatura ed è fuori luogo, poiché in nessuno dei suoi scritti Archimede cita Platone, ma cita Euclide e Democrito, per il quale i **principi sono idee = elementi** (Vedi le seguenti testimonianze: *Democrito chiama gli elementi idee, Democrito dice che i principi delle cose sono le idee.* D. K., 68,B,57) e l'unità, la monade, non può che essere il principio del numero, secondo la testimonianza ancora di Aristotele ("*l'uno è il principio del numero in quanto numero*". (*Metafisica*, I,1052b,20)

Quindi Pitagora, Parmenide, Democrito, Euclide nella linea ideale di Archimede, non Platone e Aristotele.

Ma passo adesso ad analizzare nel seguente paragrafo meglio la tesi di Archimede nell'*Arenario* con quelle che intende confutare.

2. ASPETTI LOGICO-LESSICALI ARCHIMEDEI DELL'ARENARIO E TESI FONDAMENTALI. ARCHIMEDE, PITAGORICO-DEMOCRITEO

Per entrare ancora più in profondità nel discorso archimedeo, traduciamo prima in linguaggio comune e in simboli, usando in parte l'ideografia di Peano (in particolare usiamo il suo iota, ι, operatore logico-linguistico che fa passare dall'individuo o dalla classe alla sua idea, al singleton, oggi diremmo in senso estensionale) e in parte i simboli, come usati nella logica matematica di oggi, alcuni termini delle sue tesi.

1) **Apeiron** = non-finito, non-limitato. Traduco in questo modo, poiché per noi il termine "apeiron" assume più il significato, nel contesto archimedeo, come emerge dalla traduzione in simboli delle

sue tesi fondamentali, di negazione del finito,piuttosto che di affermazione del non-finito o infinito. Insomma si afferma più una limitazione di un qualcosa anziché la sua non limitazione o infinitezza.

2) **meghetos** = volume, grandezza.

3) **aritmos** = il *numero in sé*, il mero numero, il singolo numero, lo iota numero= ιuno .

4) **monas =** idea di uno o ιuno l'uno in quanto uno, lo stesso uno, *autò tò én*.

5.1) **pletos** = *molteplicità, pluralità*.

5.2) **pletos** = il *numero* N o N_0 di una molteplicità.

Nel secondo caso 5.2 assume il significato, da un lato

5.2.1) di **operatore** N che fa passare dalla molteplicità al suo valore numerico

N(**M**) = **n** ιuno

dall'altro lato

5.2.2) di **operatore**, N_0, che fa passare dalla molteplicità al suo valore di numero in quanto numero,

N_0(M) = **i[n(** ιuno)]

Per Archimede intanto esiste la classe del numeri , $\exists N_1$, tale che

Se $n(\iota uno) \in N_1 allora \exists \left(n+1 \right) \iota uno \in N_1$ (Classe di numeri che cresce oltre ogni numero dato n ιuno)

Adesso enunciamo quali sono le tesi che intende confutare e poi la tesi che intende dimostrare.

TESI CHE ARCHIMEDE INTENDE CONFUTARE:

Cerchiamo ora di tradurre prima, a parole le singole proposizioni che Archimede intende confutare, e poi in simboli, cercando di enuclearne il concetto, attraverso espressioni e poi allo stesso modo la sua tesi fondamentale.

Alcuni pensano che:

Tesi. a) *tou psammou ton aritmon apeiron eimein to pletei* = **il numero della sabbia sia non-finito rispetto alla molteplicità**, e in simboli

Se $n_0 \in N_1, M = granellidisabbia, allora \neg \exists N_0(M) = \iota n : \iota n < n_0, n_0 \in N_1$,

che così leggiamo

"Sia n_0 un elemento di una classe di numeri i cui elementi crescono oltre ogni numero dato, allora **non esiste un operatore** che fa passare, nel nostro caso da una data molteplicità di granelli di sabbia, ad un numero, in quanto tale, e tale che esso sia nello stesso tempo minore di un qualche numero della classe dei numeri che crescono oltre ogni numero dato, ovvero che esso sia limitato da qualcuno di essi”

Tesi. b) Altri pensano:

Altri pur considerando la sabbia di numero finito, pensano che non possa esistere un numero che superi il numero che indichi la sua molteplicità.

E in simboli

$$\forall M, \exists N_o : N_0(M) = \iota n, \neg\exists\, \iota(n+1) : \left(\iota n + 1 \right) \neg = N_0(M),$$

che possiamo leggere

“Ad ogni molteplicità grande quanto si vuole è possibile assegnare un numero, che la limiti, ma non esiste un suo successore tale che esso non sia eguale ad un numero che corrisponde ad una molteplicità, ovvero non esistono meri numeri grandi quanto si vuole senza che ad essi corrisponde una molteplicità”

TESI CHE ARCHIMEDE INTENDE DIMOSTRARE :

“Ma io tenterò di mostrarti per mezzo di dimostrazioni geometriche che fra i numeri da me nominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non solo il numero della sabbia uguale in volume (meghetos) alla terra riempita …, ma anche quello di una massa uguale in volume al cosmo”.

Scriviamo adesso ciò in simboli

$$n_0 \in N_1, \forall M, \exists N_0 : N_0(M) = \iota n < n_0, n_0 \in N_1,$$

che possiamo leggere,come segue.

