“I numeri reali e il continuo nella scuola secondaria di secondo grado: il ruolo della storia, le scelte degli insegnanti, le difficoltà degli studenti e le potenzialità culturali”

Laura Branchetti

Problema di ricerca preliminare

Proprietà caratteristiche dell'insieme dei numeri reali nella scuola secondaria e università: **difficoltà e convinzioni errate di studenti e insegnanti in formazione**

Non si rinuncia a introdurre i numeri reali

Tentativi di semplificare e rendere **concreta** la complessa relazione tra numeri reali (insieme numerico) e il continuo (oggetto ibrido); **falsi problemi per cui R non è necessario.**

Le formalizzazioni sono alla portata degli studenti?

Linee guida per i Licei

“Lo studente saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel **contesto storico** entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà **il significato concettuale**. Lo studente avrà acquisito **una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico**. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, [....] .

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i **procedimenti caratteristici del pensiero matematico** (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni)”

I numeri reali nelle Linee guida

Primo biennio: “Lo studente acquisirà una **conoscenza intuitiva dei numeri reali**, con particolare riferimento alla loro **rappresentazione geometrica su una retta**. La dimostrazione dell’irrazionalità di 2 e di altri numeri sarà un’importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un’occasione per affrontare il tema dell’approssimazione.

Secondo biennio: “Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà **la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell’infinito matematico** (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico).”

Problemi

1. Come descrivere la **complessità della relazione tra numeri reali e continuo**, per avere uno strumento di analisi epistemologica delle scelte?

2. **Quali aspetti del sapere, quali obiettivi e quali convinzioni** portano l'insegnante a effettuare determinate scelte relative all'insegnamento dei numeri reali?

3. **Quali potenziali correlazioni** ci sono tra le **scelte dei docenti** e le **difficoltà** riscontrate?

4) **Si può (davvero) fare a meno** di curare la relazione tra **continuo "naturale" e numeri reali**?

Quali problemi di ……. **continuità (didattica)** si pongono nella **transizione scuola - università**?

Peculiarità della situazione italiana

K13: l'anno "in più" di scuola secondaria

1) **Insegnanti di scuola secondaria** introducono **i primi teoremi di Analisi** matematica (Teorema dei valori intermedi, Teorema degli zeri, Teorema di Weierstrass, Teoremi di Rolle e Lagrange)

2) **Non c'è distinzione di indirizzo:** tutti gli studenti devono studiare elementi, pur di base, di Analisi matematica

Il ruolo della storia

(nella formazione degli insegnanti e nella pratica d'aula)

Storia e epistemologia dell’oggetto matematico

<< […] chi voglia studiare la **storia dell’infinito matematico** dovrà rivolgersi piuttosto alla sua **immagine speculare,** ed indagare l’evoluzione dei temi e delle teorie legate all’**infinitamente piccolo**.

Tra esse, un posto particolare spetta alle **dottrine del continuo** […]

Il rapporto tra teorie geometriche e struttura del continuo va **in senso contrario alla successione logica** […] il continuo è piuttosto un risultato finale.

In altre parole, **quella del continuo non è una scienza**, una teoria, sulla quale si possa fondare la geometria; **ma piuttosto un’immagine** che si forma nella mente del geometra alla fine delle sue elucubrazioni […]

La geometria genera immagini del continuo; e così ai cambiamenti di punti di vista in geometria corrisponderanno analoghe revisioni della nozione di continuità >>

(Giusti, 2000)

Storia e epistemologia dell'oggetto matematico

Analisi storico-epistemologica: **seconde fonti**

Caratterizzazioni perlopiù non formali del continuo nella storia e nei libri

I numeri reali hanno una **relazione con il continuo** ma non hanno a che fare con gli aspetti più intuitivi della continuità.

I numeri reali non rappresentano l' **"atto finale"** né del percorso di costruzione degli insiemi numerici, né del programma di Aritmetizzazione dell'analisi:

1) Dall'**intuizionismo** (Brouwer, Weyl) all'analisi non-standard (Robinson)
2) **Critiche fondazionali** alle costruzioni classiche dei numeri reali e all'assiomatizzazione (Frege, Russell, Wittengstein) e paradossi (Richard)

Alcune concezioni chiave del continuo **in una prospettiva didattica**

Esempi di concezioni del continuo: Aristotele (IV sec a.C.)

*"**tre tipi di grandezze** [...] la grandezza **discreta**, le cui parti si susseguono consecutivamente senza che tra di esse vi sia alcunché di simile [...]. **Contiguo** è ciò che, oltre ad essere consecutivo, è anche in contatto. [...] Il **continuo** [suneches] è una **determinazione del contiguo** [...] il continuo è in quelle cose da cui per natura vien fuori qualcosa di unico in virtù del contatto.>"* (Giusti, 1990)

Il continuo aristotelico (IV sec a.C.):

1. **Infinitamente divisibile**, ma **NON composto di parti**; **divieto dell'infinito attuale**
2. Caso particolare del contiguo, le parti sono tenute assieme in modo da formare un "tutto",
3. È coerente con la teoria delle proporzioni di Eudosso
4. I numeri possono servire solo per confrontare posizioni (precedente e successivo) su un continuo

Esempi di concezioni del continuo: Archimede (III sec a.C.)

1) Postulato di Archimede
2) "due Archimede", uno che per trovare i risultati **usa quantità infinitesimali**, uno che presenta i risultati; per divieto dell'infinito attuale, Archimede **evita di usare quantità infinitesimali.**

"Dalla lettera di Archimede ad Eratostene si rileva come egli facesse uso per le sue scoperte del metodo delle quantità infinitamente piccole, e, solo per esporre i risultati al pubblico, ricorresse al metodo dell'esaustione e a quello delle serie. [...]" (Maffini, 1996)

Accettava risultati legati a assunzioni non verificate, purché esprimibili in "termini accettabili".

Due concezioni del continuo (III sec a.C.):

1. **Continuo "pratico"**: attualmente infinito, composto da parti infinitesime
2. **Continuo teorico**: potenzialmente infinito, coerente con la teoria di Eudosso e col metodo di esaustione e col divieto delle quantità infinitesime e infinito attuale

Esempi di concezioni del continuo: Ockham e Cusano (XIV-XV sec)

Ockham: tra due punti di una linea continua **c’è sempre un altro punto** (densità).
Due tipi di continuo: quello “le cui parti formano un unità” e quello composto di parti giustapposte; non conclude però che la linea è insieme di punti.

Continuo di Ockham (XIV sec d.C.)

1. **Puntuale e denso, ma non composto attualmente di punti indivisibili;**
2. Le sue parti formano un’unità, non è insieme di punti in successione contigua

Cusano: due continui, *ideale* - infinitamente divisibile - e uno *atomico* - composto di parti indivisibili.

Coincidentia oppositorum: la mente umana può solo investigare cose finite (*docta ignorantia,* 1440*);* questo non prova che non esista l’infinito attuale: “***L’universo è nelle cose in modo contratto, e ogni cosa che esiste in atto contrae i suoi universi, affinché essi siano in atto ciò che essa è***.”

L’infinito è contenuto nel finito: il cerchio è un ***infinilatero*** **- poligono regolare con infiniti lati infinitesimi**.

Esempi di concezioni del continuo: Viéte e Cartesio (XVI-XVII sec)

Geometria classica/numeri, due innovazioni in atto:

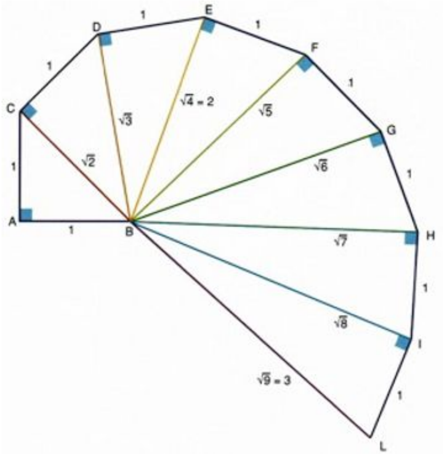
1) Metodi numerici più efficaci (sistema decimale, approssimazione);
2) Sviluppi nel campo dell'Algebra (metodi risolutivi, numeri complessi, Generalità vs Rigore)

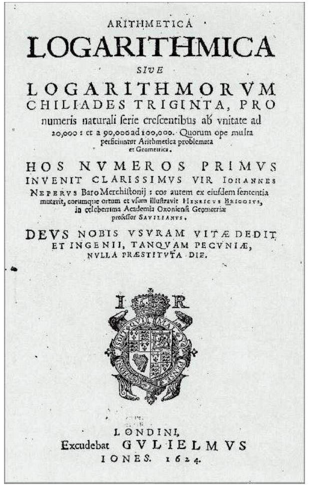
Algebra speciosa (XVI sec d.C.)*:* nuova unità tra Algebra e Geometria, **manipolazione di forme, neutralità delle lettere** (talora numeri, talora grandezze), linearizzazione; procedure algebriche/costruzioni geometriche: nuovi numeri geometrici, nuove procedure, fondato sull'ambiguità delle lettere.

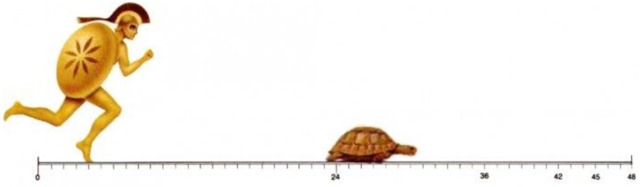
"Numeri reali" e "numeri immaginari" (Cartesio, XVII sec d.C.): metodi geometrici, punti invisibili.

