# Un problema di programmazione della produzione

$c_i$ utile per ogni unità di prodotto $i$-mo

$a_{ji}$ quantità di fattore produttivo $j$-mo necessaria per ottenere una unità del prodotto $i$-mo

$b_j$ quantità disponibile di fattore produttivo $j$-mo

$x_i$ quantità, da determinare, di prodotto $i$-mo

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j & (j = 1, 2, \ldots, m) \\ x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

ossia

$$\max \ \underline{c}\, \underline{x}_T$$

$$\begin{cases} A\, \underline{x}_T \leq \underline{b}_T \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{cases}$$

# Un problema di produzione congiunta

Si considerino $n$ processi produttivi, a produzione congiunta, che utilizzano $m$ fattori produttivi per produrre $r$ beni.

Ciascun processo produttivo, attivato a livello unitario, è caratterizzato da una colonna della matrice $A$ $(m \times n)$ dei fattori produttivi e dalla corrispondente colonna della matrice $B$ $(r \times n)$ dei prodotti.

$$
\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\begin{array}{cc} a_{11} & b_{11} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{r1} \\ a_{m1} & \end{array}}^{P_1}
& \cdots &
\overbrace{\begin{array}{cc} a_{1j} & b_{1j} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{rj} \\ a_{mj} & \end{array}}^{P_j}
& \cdots &
\overbrace{\begin{array}{cc} a_{1n} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{rn} \\ a_{mn} & \end{array}}^{P_n}
\end{array}
$$

Una colonna della matrice $A$ indica le quantità di fattori produttivi utilizzati per produrre le quantità di beni indicati nella corrispondente colonna della matrice $B$.

# Un problema di produzione congiunta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrice dei fattori produttivi $(m \times n)$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{h1} & \dots & b_{hj} & \dots & b_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

matrice dei prodotti $(r \times n)$

$\underline{p} = [p_1, \dots, p_h, \dots, p_r]$ vettore dei prezzi di vendita dei prodotti

$\underline{q} = [q_1, \dots, q_j, \dots, q_n]$ vettore dei livelli di attivazione dei processi produttivi

$\underline{a} = [a_1, \dots, a_i, \dots a_m]$ vettore delle quantità di fattori produttivi disponibili

$$\max \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{h=1}^{r} b_{hj}\, p_h \right) q_j$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j \le a_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \right.$$

# Dualità



$$\max \ \underline{p}\, B\, \underline{q}_T$$

$$\begin{cases} A\, q_T \le \underline{a}_T \\ \underline{q} \ge \underline{0} \end{cases}$$

$$\min \ \underline{v}\, \underline{a}_T$$

$$\begin{cases} \underline{v}\, A \ge \underline{p}\, B \\ \underline{v} \ge \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{p}\, B\, \underline{q}^*_T = \underline{v}^*\, \underline{a}_T$$

$\underline{v}^* = [v_1^*, v_2^*, \ldots, v_m^*]$ prezzi ombra dei fattori produttivi

$\underline{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$ prezzi effettivi dei fattori produttivi

$v_i^* / y_i$ indice di redditività del fattore i-mo

$\sum_{i \in I} v_i^* a_i \Big/ \sum_{i \in I} y_i a_i$ con $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ indici di redditività parziali

$\underline{v}^* \underline{a}_T / \underline{y}\, \underline{a}_T = \underline{p}\, B\, \underline{q}^*_T / \underline{y}\, \underline{a}_T$ indice di

# Problema di trasporto

Un bene viene prodotto in $m$ stabilimenti

$$S_1, S_2, \dots, S_m$$

con capacità produttive

$$O_1, O_2, \dots, O_m$$

Il bene è venduto in $n$ punti di vendita

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

che ne richiedono le quantità

$$d_1, d_2, \dots, d_n$$

Sia $x_{ij}$ la quantità di bene podotta in $S_i$ e trasportata in $D_j$

$X = [x_{ij}]$ di tipo $(m, n)$

| | $D_1$ | $D_2$ | $\dots$ | $D_j$ | $\dots$ | $D_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | | | | $x_{1j}$ | | | $O_1$ |
| $S_2$ | | | | $x_{2j}$ | | | $O_2$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_i$ | $x_{i1}$ | $x_{i2}$ | $\dots$ | $x_{ij}$ | $\dots$ | $x_{in}$ | $O_i$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| | | | | $x_{mj}$ | | | $O_m$ |