Per Archimede sono <u>pensabili</u> e quindi <u>esistono</u>,

contro **Tesi**. **b),** meri numeri, N_1, grandi quanto si vuole senza che ad essi corrisponde una molteplicità, perché **si possono costruire, con operazioni fisiche elementari di calcolo razionale,riproducibile e quindi controllabile - diremmo oggi con carta e penna –** ma per Archimede è anche possibile costruire **l’operatore**, **che corrisponde ancora una volta ad operazioni fisiche elementari di misura, l’uso della dioptra**, tale che permette di assegnare il numero ad una molteplicità tanto grande quanto si vuole, sino ad essere uguale alla molteplicità più grande quanto quella che comprende l’universo in quanto tutto, **il pan** e non solo il **cosmos**, e il cui numero, **contro Tesi. a)**, sia limitato da un mero numero.

Vediamo adesso come in concreto questo modello dimostrativo si traduce nell’*Arenario* di Archimede.

N_1 sono i numeri di Archimede; questi sono costruiti,e quindi resi possibili,esistenti, come multipli di unità (**monas**) sempre superiori dell’unità di base, ιuno, come abbiamo visto nel paragrafo precedente. Archimede li raggruppa in **ottadi**, in gruppi di otto. Una ottade ha la seguente forma, in notazione moderna, senza le unità, le quali, però, per Archimede, come per Euclide fanno parte integrante del numero:

$10^{8n}, 10^{8n+1}, 10^{8n+2}, ... 10^{8n+7}$ per n = 1,2,3, … 7

Il tutto, in forma esplicita, può essere scritto

- 1^a *Ottade* $1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ **numeri primi**

- 2^a *Ottade* $10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}$ **numeri secondi**

- 3^a *Ottade* $10^{16}, 10^{17}, 10^{18}, 10^{19}, 10^{20}, 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}$ **numeri terzi**

- 4^a *Ottade* $10^{24}, 10^{25}, 10^{26}, 10^{27}, 10^{28}, 10^{29}, 10^{30}, 10^{31}$ **numeri quarti**

- 5^a *Ottade* $10^{32}, 10^{33}, 10^{34}, 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}, 10^{39}$ **numeri quinti**

- 6^4 *Ottade* $10^{40}, 10^{41}, 10^{42}, 10^{43}, 10^{44}, 10^{45}, 10^{46}, 10^{47}$ **numeri sesti**

- 7^a *Ottade* $10^{48}, 10^{49}, 10^{50}, 10^{51}, 10^{52}, 10^{53}, 10^{54}, 10^{55}$ **numeri settimi**

- 8^a *Ottade* $10^{56}, 10^{57}, 10^{58}, 10^{59}. 10^{60}, 10^{61}, 10^{62}, 10^{63}$ **numeri ottavi**

- **Monas** o unità dei numeri **primi** ιuno

-……………………………**secondi** $\iota(10^8 \iota uno)$

-……………………………**terzi** $\iota(10^{16} \iota uno)$

-………………………… **quarti** $\iota(10^{24} \iota uno)$

-………………………… **quinti** $\iota(10^{32} \iota uno)$

-………………………… **sesti** $\iota(10^{40} \iota uno)$

-………………………… **settimi** $\iota(10^{48} \iota uno)$

……………………………**ottavi** $\iota(10^{56} \iota uno)$

Essi permettono di assegnare ad ogni molteplicità immaginata data di granelli di sabbia, **con un singolo granello, pensato come unità, elemento,atomo-idea, monas**, formante volumi di sabbia di forma sferica, sino a quella dell'universo,il pan,il cui centro è il sole e la periferia sono le stelle fisse, un mero numero, che ne limita il valore numerico, ad essa assegnato attraverso operazioni fisiche di misura.

Se ad esempio ad una sfera di diametro di 100 miriadi di stadi, formata da granelli di sabbia, assegniamo un numero di Archimede, allora esiste un mero numero di Archimede che lo limita.

In simboli: poiché $N(Sf_{10.000\,stadi}) < 10 \cdot 10^{32} = 10^{33}$, si ha allora che

$N(Sf_{100 \cdot 10.000\,stadi}) < 10 \cdot 10^{4} \cdot 10^{33} = 10^{6} \cdot 10^{33} = 10^{39}$, **numero di Archimede.**

Questo schema può essere ripetuto sino alla sfera più grande, di diametro dato, che è quella dell'universo, il cui numero di granelli sarebbe minore comunque di uno dei numeri di Archimede.

In simboli:

($N(Sf_{sabbia}) = N(Sf_{stellefisse}) < 100 \cdot 10^{4} \cdot 10^{56} = 10^{63} \in$ **Numeri di Archimede**

3. ARCHIMEDE: PLATONICO-ARISTOTELICO O PITAGORICO-PARMENIDEO-DEMOCRITEO?

Alla luce di questa tesi di affermazione di esistenza di meri numeri, a cui non corrisponde alcuna molteplicità fisica, è possibile pensare ad un **Archimede di formazione platonica o come dice Delsedime, di matrice aristotelica?**

Noi pensiamo: **Assolutamente no!** Per due ben precisi motivi.