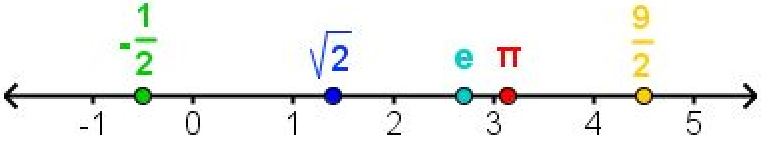
1. Continuo classico delle grandezze (retta euclidea)
2. **Struttura assiomatica sostituita da strutture algebriche** e regole operatorie/procedure
3. Uso di **quantità infinitesimali**, rinuncia al rigore a favore di una maggiore versatilità

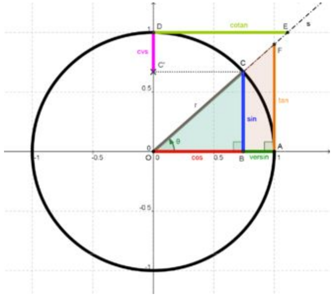
Esempi di concezioni del continuo: Viéte e Cartesio (XVI-XVII sec)



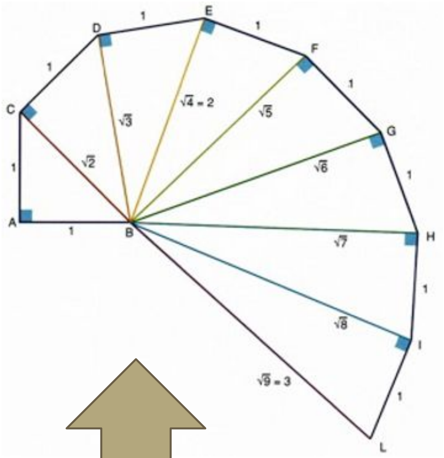

ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS Baro Merchiſtonij: eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
I R
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

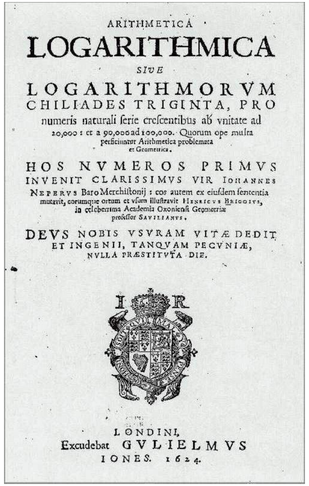






Esempi di concezioni del continuo: Viéte e Cartesio (XVI-XVII sec)





ARITHMETICA

LOGARITHMICA

SIVE

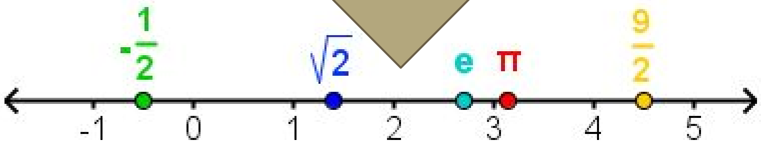
LOGARITHMORVM CHILIADES TRIGINTA, PRO numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad 20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica.

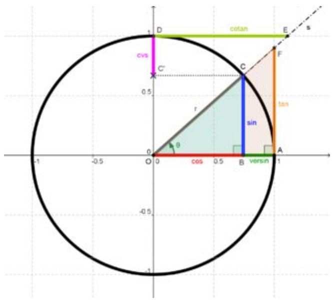
HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES NEPERVS Baro Merchiſtonij: eos autem ex eiuſdem ſententia mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ, NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

I R

LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS IONES. 1624.





Continuo ibrido e “de-assiomatizzato”

1) L’**uso delle lettere** è innovativo perché ricrea un ponte tra due mondi (Aritmetica e Geometria) separati dal problema dell’incommensurabilità e degli irrazionali
2) Riapre uno **spazio per gli infinitesimi** (*dx*, piccolo a piacere)
3) **Linearizzazione e ordinamento** delle grandezze rappresentate con uno stesso simbolo e perciò uniformate
4) Gli assiomi di Eudosso-Euclide vengono sostituiti con le **proprietà delle strutture algebriche “estese” rispetto a quelle di Q** (formulazione moderna)
5) Nascono **“nuovi numeri”** da costruzioni geometriche e **“nuove costruzioni”** iterando processi a livello algebrico (radici n-esime)

In questo continuo si può sviluppare il Calcolo differenziale…..

Esempi di concezioni del continuo: Calculus(XVI-XVIII sec)

Galileo: quantità infinite non possono essere confrontate perché entrambe composte di infiniti elementi (es. Corrispondenza N - Pari)

Cavalieri: “Stratagemma”: non considera l’oggetto composto di quantità atomiche ma considera gli indivisibili come “totalità” per conservare l’aspetto chiave del suo metodo: il confronto tra indivisibili.

Leibniz: non un’unica teoria del continuo; diverse immagini, senza gerarchie:

1. Problemi di variazione qualitativa (es. vita-morte): Continuo con infinitesimi
2. Problema delle tangenti, intersezioni (punti distinti e non distanti): Continuo classico formalizzato
3. Calcolo differenziale (differenze): Continuo iperdenso

"*i valori della variabile, le differenze, le differenze delle differenze, e via sminuzzando, [che] si muovono sempre all’interno del punto strutturato ma inesteso del continuo iperdenso leibniziano. [...] grandezze infinitamente piccole; [...] paragonabili tra loro in modo che uno zero sia più grande di un altro*”(Giusti, 1990)

Esempi di concezioni del continuo: Calculus (XVI-XVIII sec)

Newton: la linea è generata dal moto continuo di un punto; il limite è estremo del movimento.

< *Quantitates Mathematicas, non ut ex partibus quam minimis costantes, sed ut motu continuo descriptas hie considero. Lineae describuntur … per motum continuum Punctorum; Superficies per motum Linearum; Solida per motum Superficierum; Anguli per rotationem Laterum; Tempora per fluxum continuum & sic in ceteris. Hae Geneses in rerum naturae locum vere habent, & in Motu Corporum quotidie cernuntur* > (Giusti, 1988)

Concezione del continuo molto legata a **intuizioni spazio-temporali** ("mito del continuo", René Thom).

Esempi di concezioni del continuo: Aritmetizzazione

Ricerca del rigore (Geometria? Algebra?) per **far accettare l'Analisi**; risultati già ottimi ma "misteriosi"; rinuncia alle intuizioni spazio-temporali (Bolzano in particolare).

Weierstrass, Dedekind, Cauchy, Cantor, Bolzano (XVIII-XIX sec d.C.)

1) Esigenza di formalizzare per rendere rigoroso e accettato da colleghi e studenti
2) Necessità di un postulato di continuità
3) Differenza tra struttura algebrica e retta

Critiche al programma della Aritmetizzazione:

1) **Riduzione del continuo al discreto**, suo "opposto" (es. Aristotele)
2) **Insostituibilità della continuità naturale** con la definizione di continuità formale

Weyl (1987):*"[...] the conceptual world of mathematics is so foreign to what the intuitive continuum presents to us that the demand for coincidence between the two must be dismissed as absurd"*.

Esempi di concezioni del continuo: Aritmetizzazione

"Newton based his ideas of limits and differentiation on intuitions of motion; other mathematicians based their ideas of continuity on spatial intuition. These kinematic and geometric conceptions fell into disfavour in the nineteenth century, as they had failed to provide satisfactory theories of negative numbers, irrational numbers, imaginary numbers, power series, and differential and integral calculus (Bolzano, 1810, preface). Dedekind pointed out that simple irrational equations such as $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ lacked rigorous proofs. Even the legitimacy of the negative numbers was a matter of controversy in the eighteenth and nineteenth centuries (Ewald, 1996, 314 - 336). Moreover, Bolzano, Dedekind, Cantor, Frege and Russell all believed that spatial and temporal considerations were extraneous to arithmetic, which ought to be built on its own intrinsic foundations" (Fletcher, 2007).