Sia $c_{ij}$ il costo di trasporto da $S_i$ a $D_j$ per ogni unità del bene prodotto

$C = [c_{ij}]$ di tipo $(m, n)$ matrice dei costi unitari

Determinare una politica di trasporto, cioè una matrice $X^* = [x^*_{ij}]$ che minimizzi il costo di trasporto complessivo

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq O_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

# Problema delle diete

$n$ alimenti $A_1, A_2, \dots, A_n$

$m$ elementi nutritivi $E_1, E_2, \dots, E_m$

$d_{ij}$ quantità di $E_i$ presente in una unità di $A_j$

$D = [d_{ij}]$ di tipo $(m, n)$

Una dieta equilibrata deve contenere almeno la quantità $b_i$ di $E_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$

$c_j$ è il costo di una unità di $A_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$

| | $A_1$ | $A_2$ | $\dots$ | $A_j$ | $\dots$ | $A_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | | | | $d_{1j}$ | | | $b_1$ |
| $E_2$ | | | | $d_{2j}$ | | | $b_2$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $E_i$ | $d_{i1}$ | $d_{i2}$ | $\dots$ | $d_{ij}$ | $\dots$ | $d_{in}$ | $b_i$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $E_m$ | | | | $d_{mj}$ | | | $b_m$ |
| | $c_1$ | $c_2$ | $\dots$ | $c_j$ | $\dots$ | $c_n$ | |

$x_j$ quantità di alimento $A_j$ presente nella dieta

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

# Il problema dello zaino

$P$ portata dello zaino

$p_i$ peso dell'oggetto $i$-mo $(i = 1, 2, .., n)$

$u_i$ valore dell'oggetto $i$-mo

$$\sum_{i=1}^{n} p_i > P$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$V$ volume dello zaino

$v_i$ volume dell'oggetto $i$-mo $(i = 1, 2, .., n)$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i > V$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P \\ \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq V \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

# Un problema di scelta tra investimenti
(atteggiato a problema dello zaino)

$C$ capitale da investire

$c_i$ costo dell'investimento i-mo $(i=1,2,..,n)$

$r_i$ rendimento dell'investimento i-mo

$$\sum_{i=1}^{n} c_i > C$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

dove

$x_i = 1$ se l'investimento i-mo è attuato

$x_i = 0$ in caso contrario

# Un problema di scelta tra investimenti

| | $P_1$ | $\cdots$ | $P_j$ | $\cdots$ | $P_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $\cdots$ | $a_{1j}$ | $\cdots$ | $a_{1m}$ |
| $\vdots$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ |
| $A_i$ | $a_{i1}$ | $\cdots$ | $a_{ij}$ | $\cdots$ | $a_{im}$ |
| $\vdots$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ |
| $A_n$ | $a_{n1}$ | $\cdots$ | $a_{nj}$ | $\cdots$ | $a_{nm}$ |
| | $c_1$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_m$ |

$c_j < \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ per almeno un valore dell'indice $j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

$$\max \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le c_j & (j = 1, 2, \ldots, m) \\ x_i \in \{0, 1\} & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$b_i$ utilità dell'attività $A_i$

# Il problema del commesso viaggiatore

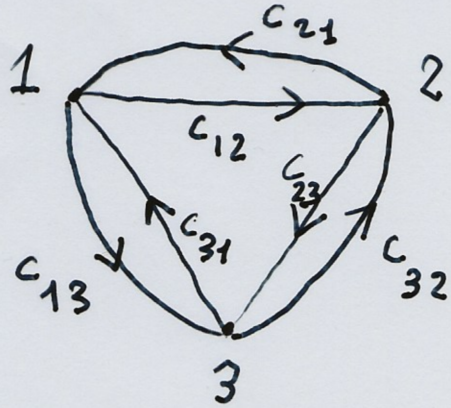
Visitare una ed una sola volta $n$ città partendo da una di esse e ritornandovi eseguendo il minimo percorso.