Primo: Intanto per Archimede i numeri non esistono in quanto tali, in senso platonico, in un mondo a parte ,l'iperuranio - almeno non c'è alcuna affermazione nel suo scritto in questo senso - ma esistono in quanto **enti logici**, **la cui esistenza è garantita dalla possibilità di costruirli con operazioni fisiche elementari**, come l'uso della dioptra, che permette attraverso misure di assegnare un numero ad un volume sferico formato da una molteplicità di granelli di sabbia, grande quanto tutto l'universo, il pan, **ma soprattutto dalla possibilità di poterli costruire, oggi diremmo con carta e penna, attraverso operazioni di calcolo razionale riproducibile e quindi controllabile**.

Secondo: Archimede non afferma l'esistenza di un infinito numerico potenziale, in senso aristotelico e la non esistenza di insiemi infiniti numerici e di grandezze fisiche infinite, ma,come emerge dalla nostra rigorosa ricostruzione delle tesi che Archimede intende confutare e di quella che intende dimostrare, che a molteplicità grandi quanto si vuole, sia esso il pan, che possiamo misurare e conoscere, fossero esse pure molteplicità più grandi, a cui si ritenesse di non poter assegnare un numero né quindi misurarle, è sempre invece possibile assegnare un numero (e **questo è pitagorismo, poiché tutto è numero**), ma anche di limitarle con un numero più grande, sebbene ad esso non corrisponda alcuna molteplicità (**e questo è ancora pitagorismo più che platonismo o aristotelismo**). Questo perché, i numeri che noi costruiamo con il calcolo razionale sono più veri delle molteplicità che noi via via possiamo misurare o contare; **il vero logos può precedere la physis, anzi deve precederla, poiché esso è la condizione necessaria, anche se non sufficiente del suo essere.** Solo se si possono contare le molteplicità grandi quanto si vogliono, se ne potrà verificare la esistenza non solo logica, ma anche fisica.

Una cosa che non si può contare, come necessità logica, non può neanche esistere fisicamente.

Diceva il Pitagorico Filolao (V sec. a.C.): *Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché*. (D.K. 44,B.4)

Archimede allora non vuole dimostrare che l'universo fisico è finito, dal punto di vista numerico, ma che l'universo fisico è non-finito, poiché l'esistenza di insiemi numerici non finiti ne garantisce la esistenza logica, anche se non fisica.

Archimede non oppone, come scrive R. Mondolfo, all'infinito reale di Aristarco, un suo infinito idealistico, riservato al solo dominio del pensiero e del calcolo matematico (vedi op. cit. p. 220), poiché è in sintonia pitagorica con Aristarco, come d'altra parte nota lo stesso Mandolfo.

Il non-finito di Archimede è il non-finito di Archita, Democrito e Lucrezio, i quali affermano non che l'universo è infinito ma che ad esso non si può porre un limite senza contraddirsi, poiché di un qualcosa di cui si dice che ha limite, esiste sempre un qualcosa che lo limita.

Diceva Archita: *Se io mi trovassi all'estremità dello spazio,ad esempio nel cielo delle stelle fisse,potrei tendere la mano o un bastoncino fuori di quella? o non potrei? Dire che non si può è assurdo.* (D. K.47,A,24)

E ancora il democriteo Lucrezio: *Sembra evidente che di nessuna cosa ci possa essere estremo,se non c'è qualche altra cosa che la limiti.* (Lucrezio, *De rerum natura*, libro I, versi 961-962)

Archimede, di questo universo, invece ne dà **la possibilità logica in senso pitagorico**, e non solo razionale, come Archita, Democrito e Lucrezio, con la sua dimostrazione, attraverso operazioni fisiche elementari di misura e di calcolo razionale, che non sono nel discorso aristotelico circa l'affermazione dell'esistenza dell'infinito potenziale, di numeri sempre più grandi di qualunque numero che possa essere assegnato ad una molteplicità che riempia un volume grande quanto si vuole.

Il pan qui è solo quindi una **metafora, una figura retorica,** per indicare un punto di vista filosofico razionale secondo la tradizione di pensiero pitagorico-parmenideo-democritea, secondo cui la ragione è la condizione necessaria dell'essere fisico, la cui esistenza è provata da operazioni fisiche elementari, che ne sono la condizione sufficiente della suo essere fisico. *"I Pitagorici dicono che (guida è) la ragione: non la ragione in qualunque sua forma, ma quella che pone i fondamenti nella matematica.*" (D.K. 44,A,29)

Per concludere, illuminante è a questo proposito la seguente testimonianza, anche se distorta, di Aristotele sui Pitagorici, da cui emerge, una concezione filosofico-epistemologica in sintonia con quella che sarà di Parmenide e Democrito, e perché no, di Archimede: *"Essi(i Pitagorici) ricercano la ragione e la causa non riportandosi a ciò che è oggetto di osservazione, ma piuttosto riconducendo a forza i fenomeni a certe loro ragioni ed opinioni, e tentando in questo modo di armonizzarli e condurli ad un tutto ordinato"*(Aristotele, *De caelo*, 2,13)

Da questo suo punto di vista, brutalmente empiristico, tutta la costruzione numerica, di Archimede, apparirebbe ad Aristotele non l'inveramento del suo infinito potenziale, ma una folle e fantastica costruzione di un visionario! Cosa che non ci pare!

Il fatto poi che Archimede avesse dimestichezza con l'infinito attuale come si dice che emerga oggi da suoi scritti perduti e ritrovati denoterebbe ancora una volta per un Archimede antiaristetelico e ancora una volta democriteo, visto che il concetto di infinito fu congeniale a questo filosofo, il solo filosofo citato da Archimede. Ma bisognerebbe aprire un altro capitolo di discussione.