Esempi di concezioni del continuo: Aritmetizzazione

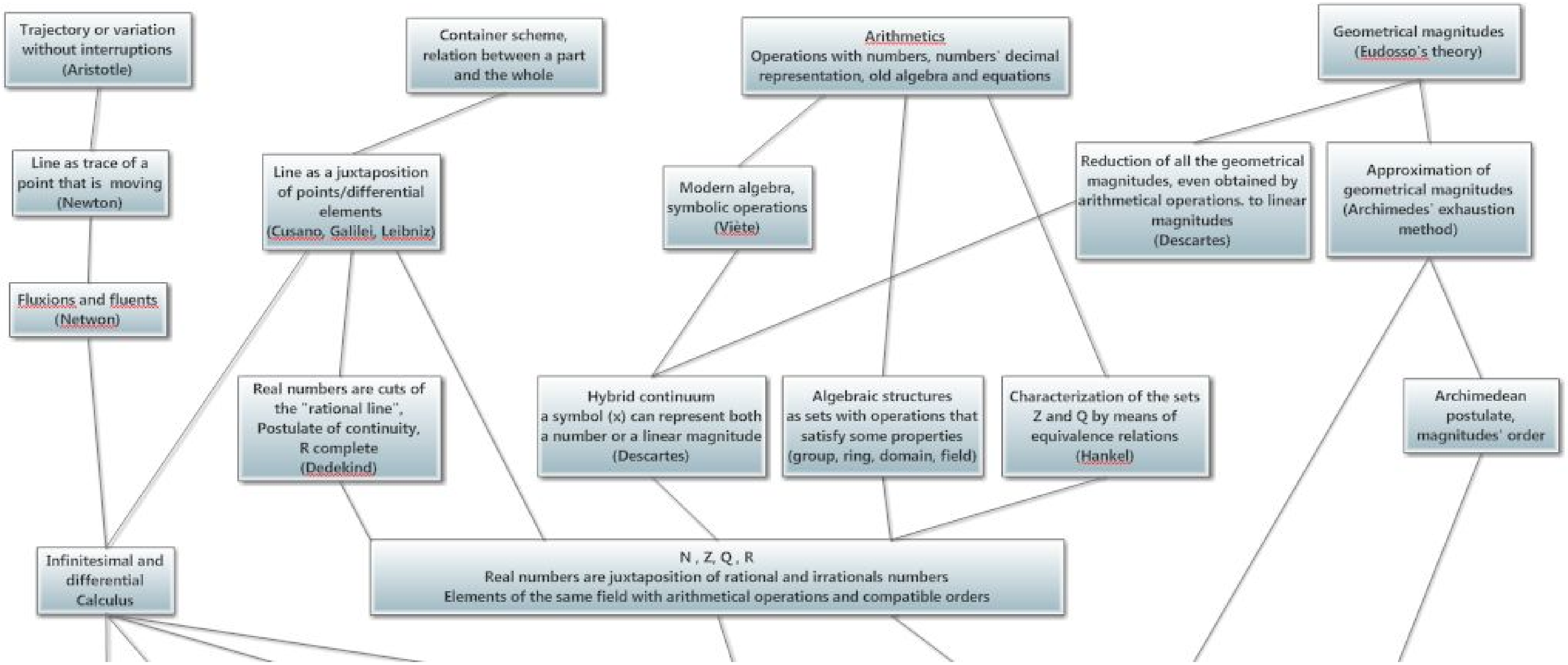
“As a matter of fact, if we take into account that **a proof in science must not at all be just words but argumentation**, i.e. be the exposition of objective cause for **the true being proved**, then it goes without saying, that **if an affirmation is correct only for the values in the space, it may not be correct for all variables, whether or not they are in the space**. The most common kind of proof depends on a **truth borrowed from geometry,** namely, that **every continuous line of simple curvature of which the ordinates are first positive and then negative (or conversely) must necessarily intersect the x-axis somewhere at a point that lies in between those ordinates.** There is certainly no question concerning the correctness, nor indeed the **obviousness**, of this geometrical proposition. But it is clear that it is an **intolerable offense against correct method to derive truths of pure (or general) mathematics** (i.e., arithmetic, algebra, analysis) from considerations which belong to a merely applied (or special) part, namely, geometry. **No one will deny that the concepts of time and motion are just as foreign to general mathematics as the concept of space.** We strictly require only this: that examples never be put forward instead of proofs and that the essence of a deduction never be based on the merely **metaphorical use of phrases** or on their related ideas, so that the **deduction itself would become void** as soon as these were changed» (Bolzano, 1817).

“E infatti solo quando lo **studio di una curva** è stato ricondotto da Descartes allo studio della **variazione simultanea delle sue coordinate**, la teoria delle funzioni si è costituita come elemento necessario per lo sviluppo della scienza. Ora, come spesso accade, **i concetti fondamentali esistevano di già**. [...] Il momento in cui t**utti questi concetti si riunirono e coordinarono fra loro dando origine ad un nuovo ramo delle Matematiche** segna una data memorabile nella storia della Scienza. Come ho detto, **diversi elementi concorsero a creare la teoria delle funzioni.**

Essi non si sono mai completamente fusi, tanto che, anche nei trattati moderni, <u>**è facile riconoscere le suture fra tali materiali eterogenei**</u>. Così, per esempio, nonostante i rapporti che si possono continuamente stabilire fra esse, la teoria delle funzioni analitiche, quella delle funzioni nel senso di Dirichlet, e la teoria geometrica delle funzioni, vengono sviluppate, in generale, con metodi differenti.“

(V. Volterra, Saggi scientifici, 1920)

Alla ricerca di una descrizione del problema in una prospettiva didattica



Difficoltà di apprendimento

(le principali osservazioni in ricerche a livello nazionale e internazionale)

Difficoltà di apprendimento

1) Numeri irrazionali
2) Infinito
3) Punti di una retta
4) Densità e continuità
5) Linea dei numeri

Macrocategorie:

1) **Tipi di numeri**: “importazione” di regole operatorie e proprietà note con nuovi numeri (algebrici, irrazionali, decimali infiniti, successivo, infinitesimi)

2) **Rappresentazioni, pratiche e proprietà:** alcune proprietà sono associate ad alcune rappresentazioni ma non ad altre, per via della peculiarità della rappresentazione (es. rappresentazione grafica - densità) e delle pratiche

Difficoltà di apprendimento

1) Difficoltà degli studenti e solo talvolta i precedenti percorsi didattici
2) Difficoltà registrate spesso puntualmente

Numeri irrazionali: difficoltà a **dare senso a rappresentazioni** dei numeri irrazionali

Fischbein et al. (1995): ipotesi di **scarsa intuibilità**

Al contrario non riscontrarono questo: difficoltà ridotte notevolmente con un lavoro opportuno; **ignorare le complessità per semplificare è da evitare.**

Difficoltà di apprendimento

Infinito: *dipendenza*, **più punti in un segmento più lungo** che in uno più corto; finito -> infinito

Punti di una retta: modello intuitivo della **"collana di perle"** (Tall, 1980; Fischbein, 1995): discreto, contiguo ma non continuo.

Visualizzazione di densità e continuità:

Bagni (2000): visualizzazione della densità; confusione tra continuità, densità e connessione

- **Concezioni degli insegnanti e degli studenti** sono simili (Dias, 2002); studenti orientati a una visione atomistica (Dias, 2002; Robinet, 1986).
- Tall (1991) gli studenti hanno **scarse abilità di visualizzazione nel Calcolo**, che porta a una povertà di significato degli aspetti formali dell'Analisi.

Difficoltà di apprendimento

“By introducing *suitably complicated* visualizations [...], examples which work and examples which fail, it is possible for the students to gain the visual intuitions necessary to provide powerful formal insights. Thus intuition and rigour need not be at odds with each other. By providing a suitably powerful context, **intuition naturally leads into the rigour of mathematical proof.”** (Tall, 1991)

Linea dei numeri: alto potenziale per organizzare il pensiero relativo a numeri e operazioni ma anche molte difficoltà che emergono nell’uso (Skoumpourdi, 2010)

Le difficoltà con la linea dei numeri sono molteplici a tutti i livelli, soprattutto per la rappresentazione delle **frazioni** (Lemmo, 2015; Saxe et al., 2007; Behr & Bright, 1984; Lesh et al, 1982)

Concept image e concept definition (Tall & Vinner, 1981)

Concetto: struttura composta da immagini e definizioni associate a un medesimo oggetto; le definizioni dovrebbero evocare immagini del concetto (*concept image definition)*

Non garantita una coerenza complessiva; opportuni conflitti cognitivi.

- ***concept image*** : insieme delle immagini mentali attribuite a un concetto, potenzialmente in conflitto cognitivo in opportune condizioni (attivazione simultanea);
- ***concept definition*****:** espressione verbale che identifica il concetto;
- ***concept definition image***: *concept image* evocata dalla *concept definition*;
- ***cognitive conflict factors*****:** aspetti di incoerenza tra immagini della stessa *concept image* che attivati simultaneamente possono dare un senso di fastidio o mancanza di unità

Analisi matematica: **scollamento tra dimensione formale e immagini**, a una definizione non corrispondono immagini. Problemi nella transizione da intuitivo a formale all'Università;

Concept image e concept definition

Le funzioni possono essere considerate **continue per ragioni diverse da quelle formali:**

1) "because it was given by only one formula."
2) "it is all in one piece."
3) "it has it a smoothly varying graph"

Matematicamente corrette? Tappe storiche per il concetto di funzione: D'Alembert, Arbogast, Euler.

La funzione di Dirichlet, ovunque discontinua, non può essere valutata attraverso questi criteri.

Le immagini possono essere ricontestualizzate: distinzione tra **insiemi continui e discontinui**, intervalli di numeri razionali o di numeri reali.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = 1/x \quad (x \neq 0)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ rational}) \\ 1 & (x \text{ irrational}) \end{cases}$$

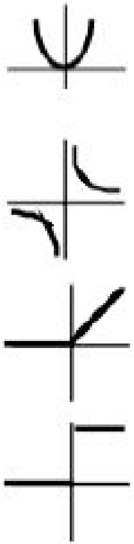


Fig. (Tall & Vinner, 1981; p. 14-15)

Proprietà di R o di una sua rappresentazione?

Sperimentazione in una **quarta Liceo scientifico**

Da Euclide a Dedekind

Domanda: 0 è il successivo di qualche numero naturale/intero/razionale/reale?

a. **Non è il successivo di nessun razionale**, perché Q è denso in Sè stesso

b. **È il successivo di un numero reale**: il massimo dei minoranti di 0 (rappresenta in punto estremo del segmento “prima” del”origine)

Difficoltà a concettualizzare in forma grafica le proprietà dell’insieme dei numeri reali (che non hanno origine grafica)

Studi relativi a studenti universitari

“ There are many studies on different aspects of learning, understanding and implementing proof (Hanna and Jahnke, 1996; Yackel and Hanna, 2003). **Students have difficulties in differing proofs from other less rigorous types of argumentation** (Chazan, 1993; Hoyles, 1997), making the **transition from informal to formal reasoning** (Tall, 1999) and constructing proofs.”

A general qualitative step in this transition is with respect to **an increased level of abstraction**, a **difficult transition from intuitively-based concepts to formal definitions.**

This level is in a sense increasing continuously through the whole educational system, but is seen by many as a **crucial difference between upper secondary school and university** (see, for example, several of the articles in Tall (1991)).

Studi relativi a studenti universitari

Bergé (2016): To prove what seems to be evident

Studenti universitari in Argentina (età dei nostri di Quinta)

Domanda: [dopo aver riportato una formulazione del Teorema di Bolzano dei valori intermedi]

Secondo te perché si deve dimostrare?

1) **Perché si deve svolgere come esercizio di dimostrazione**
2) **Si vede ma in matematica bisogna scrivere le dimostrazioni in modo formale**

Effettuare un passaggio alle costruzioni formali dei reali come strutture algebriche senza un'adeguata transizione contribuisce a formare idee distorte anche della matematica stessa, lascia un senso di vuoto esercizio.