$c_{ij}$ distanza (costo) per andare dalla citta j-ma alla j-ma;

$c_{ij}$ può essere diverso da $c_{ji}$ se ci sono sensi unici;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il commesso va dalla città i-ma alla j-ma} \\ 0 & \text{in caso contrario} \end{cases}$$

Al problema si può associare un grafo in cui ogni nodo rappresenta una città e ad ogni arco orientato è associata la distanza




La soluzione ottima è il ciclo hamiltoniano di minima lunghezza, cioè il percorso di minima lunghezza che passa una ed una sola volta per ogni nodo e in cui i nodi di inizio e di fine coincidono.

# Il problema del commesso viaggiatore

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

1) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

2) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

3) $$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad S \subset N \quad 2 \leq |S| \leq n-2$$

4) $$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

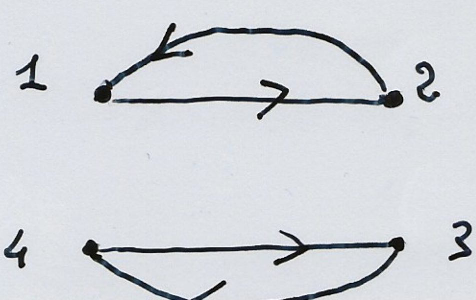
S è un qualsiasi sottoinsieme di nodi di cardinalità compresa tra 2 e $n-2$.

I vincoli 1) : in un nodo può arrivare un solo arco

2) : da un nodo può uscire un solo arco

3) : vincoli di eliminazione dei sottocicli (crescono esponenzialmente al crescere di $n$)

Esempio di sottocicli



# Un problema di produzione con costi fissi

$$c_j(x_j) = \begin{cases} c_j x_j + d_j & \text{se} \quad x_j > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x_j = 0 \end{cases}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} \left( c_j x_j + d_j y_j \right)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_j \leq M_j y_j \\ y_j \in (0, 1) \end{cases}$$

Dai vincoli si ha:

$$x_j > 0 \longrightarrow y_j = 1$$

$$x_j = 0 \longrightarrow y_j = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$ ma in una soluzione ottima si ha $y_j = 0$

# Un problema di localizzazione degli impianti

$K_i$ costo per installare un impianto di capacità $M_i$ nella $i$-ma località

$c_{ij}$ costo di produzione presso l'impianto $i$-mo e di trasporto allo $j$-mo punto di vendita di una unità del prodotto

$D_j$ quantità di prodotto richiesta dallo $j$-mo punto di vendita

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \geq \sum_{j=1}^{m} D_j$$

$x_{ij}$ quantità del bene prodotto dall'$i$-mo impianto e destinata allo $j$-mo punto di vendita

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left( c_{ij} x_{ij} + K_i y_i \right)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq D_j & (j = 1, 2, \dots, m) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq M_i y_i & (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & \\ y_i \in \{0, 1\} & \end{cases}$$

# Scelta di un portafoglio di titoli

$x_i$ quota del capitale unitario investita nell'i-mo titolo $\qquad i = 1, 2, \dots, n$

$r_i$ rendimento atteso di un investimento unitario nell'i-mo titolo

$v_{ij}$ la covarianza tra i rendimenti dell'i-mo e lo j-mo titolo $\qquad j = 1, 2, \dots, n$

$v_{ii}$ la varianza del rendimento dell'i-mo titolo

Rendimento atteso del portafoglio: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$

Rischio del portafoglio, misurato dalla varianza del suo rendimento:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j$$

Minimizzare il rischio col vincolo di un rendimento atteso almeno pari ad un fissato valore $r^*$:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq r^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$