Testi citati e consultati

Anche se non sono direttamente citati, a tutti i seguenti testi scritti, letti o consultati, si fa riferimento nelle mie riflessioni. Innanzitutto all'opera di Giuseppe Boscarino, *Un mondo di sabbia. L'Arenario di Archimede e la tradizione filosofica italica della scienza,* Altromondo editore, Padova, 2011, da cui è estratto l'articolo, nel quale viene tradotto dallo stesso autore il testo greco in italiano e a cui si fa riferimento. Quindi ai seguenti scritti:

- G. Boscarino, *Tradizioni di pensiero. La tradizione filosofica italica della scienza e della realtà*, Sortino, 1999, p.412. (Da consultare da chi volesse una trattazione più ampia ed articolata, lungo i secoli VI,V,IV a.C., delle due tradizioni di pensiero in conflitto, la tradizione pitagorico-parmenideo-democritea e quella platonico-aristotelica)

- G. Boscarino, *The Mystery of Archimedes. Archimedes, Physicist and Mathematician, Anti-platonic and Anti-Aristotelian Philosopher,* in *The Genius of Archimedes*. Springer, 2010.

- P.Ver Eecke, *Les oevres completes d'Archimède*, Paris,1921.

- Charles Mugler, *Les oevres d'Archimède,*4 Voll,con testo greco a fronte, Paris, 1970-72.

- S.T.Heath, *The works of Archimedes*, Oxford, 1897.

- S.T.Heath, *A History of Greek Mathematics,* New York, 1981.

- S.T.Heath,*Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus,* New York, 1981.

- A.Frajese, *Opere* di Archimede, Torino, 1974.

- A.Frajese, *Gli Elementi* di Euclide,Torino, 1970.

- E.J.Dijksterhuis, *Archimedes,* Copenhagen, *1956.*

- G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Torino,1914.

- G. Peano, *Formulario Mathematico, Roma,* 1960, *Opere scelte*, Roma,1957

- Diels-Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, in *Presocratici*, Laterza, Bari

- Aristotele, *Metafisica*, Bari,1971.

- Aristotele, *De caelo,* Bari, 1973.

- E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Torino, 1999.

- Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata,* Milano, 2001.

- Rodolfo Mondolfo, *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica,* Firenze, 1967.

- Plutarco, Vite parallele, *Marcello.*

- P. Delsedine, *L'infini numérique dans l'Arénaire d'Archimède* in *Archive for History of Exact Sciences,* Vol.I, n.5, 1970, 345-359.

- P. Delsedine, *Uno strumento astronomico descritto nel corpus archimedeo: la dioptre di Archimede* in *Physis-Rev. Internaz. Storia Sci*., 2,1970, 173-196

- Albert Lejeune, *La diotre d'Archimede*, in *Annales de la Société scientifique de Bruxelle*s, Sér.I 61, 1947, 27-47.

- Antoniette Virieux Reymond, *Le platonisme d'Archimède*, in *Revue Philosophique de la France e de l'Etranger,*Tome CLXIX,Paris; 1979, 189-192.

- Jean Louis Gardies, *La méthode méecanique et le platonisme d'Archimède,* in *Revue Philosophique de la France e de l'Etranger*, Tome CLXX, 1980, 39-43.

- Wilbur R. Knorr, *Archimedes and the "Elements": Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus*, in *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 19, 3, Berlin-Heidelberg- New York, 1978, 211-290.

- Wilbur R. Knorr, *Construction as Existence Proof in Ancient Geometry*, in *Ancient Philosophy*, Vol. III, Number 1, Springer, 1983.

- Alan E. Shapiro, *Archimedes's Measurement of the Sun's Apparent diameter*, Journal for the History of Astonomy, 6, 1975, 75-83.

-Rudolf Von Erhardt and Erika Von Erhardt-Siebold, *Archimedes' Sand –Reckone*r,in *Isis*, 34, 1943, 578-602.

- O. Neugebauer*, Archimedes and Aristarchus* in *Isis,* 34, 1942, 4-6.

- E.Rufini, *Il metodo di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità,* Milano, 1961.

- Reviel Netz e William Noel, *Il codice perduto di Archimede*, Milano, 2007

SINOSSI

PROCEDURE DIMOSTRATIVE DI ARCHIMEDE NELL'*ARENARIO*

- Numeri di Archimede, necessari alla dimostrazione, raggruppati in ottadi.

Una **ottade** ha la seguente forma

$10^{8n}, 10^{8n+1}, 10^{8n+2}, ... 10^{8n+7}$ per n = 1,2,3, … 7

Le ottadi, in forma esplicita, possono essere così scritte:

- 1^a *Ottade* $1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ **numeri primi**
- 2^a *Ottade* $10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}$ **numeri secondi**
- 3^a *Ottade* $10^{16}, 10^{17}, 10^{18}, 10^{19}, 10^{20}, 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}$ **numeri terzi**
- 4^a *Ottade* $10^{24}, 10^{25}, 10^{26}, 10^{27}, 10^{28}, 10^{29}, 10^{30}, 10^{31}$ **numeri quarti**
- 5^a *Ottade* $10^{32}, 10^{33}, 10^{34}, 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}, 10^{39}$ **numeri quinti**
- 6^4 *Ottade* $10^{40}, 10^{41}, 10^{42}, 10^{43}, 10^{44}, 10^{45}, 10^{46}, 10^{47}$ **numeri sesti**
- 7^a *Ottade* $10^{48}, 10^{49}, 10^{50}, 10^{51}, 10^{52}, 10^{53}, 10^{54}, 10^{55}$ **numeri settimi**
- 8^a *Ottade* $10^{56}, 10^{57}, 10^{58}, 10^{59}. 10^{60}, 10^{61}, 10^{62}, 10^{63}$ **numeri ottavi**
- **Monas** o unità dei numeri **primi** 1
- **……………………………secondi** 10^8
- **……………………………terzi** 10^{16}
- ……………………………**quarti** 10^{24}
- **……………………………quinti** 10^{32}
- **……………………………sesti** 10^{40}
- **……………………………settimi** 10^{48}
- **……………………………ottavi** 10^{56}

-**Monas** o unità dei numeri **primi** del **secondo** periodo $10^{8\cdot10^8} = A$

- **……………………secondi** del **secondo** periodo $10^8 \cdot 10^{8\cdot10^8}$

- **…………………………………………………………………….**

-**Monas ………**dei numeri **primi** del **terzo** periodo $A \cdot A = A^2$

- **…………………………………………………………………….**

-**Monas……….**dei numeri **primi** del **quarto** periodo A^3

- ……………………………………………………………………..

- **…………………………………………………………………….**

Sino a una **miriade di miriade** dei numeri di una **miriade di miriade** di **periodo** una **miriade di miriade**

$$\left[\left(10^4 \cdot 10^4\right)^{10^4 \cdot 10^4}\right]^{10^8} = \left[\left(10^8\right)^{10^8}\right]^{10^8} = (A)^{10^8}$$

- Teorema sulle relazioni d'ordine di grandezza dei numeri di Archimede

Per stabilire il numero d'ordine di grandezza di un numero nella sequenza delle ottadi nel momento in cui due numeri delle ottadi si moltiplicano, Archimede dimostra il seguente teorema che in notazione moderna possiamo scrivere: $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$,il cui numero d'ordine di grandezza nella sequenza delle ottadi è dato dalla somma dei numeri d'ordine dei fattori meno uno: (m+1)+(n+1)-1.

- Siano p = diametro di un papavero e d = diametro di un dito

Ipotesi di Archimede:

1) $p \geq \frac{1}{40} d$

2) $d \leq 40 p$

Poiché per il teorema di Euclide, due sfere stanno tra loro come il cubo dei loro diametri,

3) $Sf_1 : Sf_2 = d^3{}_1 : d^3{}_2$, ne segue che nel caso del rapporto tra il diametro della sfera di papavero e il diametro della sfera di un dito, si ha il seguente rapporto per il teorema 3)

4) $Sf_p : Sf_d = 1^3 : 40^3$,da cui per **2)** segue

5) $N(Sf_d) \leq 64.000 Sf_p$ e se per ipotesi

6) $N(Sf_p) = 10.000$ granelli di sabbia, si ha che

7) $N(Sf_{1d}) \leq 640.000.000$

Ma

8) $N(Sf_{1d}) \leq (6 \cdot 10^8) + 4.000 \cdot 10^4 < 10 \cdot 10^8 \varepsilon$ **Numero di Archimede**

e ancora per il teorema di Euclide citato segue che

9) $N(Sf_{100d}) = 100^3 N(Sf_{1d})$,ma $N(Sf_{1d}) < 10 \cdot 10^8$, quindi

10) $N(Sf_{100d}) < 100^3 \cdot 10 \cdot 10^8 = 10^{15} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

Le stesse diseguaglianze si ottengono se aumentiamo, come fa Archimede, sempre utilizzando il teorema di Euclide, il numero delle dita o stadi per multipli di cento. Il numero che sempre otteniamo di granelli di sabbia è sempre minore di uno dei numeri di Archimede.

Infatti si abbia:

11) N($Sf_{10000d}) = 100^3 (Sf_{100d})$, ne segue che poiché

12) $N(Sf_{100d}) < 100^3 \cdot 10 \cdot 10^8 = 10^{15}$, si ha ancora la seguente disuguaglianza

13) $N(Sf_{10000d}) < 100^3 \cdot 100^3 \cdot 10 \cdot 10^8 = 10^{21} \varepsilon$ **Numero di Archimede**,

Poiché

14)1 stadio = 10.000 dita, si ha che

15) $N(Sf_{1stadio=10.000dita}) < 10^{21}$

16) $N(Sf_{100\cdot stadi}) = 100^3\ N(Sf_{1stadio})$, ma

17) $N(Sf_{1stadio}) < 10^{21}$,segue

18) $N(Sf_{100stadi}) < 100^3 \cdot 10^{21} = 10^{27} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

19) $N(Sf_{10000\cdot stadi}) = 100^3 \cdot N(Sf_{100\cdot stadi})$, ma

20) $N(Sf_{100\cdot stadi}) < 10^{27}$,segue

21) $N(Sf_{\ 10000stadi}) < 100^3 \cdot 10^{27} = 10^{33}\ \varepsilon$ **Numero di Archimede**

22) $N(Sf_{100\cdot 10^4\cdot stadi}) = 100^3\ N(Sf_{10000stadi})$, ma

23) $N(Sf_{\cdot 10000stadi}) < 100^{33} \cdot$ segue

24) $N(Sf_{100\cdot 10^4\cdot stadi}) = 100^3 \cdot 100^{33} \cdot = 10^{39} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