Studi relativi a studenti universitari

Esempi e controesempi…. (Antonini)

Richiesta: Trovare e rappresentare **una funzione definita da un intervallo di R intersecato con Q in Q** che **non verifichi il teorema di Weierstrass**

Studenti di Matematica e studenti di Dottorato in Matematica

https://drive.google.com/file/d/0B6KS3VLW5O3gVERxM0ZvSmRNQzRPWE42Z2hDc3lpdHczblFr/view?usp=sharing

Intuizione secondaria per la transizione verso gli aspetti formali della Advanced Mathematics (AMK)

Primary intuitions: “**develop in individuals independently of any systematic instruction** as an effect of their personal experience” (Fischbein, 1987, p. 202).

Secondary intuitions: “those that are acquired, not through natural experience, but **through some educational intervention**” (Fischbein 1987, p. 71).

“Secondary intuitions [....] **when formal knowledge becomes immediate, obvious, and accompanied by confidence.“**

Spesso l**’intuizione secondaria è in conflitto con quella primaria** e questo genera *impasse* quando si attivano l’una o l’altra

“La retta dei numeri reali”: metafore concettuali al cuore della relazione tra semiotica, epistemologia e cognizione del continuo

Come la mente umana concettualizza l’infinito in senso attuale?

Cosa c’entra l’infinito col movimento?

Cosa c’è di denso in una retta pensata come traccia di un movimento?

Perché un qualsiasi numero decimale irrazionale può essere rappresentato su una retta come un punto?

“La retta dei numeri reali”: metafore concettuali al cuore della relazione tra semiotica, epistemologia e cognizione del continuo

Basic Metaphor of Infinity

Source domain **Iterative completed processes**	Target domain **Iterative processes that ever go on**
Initial state	Initial state
Resulting state from the initial state	Resulting state from the initial state
Process of production of the consecutive state starting from a given one	Process of production of the consecutive state starting from a given one
The intermediate result after a given iteration	The intermediate result after a given iteration
The partial superposition of container schemas	Intersection of two classes
The final resulting state	**“The final resulting state” (actual infinity)**
Consequence E: The final state is unique and precedes every non-final state	**Consequence E: The final state is unique and precedes every non-final state**

“La retta dei numeri reali”: metafore concettuali al cuore della relazione tra semiotica, epistemologia e cognizione del continuo

Continuity of functions is proximity

Source domain **Numbers**	Target domain **Naturally continuous space**
Discrete numbers	Discrete positions of points
Sets of numbers	Curves
Numbers in the sets of numbers	Positions of points on the continuous line
Functions are maps from discrete numbers, belonging to sets, into discrete numbers, belonging to sets.	Functions are maps from points on continuous curve to points onto continuous curves.
Conservation of numerical proximity for functions in discrete domains	Continuity of functions on continuous curves.

Eredità della **metafora di Cauchy-Weierstrass**: accettata e non discussa (Lakoff & Nunez, 2000):

1. I punti su una linea sono numeri
2. Le funzioni sono coppie ordinate di numeri
3. La continuità di una linea è un'assenza di buchi
4. La continuità di una funzione è conservazione della prossimità

Nunez (1999):

La discretizzazione di Weierstrass sembra "naturale" ; problema pedagogico:

- gli insegnanti introducono improvvisamente la concezione di continuità secondo Cauchy-Weierstrass proponendola come **essenza della continuità**;

- mancanza di attenzione alla **natura intrinsecamente metaforica** della relazione tra numeri reali e continuo.

Le scelte degli insegnanti

(lo studente universitario come futuro insegnante e l'impatto della pratica didattica)

Aspettando il momento giusto.....

1. Nei primi anni della scuola secondaria è importante dare intuizioni grafiche di continuità, completezza, densità, punto di accumulazione, numero decimale, elemento separatore (registro grafico)

2. Alla fine della scuola secondaria si da per scontato che gli studenti conoscano ciò che serve i numeri reali

3. Nei corsi di Analisi si introduce una costruzione formale di R ma le questioni profonde non possono essere affrontare all'inizio in quanto non è necessario per comprendere i Teoremi.

4. Nei corsi di Matematiche complementari o fondamenti della Matematica spesso si introducono le costruzione dei numeri reali in qualche ora.

… un momento che non arriva mai

Anche a livello internazionale si osseva che **di rado gli studenti terminano i percorsi** universitari o di dottorato **avendo un quadro chiaro e complesso** sulla relazione tra continuo e numeri reali

Impatto sui **futuri insegnanti**

Metodologia della ricerca con gli insegnanti

109 insegnanti di Matematica di scuola superiore in servizio:
25 (pilot study); altri 84 (questionario-fase 1) di cui 70 insegnanti (questionario completo); 4 intervistati in focus group senza questionario (differenze?); 7 focus group e 5 interviste individuali.

Diverse caratteristiche: background matematico; formazione come docenti; anni di esperienza nella scuola superiore; tipo di scuola in cui hanno insegnato.

Questionario
- Formazione (laurea o dottorato, corsi di formazione o abilitazioni)
- Conoscenza matematica
- Obiettivi legati all'introduzione di R
- Materiali didattici, problemi posti agli studenti, rappresentazioni

Interviste individuali

Analisi dei dati: la formazione degli insegnanti

- PhD in Matematica: 3
- PhD & Formazione insegnanti: 5
- Laurea in Matematica : 29
- Laurea in Matematica e Formazione insegnanti: 18
- Laurea scientifica (Fisica, Ingegneria): 5
- Laurea scientifica & Formazione insegnanti: 5
- Altro & Formazione insegnanti: 6
- Altro: 13

Conoscenza debole in Matematica implica scelte non idonee relative all’insegnamento dei numeri reali e del continuo (Arrigo & D’Amore, 1999, 2002; Gonzales-Martin, 2014)

Domanda complementare: **una buona conoscenza garantisce scelte idonee?** Quali fattori?

Focus sulle scelte di insegnanti con un **buon sapere in Matematica** e con altri requisiti che potenzialmente implicano una migliore qualità delle scelte.

La conoscenza matematica degli insegnanti

***3. Le proprietà fondamentali dell'insieme dei numeri reali sono:**

39 insegnanti (50,5%) globalmente più **orientati a proprietà intuitive o introduzione di nuovi numeri**, mentre **27** (35%); più orientati a **proprietà di Advanced Math**; **11** insegnanti (14,5%) hanno una posizione **intermedia**.

CC5: **Axiomatic configuration** (29%)

CC1: **Topological/differential configuration** (19,5%)

CC4: **Algebraic configuration** (15%)

CC6: **Line - systemic configuration** (15%)

CC3: **Numeric – unitary configuration** (9%)

CC2: **Numeric - systemic configuration** (5%)

CC7 : **Line - unitary configuration** (4,5%)

CC8: **Relation between Q and R** (4%).

La conoscenza matematica degli insegnanti

*4. In ogni estensione numerica ($N \rightarrow Z$, $Z \rightarrow Q$) c'è una operazione "critica" sugli elementi dell'insieme di cui si effettua l'estensione, ad esempio sottrazione, divisione, che porta alla definizione di un nuovo insieme. Come si può effettuare la costruzione di R a partire da Q?

IC1) Dedekind (Cuts): [14]
IC2) Hilbert (Axiomatic): [2]
IC3) Cantor, Cauchy, Weierstrass (Limit points): [25]
<u>IC4) Root square and π (Example of irrational numbers, R is an enlargement of Q): [53]</u>
IC5) Union of different kind of numbers (Rational/irrational, Algebraic/Transcendent): [11]
IC6) Correspondence with the points of a line: K3N [3]

La conoscenza matematica degli insegnanti

***5. Secondo Lei si può definire un punto di accumulazione nell'insieme Q oppure è necessario usare i numeri reali?**

K4_A: Q è sufficiente [40]
K4_B: **R è necessario** [32]
K4_C: Altro [5]

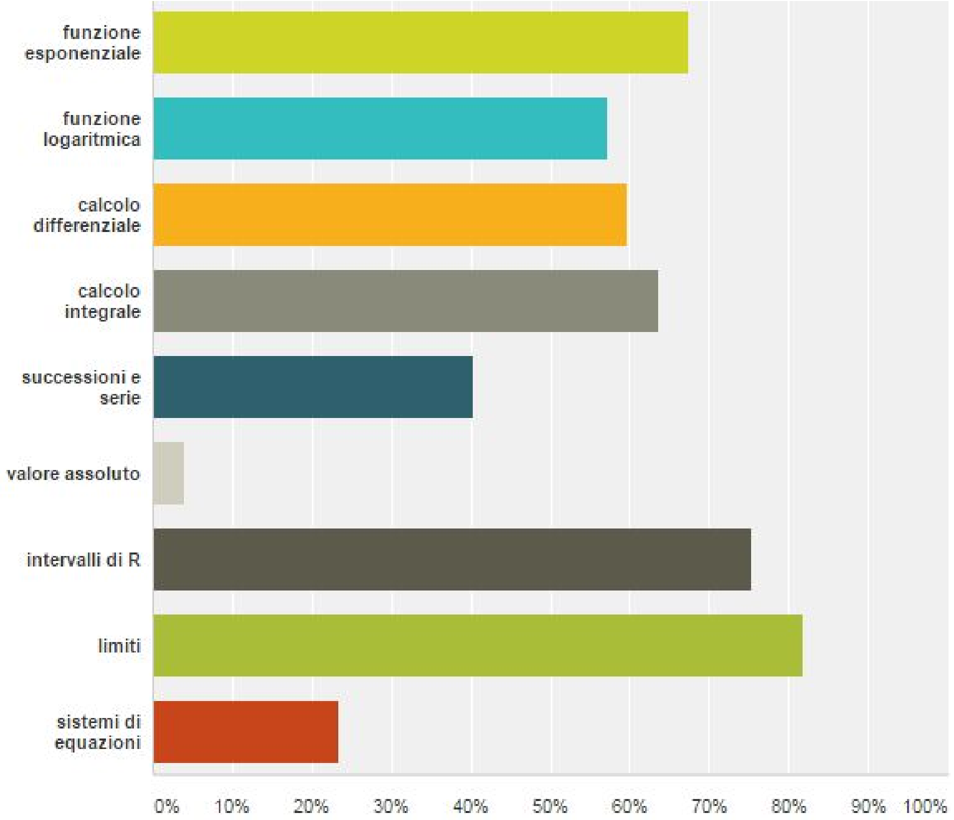
	LL	LU	UU	UL	MLU	MLL	MLI	MUU	MUL	DON'T
K4_A	17, 80, 89, 98, 104, 106	56,67	9, 21, 61	15, 37, 47, 74,	16, 55, 57, 110,	1, 22, 32, 38, 53, 93, 111	2, 4, 58, 62, 63, 72, 77		7, 10, 40, 78	20, 39, 76, 84
K4_B	46, 60, 79	100	68,95	5,41, 85, 105	64, 65, 66, 88	14, 83, 90, 108, 115	8, 11, 42	73	18, 26, 87, 91	101
K4_C			71	25	116	92			13	

Tab. 1

Molto **eterogeneo;** distribuzione più complessa di quella attesa.

Gli obiettivi perseguiti dagli insegnanti

D7: **La padronanza delle proprietà dell'insieme dei numeri reali è indispensabile per introdurre (può selezionare più risposte):**



R è un prerequisito per **quasi tutto** [49]

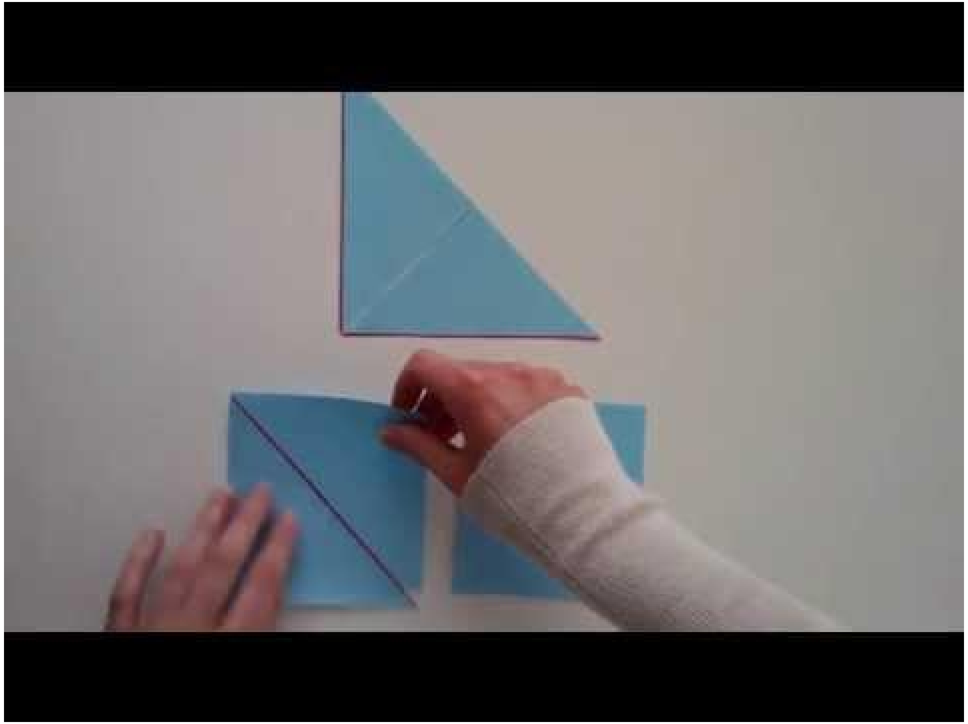
R è necessario **in senso intuitivo** [12]

R **non è necessario** [2]

R necessario **per matematica avanzata** [7]

Le convinzioni degli insegnanti: la “realtà” dei numeri irrazionali

Gruppo D8-D9



Le convinzioni degli insegnanti

D8: Osservi il primo minuto del video al seguente link:http://www.youtube.com/watch?v=jk08WkwqT-Q .
Cosa pensa dei supporti materiali utilizzati (cartoncino, disegni, etc.)? Scelga una o due opzioni

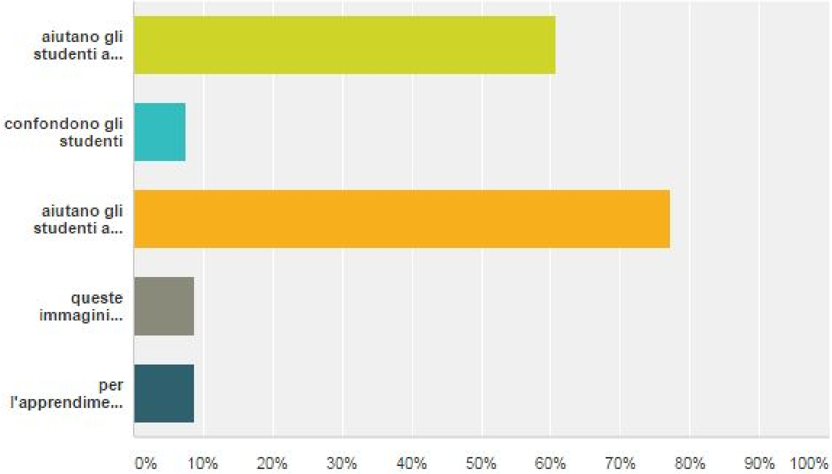
aiutano gli studenti a comprendere i numeri reali

confondono gli studenti

aiutano gli studenti a crearsi una immagine dei numeri reali che potrà essere utile in seguito

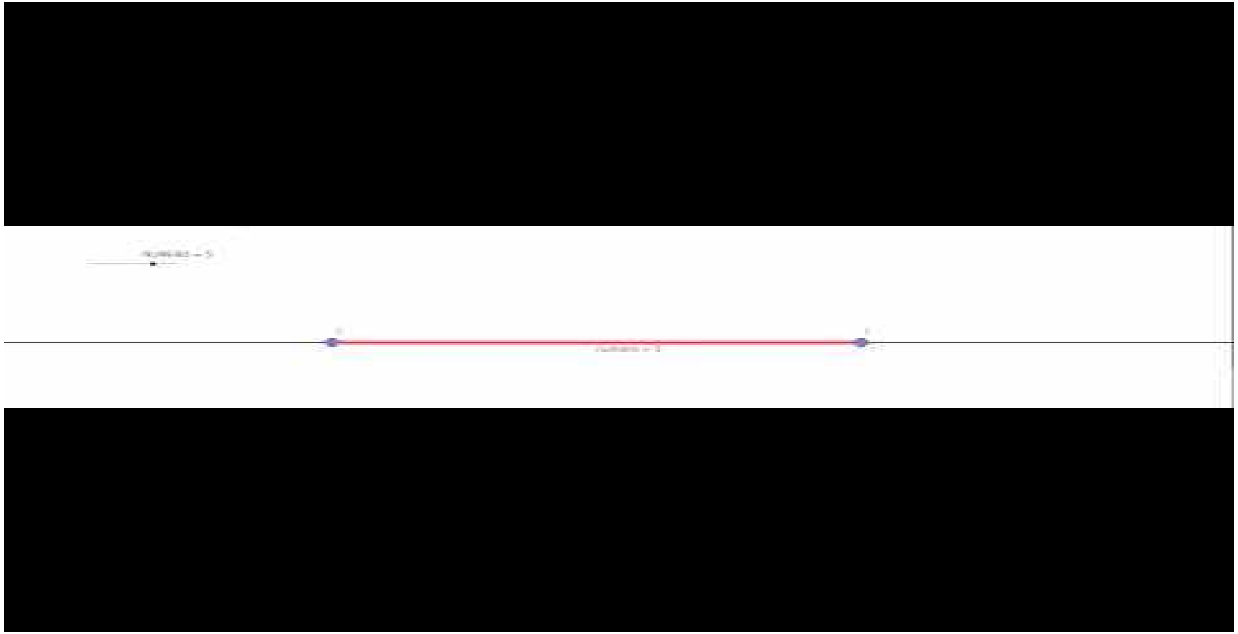
queste immagini saranno molto utili al momento di imparare a risolvere le disequazioni di secondo grado

per l'apprendimento di questi contenuti non sono necessari supporti di questo tipo



Le convinzioni degli insegnanti: la “corrispondenza fluida” tra numeri reali e punti della retta

D 10. Osservi il video al seguente link: http://www.youtube.com/watch?v=kuKTyp_b8WI. Il video può aiutare uno studente a comprendere la corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta



Le convinzioni degli insegnanti

D 10. Osservi il video al seguente link: http://www.youtube.com/watch?v=kuKTyp_b8WI. Il video può aiutare uno studente a comprendere la corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta?

Sì, perché	Risposte	40,51%	32
No, perché	Risposte	64,56%	51

Sì, perché....

O17_A: Makes **evident the association between numbers and segments** / visualization numbers and points

O17_B: The flow of the endpoint is very effective to show the **order of real numbers**

O17_C: The students have a graphic vision of the problem:

O17_D: It's intuitive

O17_E: **Makes evident, avoiding not useful words, the completeness/density of R**

O17_F: To propose examples is always good

O17_G: Thinks that reinforcing conceptions of real numbers through visual images of continuity is a good choice .....

Le convinzioni degli insegnanti

No, perché ...