25) $Sf_{\ 10^4\cdot 10^4\cdot stadi} = 100^3\ Sf_{100\cdot 10^4\ stadi\cdot}$, ma

26) $N(Sf_{100\ \cdot 10^4\cdot stadi}) < 10^{39}$,segue

27) $N(Sf_{10^4\cdot 10^4\cdot stadi}) < 100^3 \cdot 10^{39} = 10^{45} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

28) $N(Sf_{100\cdot 10^4\cdot 10^4\cdot stadi}) = 100^3 \cdot N(Sf_{10^4\cdot 10^4\ stadi})$, ma

29) $N(Sf_{10^4\cdot 10^4\cdot stadi}) < 10^{45}$ segue

30) $N(Sf_{100\cdot 10^4\cdot 10^4\cdot stadi}) < 100^3 \cdot 10^{45} = 10^{51} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

Facendo le seguenti convenzioni, da parte nostra

31) $D_s = Diametro$ del sole, $D_t = Diametro$ della terra, $D_l = Diametro$ della luna, D_c = Diametro del cosmo, diciamo che: **Archimede ha dimostrato intanto le seguenti tesi**

***32)** $D_c < 10^4 D_t$

***33)** $D_c < 100 \cdot 10^4 \cdot 10^4\, stadi$

dando le seguenti ipotesi

34) $D_s \le 30 D_l$ ipotesi

35) $D_t > D_l$ ipotesi, ne segue

36) $D_s < 30 D_t$

Ma ha pure prima dimostrato

***37)** $D_s > \dfrac{perimetrochiliago}{1000}$, (per questa dimostrazione, si veda più avanti) per cui

38) Perimetro chiliago < 1000 $D_s < 3 \cdot 10^4 D_t$,

39) Perimetro Chiliago < $3 \cdot 10^4 D_t$

40) Per. Chiliago > 3 D_c , poiché

41) Diametro<1/3Per.poligono con più di 6 lati

(Euclide, libroIV, p.15), ne segue

42) 3 D_c < 1/3 Per. chiliago < $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10^4 D_t$ ovvero

43) $D_c < 10^4 D_t$ Tesi ***32)**

Poiché poi vale l'ipotesi

44) Per. terra $\le 300 \cdot 10^4\, stadi$

45) Per.terra > $3D_t$, ne segue

46) $3D_t < 300 \cdot 10^4\, stadi$ ovvero

47) $D_t < 100 \cdot 10^4\, stadi$, ma è stato dimostrato

48) $D_c < 10^4 D_t$, ne segue

49) $D_c < 100 \cdot 10^4 \cdot 10^4\, stadi$, ***33**), c.d.d

Poiché è stato dimostrato intanto che

50) $N(D_c) < 100 \cdot 10^4 \cdot 10^4$ stadi, ne segue

51) $N(Sf_{N(D_c)<100\cdot 10^4 \cdot 10^4 stadi}) < 1000 \cdot 10^{48} = 10^{51} \in$ **Numero di Archimede**

Pertanto, viene dimostrato che il numero di granelli di sabbia, il cui volume è uguale a quello del cosmo, quale se lo rappresenta la maggior parte degli astrologi, è più piccolo di mille unità di numeri settimi.

Ma Archimede ha assunto inoltre come ipotesi astronomica, fatte le seguenti convenzioni formali:

52) Sfera della terra $= Sf_t$,Sfera del cosmo = Sf_c e Sfera delle stelle fisse $= Sf_{stellefisse}$, la seguente proporzione astronomica

53) D_t **:** D_c= D_c **:** $D_{stellefisse}$

da cui segue,considerato che si è dimostrato

54) D_c **<**10.000 D_t , che

***55)** $D_{stellefisse}$ **<** 10.000 D_c .

Considerato ancora che le sfere stanno tra loro come il cubo dei diametri e che il $N(D_c) < 100 \cdot 10^4 \cdot 10^4$ stadi, ne segue

56) $N(Sf_{stellefisse}) = 10.000 \cdot 10^4 \cdot 100^4 N(Sf_{\cos mo}) = (10^4)^3 \cdot N(Sf_{\cos mo}) = 10^{12} N(Sf_{\cos mo})$,ma è stato dimostrato pure che

57) $N(Sf_{N(D_c)<100\cdot 10^4 \cdot 10^4 stadi}) < 1000 \cdot 10^{48} = 10^{51}$.

Pertanto, se si compone una sfera di sabbia tanto grande quanto la sfera delle stelle fisse, immaginata da Aristarco, il numero di granelli di sabbia sarà più piccolo del numero formato moltiplicando mille unità per diecimila miriadi di miriadi di numeri ottavi

58) $N(Sf_{sabbia}) = N(Sf_{stellefisse}) < 10^{12} \cdot 1000 \cdot 10^{48} = 10^{63} \varepsilon$ **Numero di Archimede**

Per il teorema dimostrato sulle relazioni d'ordine di grandezza dei numeri delle ottadi in sequenza proporzionale, Archimede può così concludere :

E poiché mille miriadi di numeri settimi sono il cinquantaduesimo numero, a partire dall'unità, nella sequenza proporzionale, e diecimila miriadi di miriadi sono il tredicesimo numero, a partire dall'unità, nella stessa sequenza proporzionale, è evidente che il numero formato moltiplicando li sarà il sessantaquattresimo numero, a partire dall'unità nella stessa sequenza proporzionale (52+13-1= 64).