O23: Thinks that **density and continuity can't be distinguished by means of graphic representations** (other problems are necessary)

O25: The flow of the slider of the second video would represent the correspondence with real number (A) if there were no numbers on the line that may suggest a partition in steps (B)

“Lo studente non può vedere ad esempio π o √2”

“Lo slider ha passo uguale a 0.1 e sembra che i numeri razionali ricoprano la retta reale”

O29: It's **impossible to see the correspondence in this way**

O32: The visive intuition is **not enough** to make the student **understand the deep questions concerning the correspondence**

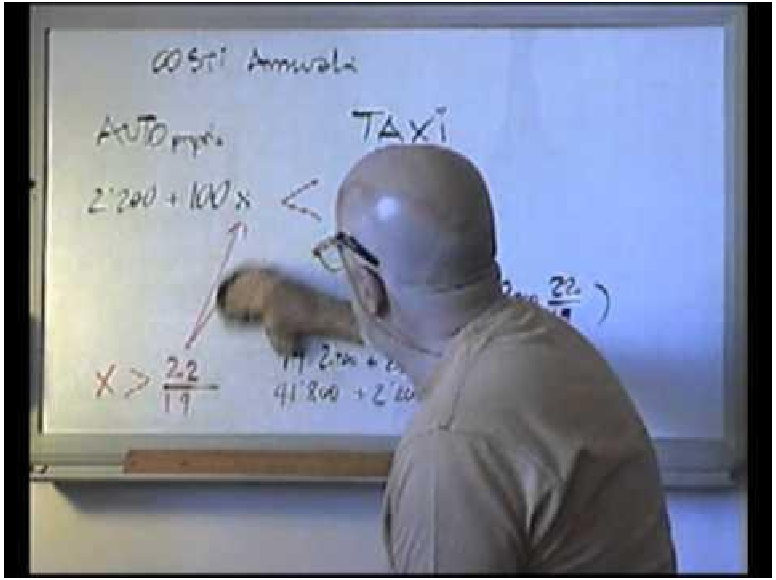
O36: It seems that length and numbers are the same thing / lack of unit

“Cercherei di non confondere tra numeri e punti”

Le convinzioni degli insegnanti: rappresentazioni di intervalli di Q e di R

D11) Osservi il video seguente, in particolare dal minuto 10:20 al minuto12:10 http://www.youtube.com/watch?v=UEBK5DfPxvk . Lei cambierebbe qualcosa nella spiegazione?

D12) Crede che sia opportuna la distinzione tra soluzione algebrica e grafica di una disequazione?



Opzioni di risposta		Risposte	
Sì, perché	Risposte	55,41%	41
No, perché	Risposte	48,65%	36

Un libro di testo propone questo esercizio.

13.

$$\begin{cases} |x-1| < 3 \\ |x-4| < 2 \end{cases}$$

Queste sono alcune soluzioni proposte da studenti.

1. $$|x-3| < 1$$

2. $$2<x<4$$

3. $$x > 2 \wedge x < 4$$

4. $$[2,4]$$

5. 

***13. Quali tra queste metterebbe come soluzione dell'esercizio nel libro di testo? Le n°**

***14. Cosa pensa delle soluzioni fornite dagli studenti?**

Un libro di testo propone questo esercizio.

1. Quali sono gli elementi di questo insieme?

$$\{x \in D \,/\, x^2 < 5\}$$

Queste sono alcune soluzioni proposte da studenti.

1. 

2. $$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

3. $$[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

4. $$]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$$

5. $$|x| < \sqrt{5}$$

***16. Quali tra queste metterebbe come soluzione dell'esercizio nel libro di testo e perché? Le n° ....**

***17. Cosa pensa delle soluzioni proposte dagli studenti?**

Le convinzioni degli insegnanti: intervalli

1) Usare **diverse rappresentazioni**/pratiche per gli intervalli è fondamentale
2) C'è una **gerarchia** tra le rappresentazioni degli intervalli

a. La rappresentazione grafica è migliore, più intuitiva, più sintetica
b. La rappresentazione algebrica è migliore, più precisa, più formale

"Per passare dalla presentazione grossolana della grafica alla soluzione raffinata dell'astrazione algebrica"

c. La rappresentazione **grafica "rappresenta" quella algebrica**

"a mio avviso non esiste una "soluzione algebrica" ed una "soluzione grafica" della disequazione; la seconda è una "rappresentazione" convenzionale della prima"

"Devono imparare a vedere la soluzione grafica come espressione grafica dell'algebrica."

d. La rappresentazione **algebrica "rappresenta" quella grafica**

Insegnante 1: I reali sono più intuitivi dei razionali

PhD teacher, ma le pratiche propone non sono rappresentative della complessità dell'oggetto.

a. Gli studenti percepiscono **i numeri in modo continuo**
b. Gli studenti hanno **concezioni spontanee** dei numeri reali come **sequenze di numeri**
c. Gli studenti vedono il continuo, **le classi contigue**
d. Mostrare che **N è equipotente a Q è semplice**, passare da Q a R no

- Convinta che quasi tutto ciò che riguarda R sia **intuitivo e innato**

- Configurazioni significative, ma **mancano i sistemi di pratiche intermedi** e le connessioni
- Cerca di **connettere tutto direttamente a configurazioni di base**, evitando configurazioni parziali
- Consapevole che **gli studenti** (la maggior parte) **"non vedono il problema**

Insegnante 2: Il segmento è paradigma della vita

Laureata in Matematica, Abilitata in Matematica e Fisica, Corsi di formazione

Buon Sapere, con qualche ingenuità.

Sequenza **non molto ambiziosa** ma **ben bilanciata** nel complesso.

a. Introduce R immediatamente, nella **prima lezione** “almeno un’idea”

b. Introduce **la densità del segmento** dicendo “Non abbiamo una penna così sottile” (“configurazione finale” per infinitesimi, BMI).

c. Presenta **il passaggio da Q a R graficamente**, tra i razionali ci sono numeri irrazionali

d. Considera affascinante che una cosa finita possa avere in sé **qualcosa di infinito**

e. È importante portare avanti **discorsi in parallelo tra Geometria e Algebra** in relazione ai numeri e all’infinito: “Mostro il segmento e dico che c’è una corrispondenza, ma potrei anche farlo in Q”

Insegnante 3: conquista culturale

Laurea in Matematica, Formazione in Didattica della matematica.

Un approccio tramite il concetto di campo, o meglio chiusura rispetto alle operazioni per **ampliamento di insiemi numerici** (approccio storico)

b. **Paradosso di Zenone** (3a) per anticipare la definizione di limite e la topologia della retta (Filosofia)

c. Matematica e musica: introduce da N a C diversi concetti tutti connessi alla **scala musicale** (rapporti, tastiera logaritmica, irrazionali non geometrici, trasformata di Fourier)

d. Differenza tra **numeri geometrici e non geometrici**; non rappresenta Q sulla retta

e. Soluzione di **equazioni** fino a C

f. **Pi Greco** day a scuola: approssimazioni e presenza in natura

g. Introduce le classi contigue e **i punti di accumulazione per "dovere", ma non li usa perché non efficaci** (tutto è inventato per R)

h. **Non è ovvio** che la retta sia in c**orrispondenza biunivoca con i numeri reali**

Insegnante 3: conquista culturale

Situazioni-problema:

1) **Geogebra**: problematizza lo spessore di rette e significato di punto chiedendo di usare lo zoom (il disegno non è l'oggetto)
2) Chiede agli studenti **che tipo di numeri** sono e, π, sin π, ln 3
3) Chiede agli studenti: "Puoi dire con certezza che c'è una corrispondenza tra retta e numeri?"
4) Usa molto intervalli bucati o intervalli aperti
5) Evita di usare le sequenze per non creare **corto-circuiti tra discontinuo e continuo**
6) Problematizza il passaggio da entità discrete a continue, da oggetti 0-dim a oggetti 1-dim etc

Consapevole del ruolo chiave del **processo di rappresentazione** in questo ambito, apre tanti percorsi che mette in relazione attraverso nuovi problemi.

Evita di formalizzare, anche per una sua convinzione personale, propone problemi agli studenti, interdisciplinarità con musica e filosofia, usa i software, connette diversi aspetti: **non confonde la complessità con la formalizzazione.**

Insegnante 4: Pseudo-matematica

PhD teacher, Abilitazione in Matematica e Fisica, assistente di Matematica

a. Introduce numeri **reali come punti di una retta**, prendendo per scontata la preconcezione corrispondenza, che “per quello che dobbiamo fare” è sufficiente

b. **Densità, completezza, continuità** sono nel mondo delle idee, le usa **senza esplicitarle**

c. Usa **approssimazioni razionali** fingendo di lavorare in Q ; “viviamo continuamente con **una doppia verità: scriviamo formalmente nell’insieme R ma lavoriamo su disegni e calcoli”**

d. Pensa che si possa insegnare poco nella scuola secondaria, una pseudo-matematica, un **“barlume”** coerente con la Matematica vera.

e. Consapevole di **questioni epistemologiche**, **le tiene fuori dal percorso** che propone ai suoi studenti perché non crede che si possano capire nella scuola secondaria .

Insegnante 8 e 10: meglio la linea continua

Laureati in Matematica, molti anni di esperienza, Abilitazione in Matematica e Fisica

a. A scuola si deve raccontare un po’ di storia e **incuriosire**, ma **non c’è bisogno** di “questa roba” (costruzioni formali)
b. L’approccio **migliore è quello grafico e intuitivo**
c. Problema della diagonale, esistenza di irrazionali per ampliare Q, classi contigue e elemento separatore e basta; R serve per le **funzioni esponenziali, grafico continuo.**

d. Le scelte dipendono dalla difficoltà degli studenti: **semplificano il più possibile**

e. Introducono la densità dicendo che i numeri non sono consecutivi

f. Introducono l’elemento separatore per **completare con continuità la funzione esponenziale**

g. Per rappresentare la **corrispondenza tracciano una linea continua**

Convinzione che tutto ciò che serve si può semplificare e rendere intuitivo

Insegnante 8 e 10: meglio la linea continua

Differenze:

Insegnante 8

Questioni formali considerate **sottigliezze evitabili**. Sostiene più volte di ricordare confusamente quello che l'insegnante di Analisi introduceva (Intervalli incapsulati) e di ricordare che Pi greco si costruisce in un altro modo.

Formalizzando gli studenti si confondono.

Insegnante 10

Ammette di non aver **mai capito nulla delle costruzioni di R**, di dimenticarle "il giorno dopo".

Gli studenti non capiscono queste cose, per questo motivo non formalizza.

Insegnante 11: continuo/discontinuo

PhD teacher (Analisi Matematica), Docente di Matematica e Fisica

1) Usa il **parallelismo con la Fisica** per rendere chiara la differenza tra continuo e discontinuo, insistendo sul **concetto di modello**
2) Introduce dalla classe terza **variazioni, intuizione dei limiti in Fisica**
3) Introduce **R per la funzione esponenziale**: procede passo passo per proprietà. <u>Si rende conto</u> che dice di completare con continuità, ma in realtà **suppone la continuità**
4) Riflette sulla particolarità della relazione **continuo-discreto** da scuola primaria a secondaria: cosa viene considerato più naturale?
5) Introduce **continuità su punti isolati**, insiemi connessi, funzioni patologiche
6) Gli studenti spesso fanno domande che lei non comprende e si rende conto che le loro **immagini di continuità sono molto stereotipate**, ma non sa come procedere

Dà grande importanza agli **aspetti formali e all'interdisciplinarità**; riscontra a volte tentativi degli studenti di usare immagini visive e intuizioni al posto di approcci formali da lei sperati.

Insegnante 11: continuo/discontinuo

Insegnante 11

Propone **attività significative.** Si pone problemi e reagisce positivamente alle proposte innovative.

Portata a riflettere sull'ambiguità del processo **"completare per continuità la funzione esponenziale"** si rende conto immediatamente del problema (siamo noi a dare per scontato che sia continua) e progetta di cambiare, chiedendo aiuto.

Molta flessibilità al cambiamento.

Differenze:

a. Conoscenza avanzata dell'Analisi Matematica, importanza della formalizzazione
b. Consapevolezza delle relazioni tra intuizione e aspetti formali A
c. Attenzione a aspetti interdisciplinari
d. Formazione in Didattica della matematica

Relazione tra profili e scelte

Regolarità nelle risposte degli insegnanti:

1. Nessun insegnante menziona la necessità di un **Postulato di continuità** per identificare la retta (percettiva) con una costruzione algebrica (campo dei numeri reali) (4.1 and 4.2);

2. R come **classi contigue in senso intuitivo** (elemento separatore) (4), 2 dei quali per dovere.

3. Problema chiave: **dare senso a esponenziale come funzione continua** e a numeri con esponente irrazionale (es. $2^{\sqrt{2}}$) (3)

4. Primo irrazionale è **diagonale del quadrato** per tutti; solo 1 spiega che esistono numeri geometrici e non geometrici, numeri algebrici e trascendenti

5. Numeri reali sono intesi come **ampliamenti di Q con qualche elemento irrazionale**; le proprietà che contraddistinguono R non sono mai introdotte e mai nominate, nemmeno quando sono utili.

Osservazioni

6. Poca considerazione della dimensione formale, “giustificano” le **scelte di semplificazione / omissione**: **esperienze negative come studenti** o a difficoltà che riscontrano come **fallimento dei loro studenti**

7. Sequenze :

1. **Ampliare** gli insiemi numerici per contenere risultati di operazioni non chiuse
2. Presentare il problema dell’**irrazionalità** identificando segmento (diagonale) e numero (radice), con dimostrazione aritmetica.
3. **Completare con continuità** curve algebriche o analitiche
4. Evitare di lavorare con insiemi discreti o densi per la **risoluzione di disequazioni o funzioni**
5. Spiegare cosa significa **“avvicinarsi sempre di più”** nel calcolo del limite (continuità naturale)
6. Solo 1 insegnante solo evita di presentare R come completamento di Q

Osservazioni

Problema pedagogico (Nunez): immagini di continuità naturale presentate come vaghe, la vera essenza della continuità è considerata Cauchy-Weierstrass.
“dovere” di introdurre approcci formali

Nella ricerca: Forte senso di **disagio nei confronti della continuità formale**, percorso di continui ritorni alla continuità naturale; convinzione che **la continuità vera è quella naturale** e che le formalizzazione servono per “sistemare la coscienza”

“Ritorno” alla continuità naturale: perdita di vista del problema, ipersemplificazione che complica, errori nell’idea di intuibilità (Tall, 1991; Fischbein, 1995), problemi per densità e completezza, perdita di senso dei concetti (es. Punto di accumulazione).

Potenzialità culturali

Il continuo come “palestra” e i reali come necessità

1) Confluenza di diverse matematiche, **problemi di confine**
2) Intreccio interessante tra **semiotica, epistemologia e cognizione** e problemi classici della didattica (**intuizione, rigore, dimostrazione**)
3) Un problema che **lascia spazio all’opinione** e al “gusto”

1) Andare oltre la **continuità globale** per dimostrare localmente **l’esistenza di massimi e minimi**
2) La necessità di un **campo completo** per verificare i teoremi

Due grandi sfide (o forse tre)

1) **Essere consapevoli e coerenti**

2) Saper affrontare (e scegliere se farlo) **la transizione tra Calculus e Analysis**

3) Formare **matematici che diventino futuri insegnanti e** che abbiano una posizione sul tema, materiali a disposizione e sappiano scegliere quando e come affrontarlo

Sviluppi futuri della ricerca

1) **A cosa “servono”** numeri reali e continuità?

a. Analisi dettagliata degli **obiettivi di una introduzione ragionata e coerente dei numeri reali nella scuola secondaria** con **sperimentazione didattica nelle classi**
b. Transizione **dall’intuizione visiva** alla **continuità nei casi non intuitivi** in Analisi Matematica (studenti universitari e futuri docenti)
c. Questioni **interdisciplinari** (Fisica)

Il mito del continuo

Fabbrichesi e Longo (2006)

René Thom :

1) **Priorità ontologica del continuo sul discreto** nella storia della Matematica, della Filosofia, e ora in biologia

2) Il continuo come **“crampo del pensiero”** , non a caso al cuore della crisi dei fondamenti di una parte del pensiero occidentale

Esempi dalle sperimentazioni (mito del continuo)

YANA	Cioè è proprio per quello che non poteva più andare avanti una teoria basata sul continuo. Dopo io l'ho approfondito anche in altro modo, così. Cioè, l'uomo ha cominciato a indagare su certi …, cioè ho visto … cioè han cominciato a indagare sul fatto che … su che ruolo ha lui all'interno della realtà e che ruolo ha lui nell'esperimento, all'interno …, cioè anche la differenza fra mondo macroscopico e microscopico … dovrebbe essere un problema un po' più … Cioè, mi vergogno un po', dovrebbe essere un problema un po' più …

sera. Cioè noi … l'occhio umano …, l'essere umano arriva fino a un tot di fotogrammi, non mi ricordo se 30 o 100, e poi li percepisce come continui, quando in realtà non è così, perché sono sempre fotogrammi. E noi siamo talmente stati abituati a credere, tipo anche a questa cosa qui, che non ci siamo più posti la domanda se ci fosse qualcosa sotto, se ci fosse qualcosa di discreto sotto: che poi alla fine è così, no?

Esempi dalle sperimentazioni (mito del continuo)

YANA	anche se la matematica mi sta ... La matematica è un po' strana, all'interno di tutto questo discorso, perché cerca in tutti i modi di mostrare il continuo … cioè, almeno, cerca …
LUCA	In che modo?
YANA	Non ha fatto, appunto, i 4 postulati … Dedekind [?] [*incomprensibile*]… [*risatina*]
LUCA	No, dimmi
YANA	Ha cercato di imporre la continuità!
LUCA	Chi, in che modo, dove?
YANA	In matematica. Cioè, mi è sembrato strano …
LUCA	Chi ha cercato di imporla?
YANA	No, la retta, il fatto che sia continua, che si passi per tutti i punti …
LUCA	[] ok
YANA	Il fatto anche che R sia un insieme continuo …, cioè, insieme … che la retta sia continua. Mi sembra anche un po'
LUCA	ok
YANA	una forzatura, dopo aver stabilito che la realtà è discreta. E un po' mi ha messo … cioè, strana! [*risatina*]. Cioè se mi puoi dire cose in più per farmi cambiare idea,

Il problema del corpo nero: cosa significa “non essere continuo” (e in quanti modi lo si può non essere)

L'espressione inziale, di cui si vorrebbero derivare rispetto ad n entrambi i membri, è la seguente:

$$n \cdot f(nU) = f(U) \tag{A.1}$$

Poiché $n \in \mathbb{N}$, non è possibile differenziare in modo classico; infatti servirebbe che ogni punto del dominio fosse punto di accumulazione.

Vediamo allora se è possibile dedurre che la relazione:

$$x \cdot f(xU) = f(U) \tag{A.2}$$

vale $\forall x \in \mathbb{R}^+$, in modo da poter poi agevolmente derivare rispetto alla variabile reale x.

Il problema del corpo nero: cosa significa "non essere continuo" (e in quanti modi lo si può non essere)

[.....]

Dunque g è una funzione continua e costante su un sottoinsieme denso del dominio, pertanto costante su tutto il dominio, cioè:

$$x \cdot f(xU) = f(U) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Istituto tecnico aeronautico, Milano, classe 1a

1) Importanza della relazione tra **approssimazione e valore “reale”**.
2) **<u>Non si fornisce la retta come modello iniziale.</u>**
3) π : Archimede e l’approssimazione; importanza del π nelle applicazioni
4) Numeri razionali e irrazionali: cosa sono i numeri con **“infinite cifre”**? Possiamo decidere se un numero è irrazionale o razionale in base alla sua rappresentazione decimale?
5) Come **si posizionano i numeri su una linea**? Come possono **⅓ e 0,(3)** rappresentare la stessa posizione? Zenone e la tartaruga.
6) Che differenza c’è tra **0,(9) e 1?** Discussione di classe e creazione due gruppi (Infinity haters e Infinity lovers)

Percorso di 10 ore con **valutazione**, propedeutico all’introduzione della Geometria analitica (uso dei numeri in Geometria).