Ora questo numero è l'ottavo dei numeri ottavi, o mille miriade di numeri ottavi, $1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{56}$ *,di conseguenza è chiaro che il numero dei granelli di sabbia il cui volume eguaglia la sfera delle stelle fisse, immaginata da Aristarco, è minore di mille miriadi di numeri ottavi*

($N(Sf_{sabbia}) = N(Sf_{stellefisse}) < 1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{56} = 10^{63} \in$ **Numero di Archimede).**

TEOREMA DI ARCHIMEDE: $* \; D_s > L_{p1000l} = \dfrac{perimetrochiliago}{1000}$

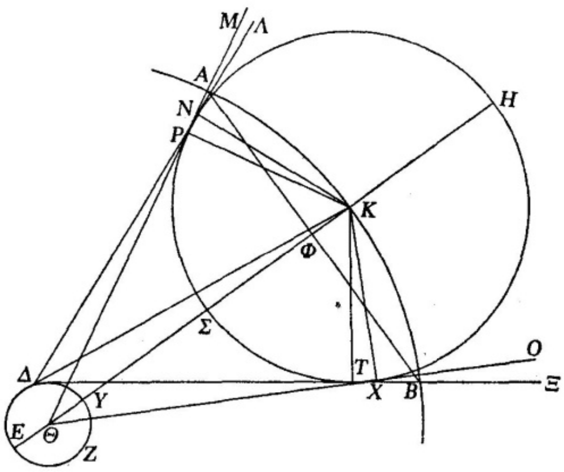
Siano D_s = Diametro del sole e L_{p1000l} = Lato del poligono di lati mille, allora

$$* \; D_s > L_{p1000l} = \frac{Perimetrochiliago}{1000}$$

Ipotesi

Il sole sia un po' al di sopra dell'orizzonte e un piano passi per il centro del sole, K, il centro della terra, Θ, e il centro dell'occhio Δ, e tagli il cosmo secondo il cerchio $\mathrm{AB\Gamma}$, la terra secondo il cerchio $\Delta\mathrm{EZ}$ e il sole secondo il cerchio $\Sigma\mathrm{H}$.

Siano condotte delle tangenti $\Delta\Lambda$, $\Delta\Xi$, dal punto Δ al cerchio $\Sigma\mathrm{H}$, nei punti N e T e dal punto Θ : $\Theta\mathrm{M}$ e $\Theta\mathrm{O}$,nei punti P e X; le rette $\Theta\mathrm{M}$ e $\Theta\mathrm{O}$ taglino il cerchio $\mathrm{AB\Gamma}$ nei punti A e B.



FIGURA

Da queste ipotesi,come si può verificare dalla figura, segue che, poiché si suppone che il sole stia al di sopra dell'orizzonte, l'angolo $\Theta\hat{\Delta}\mathrm{K}$ è ottuso e quindi

1) $\Theta\mathrm{K} > \Delta\mathrm{K}$. Poiché nei triangoli $\Delta\mathrm{NK}, \Theta\mathrm{PK}$ si ha che $\mathrm{NK} = \mathrm{PK}, \Delta\mathrm{K} < \Theta\mathrm{K}$ e che P e N sono angoli retti, ne segue che $\mathrm{O\hat{K}P} > \Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N}$, per cui l'angolo complementare $\mathrm{K}\hat{\Theta}\mathrm{P} < \mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{N}$.

Se consideriamo il doppio dei due angoli $2K\hat{\Theta}P = M\hat{\Theta}O,\ 2K\hat{\Delta}N. = \Lambda\hat{\Delta}\Xi$, si ha

2) $M\hat{\Theta}O < \Lambda\hat{\Delta}\Xi.$ ovvero

3) $\Lambda\hat{\Delta}\Xi > M\hat{\Theta}O.$ (Archimede)

Ma è stato trovato tramite operazioni di misure da parte di Archimede grazie all'uso della diottra che

4) $\Lambda\hat{\Delta}\Xi > \frac{R}{200}$ e $\Lambda\hat{\Delta}\Xi < \frac{R}{164}$, (R= angolo retto) ovvero

5) $\frac{R}{200} < \Lambda\hat{\Delta}\Xi < \frac{R}{164}$, per cui per 2) e 5)

6) $M\hat{\Theta}O < \Lambda\hat{\Delta}\Xi. < \frac{R}{164}$, ne segue

7) $M\hat{\Theta}O < \frac{R}{164}$ (Archimede)

Ma

8) $M\hat{\Theta}O < \frac{\frac{AB\Gamma}{4}}{164} = \frac{AB\Gamma}{656}$ e

9) $AB(corda) < AB(arco)$, ne segue

10) $AB(corda) <$ Lato del poligono di 656 lati (Archimede)

Poiché per ogni poligono inscritto in un cerchio, si ha che

$\frac{Perimetropoligono}{raggio} < \frac{44}{7}$, questo vale anche nel caso del poligono di 656 lati. Questo è vero in base a quanto è stato dimostrato da Archimede nella sua opera "*Misura del cerchio*", ovvero essere una circonferenza più grande del triplo del suo diametro aumentato da meno di un settimo del suo diametro, e nella sua opera "*Della sfera e il cilindro*", secondo cui il perimetro di un poligono inscritto in un cerchio è minore della sua circonferenza

($P < C < 3D + \frac{1}{7}D = P < C < 3x2r + \frac{1}{7}2r = \frac{P}{r} < \frac{C}{r} < 6 + \frac{2}{7} = \frac{P}{r} < \frac{44}{7}$)

Pertanto

11) $\frac{Per.pol.656lati}{\Theta K} < \frac{44}{7}$ da cui, dividendo il perimetro per 656, si ottiene

12) $\frac{Lato.pol.656lati}{\Theta K} < \frac{44}{7} = \frac{44}{4592} = \frac{11}{1148}$, ma

13) $AB < L.pol.656lati$, da cui

14) $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{11}{1148}$ (Archimede), ovvero

15) $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{100 + \frac{4}{11}}$,da cui a maggior ragione

16) $AB < \frac{1}{100}\Theta K$ (Archimede),

Ora, poiché i triangoli rettangoli $K\Theta P, A\Theta\Phi$,sono congruenti, in quanto Θ è comune, $\Theta A, \Theta K$ sono uguali ed opposti ai secondi angoli uguali in Φ e in P, per Euclide 1,26, sono uguali anche

17) $\Phi A = KP$, da cui

18) $2\Phi A = 2KP$, ovvero

19) $\Sigma K = AB$ (Archimede)

Ma per 16) e 19)

20) $\Sigma K < \frac{1}{100}\Theta K$

In quanto

21) $\Theta Y < K\Sigma$, si ha

22) $\Theta Y + K\Sigma < K\Sigma$, da cui per 20)

23) $\Theta Y + K\Sigma < \frac{1}{100}\Theta K$

Essendo poi

24) $\Theta Y + K\Sigma = \Theta K - Y\Sigma$, ne segue

25) $\Theta K - Y\Sigma < \frac{1}{100}\Theta K$, da cui

26) $\Theta K - \frac{1}{100}\Theta K - Y\Sigma < 0$, ossia

27) $\frac{99}{100}\Theta K < \Upsilon\Sigma$

28) $\Upsilon\Sigma > \frac{99}{100}\Theta K$

29) $\frac{\Theta K}{\Upsilon\Sigma} < \frac{100}{99}$ (Archimede)

Inoltre, poiché nel triangolo rettangolo ΘPK

30) $\Theta K > \Theta P$ e

31) $\Sigma\Upsilon < \Delta T$, si ha che

32) $\frac{\Theta K}{\Upsilon\Sigma} > \frac{\Theta P}{\Delta T}$, ma

33) $\frac{\Theta K}{\Upsilon\Sigma} < \frac{100}{99}$ ne segue

34) $\frac{100}{99} > \frac{\Theta P}{\Delta T}$ ovvero

35) $\frac{\Theta P}{\Delta T} < \frac{100}{99}$ (Archimede)

D'altra parte per Archimede vale il seguente teorema, che enuncia, ma che non dimostra, relativo ai due triangoli rettangoli $\Theta KP, \Delta KT$, per i quali valgono le seguenti relazioni $KP = KT, \Theta P, \Delta T$ sono diseguali, $\Theta P > \Delta T$,

*36) $\frac{\Theta K}{\Delta K} < \frac{T\hat{\Delta}K}{P\hat{\Theta}K} < \frac{\Theta P}{\Delta T}$, da cui

37) $\frac{\Lambda\hat{\Delta}\Xi}{O\hat{\Theta}M} < \frac{\Theta P}{\Delta T}$, ma

38) $\frac{\Theta P}{\Lambda T} < \frac{100}{99}$, quindi

39) $\frac{\Lambda\hat{\Delta}\Xi}{O\hat{\Theta}M} > \frac{100}{99}$

Ora sappiamo che

40) $\Lambda\hat{\Delta}\Xi > \frac{1}{200}R$

Sostituendo in 39), $\Lambda\hat{\Delta}\Xi$, si ha

41) $\dfrac{R}{200\mathrm{O}\hat{\Theta}\mathrm{M}} < \dfrac{100}{99}$, da cui

42) $\dfrac{200\mathrm{O}\Theta\mathrm{M}}{R} > \dfrac{99}{100}. = .\mathrm{O}\hat{\Theta}\mathrm{M} > \dfrac{99}{20.000}R. = .\mathrm{O}\hat{\Theta}\mathrm{M} > \dfrac{1}{203}R$ (Archimede)

Poiché $R = \dfrac{1}{4}\mathrm{AB\Gamma}$ (Angolo giro), questo implica che

43) $\mathrm{AB}(corda) > \dfrac{\mathrm{AB\Gamma}}{4x203} = \dfrac{\mathrm{AB\Gamma}}{812}$, (Archimede), da cui a maggior ragione

44) $\mathrm{AB} > \dfrac{\mathrm{AB\Gamma}}{1000}$, ma

45) $\mathrm{AB} = \Sigma\mathrm{H}$ (diametro del sole), ne segue

46) $\dfrac{\mathrm{AB\Gamma}}{1000} >$ lato del chiliago.

Vale allora infine la tesi

47) $\Sigma\mathrm{H}$ (diametro del sole) > lato del chiliago, che, con la nostra notazione, possiamo scrivere

$$* \ D_s > L_{p1000l} = \frac{perimetrochiliago}{1000} \quad \text{c.d.d.}$$