Risultati

3. Nel mondo della matematica la distinzione e la conoscenta dei n° rationali e irrationali è fondamentale:

es. π

π è un n° irrasionale fondamentale al giorno d'oggi esso viene utilittato nell'aerodinamica, per calcolare la Δt dell'oscillazione del pendolo, ma anche per calcolare la circonferenza e l'area di un cerchio.

Anche Turing lavorò sul concetto: "INFINITO" ~~tal~~ utilizzando i numeri rationali e irrationali.

Risultati

l'insieme dei n° rationali e' definito DENSO owero che tra 2 ~~numeri~~ elementi ve ne e' sempre un altro. anche l'insieme dei n° irrationali e' definito denso.

Io penso che un numero irrazionale abbia ~~A~~ INFINITE cifre decimale. Prendiamo per esempio π greco: ad ~~egli~~ esso sono state scoperte oltre 100'000 cifre decimali. Perche' non credere all'infinito?
Come dice Leblond un numero razionale e' un numero derivato dal rapporto di 2 numeri naturali.

Risultati

Secondo me approssimare e' sbagliato, perche' sara' sempre presente un'incertezza, modificandone il risultato.
E' sbagliato soprattutto se si vuole trovare la grandezza di un atomo. Se approssimi il numero vi sara' sempre un errore.
Si puo' dire infatti che i numeri razionale siano piu' precisi rispetto ai numeri irrazionale, purche' non si effettui un'approssimazione.
Come dice una proprieta' di questi numeri, (la sua densita') vi sara' sempre un altro numero tra altri due.

1,234 12343

↑

1,2341

Si andra' avanti cosi' all'INFINITO

Risultati

1) NUMERO IRRAZIONALE:

NUMERO DECIMALE ILLIMITATO E NON PERIODICO.

(AD ESEMPIO π (PI GRECO))

NUMERO RAZIONALE:

NUMERO ESPRESSO SOTTO FORMA DI FRAZIONE

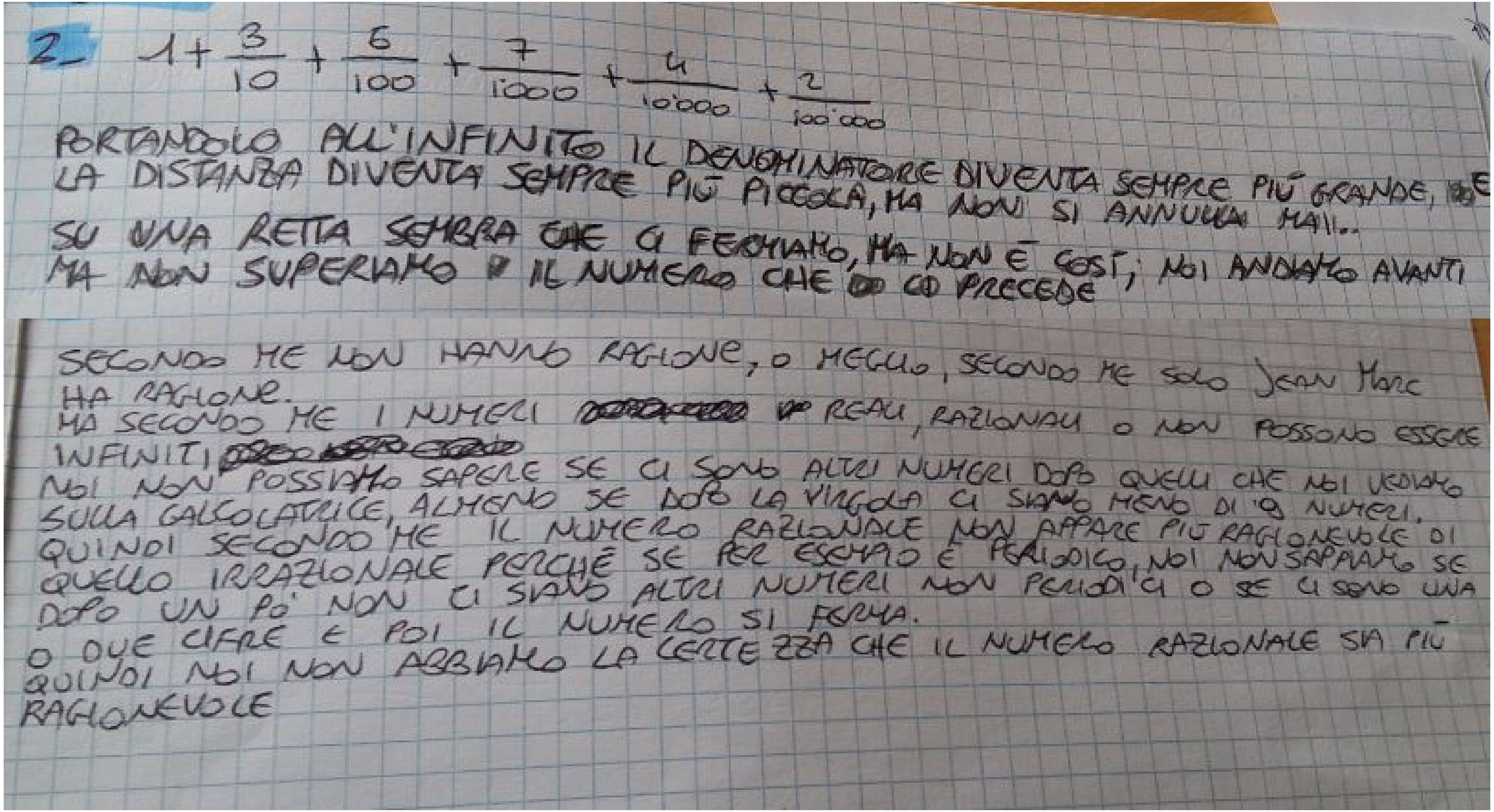
(AD ESEMPIO 2/3) DECIMALE, LIMITATO, ILLIMITATO

SI POSSONO RAPPRESENTARE:

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE.

RAPPRESENTAZIONE SULLA RETTA.

Risultati



2_ $1+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{4}{10'000}+\frac{2}{100'000}$

PORTANDOLO ALL'INFINITO IL DENOMINATORE DIVENTA SEMPRE PIÚ GRANDE, E LA DISTANZA DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLA, MA NON SI ANNULLA MAI..

SU UNA RETTA SEMBRA CHE CI FERMIAMO, MA NON È COSÌ; NOI ANDIAMO AVANTI MA NON SUPERIAMO IL NUMERO CHE CI PRECEDE

SECONDO ME NON HANNO RAGIONE, O MEGLIO, SECONDO ME SOLO Jean Marc HA RAGIONE.

MA SECONDO ME I NUMERI REALI, RAZIONALI O NON POSSONO ESSERE INFINITI,

NOI NON POSSIAMO SAPERE SE CI SONO ALTRI NUMERI DOPO QUELLI CHE NOI VEDIAMO SULLA CALCOLATRICE, ALMENO SE DOPO LA VIRGOLA CI SIANO MENO DI 9 NUMERI.

QUINDI SECONDO ME IL NUMERO RAZIONALE NON APPARE PIÙ RAGIONEVOLE DI QUELLO IRRAZIONALE PERCHÉ SE PER ESEMPIO È PERIODICO, NOI NON SAPPIAMO SE DOPO UN PO' NON CI SIANO ALTRI NUMERI NON PERIODICI O SE CI SONO UNA O DUE CIFRE E POI IL NUMERO SI FERMA.

QUINDI NOI NON ABBIAMO LA CERTEZZA CHE IL NUMERO RAZIONALE SIA PIÙ RAGIONEVOLE

Risultati

3) Secondo me è fondamentale in quanto nella vita di tutti i giorni torna sempre utile capire il concetto di numeri razionali e irrazionali, comprendendo poi il discorso sull'infinito che è un discorso che raramente potrebbe tornare utile nella vita di tutti i giorni. Il mio pensiero è questo, poi sul concetto di approssimazioni e rapporti tra i numeri, che più e che meno, sono un passo avanti nel mondo matematico nel senso che possono tranquillamente portarci alla scoperta di nuove cose (matematicamente parlando).

Risultati

7) Dal mio punto ~~se~~ di vista le approssimazioni ed i rapporti tra i numeri sono una innovazione per la matematica, nel senso che sono le fonti matematiche che potrebbero portare alla conoscenza di nuove cose per quanto riguarda il mondo della matematica, perchè sono sempre oggetti di studio dei matematici per scoprire più cose della matematica, come ad esempio il PI GRECO.

Risultati

1e5)

I numeri razionali e irrazionali fanno parte dei numeri reali, ma hanno delle differenze:

Razionali → numeri decimali illimitati periodici → $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$

→ possono essere frazioni

→ possono essere rappresentati su una retta

Irrazionali → numeri decimali illimitati non periodici → $\sqrt{2}$

→ si possono rappresentare su una retta

→ non possono essere scritti come frazioni.

Risultati

Secondo me quello che c'è scritto vuole dire che i numeri razionali non ci permettono di sapere la cifra reale ma ci danno una approssimazione del numero, un numero che si avvicina di più agli altri. Poi ci sono i numeri irrazionali ~~d~~ i quali sembrano non avere un ragione, un significato appunto ma che possono essere colti anche attraverso un rapporto. La mia opinione è che le approssimazioni ci aiutano nel fare i calcoli ~~de~~ di numeri senza dover conoscere il numero intero ma, con l'approssimazione, ci sarà sempre un margine di errore rispetto al numero reale, quindi può essere utile ma avrà sempre un errore.

Risultati

marc Gelblond dice che un numero razionale è infinito ed non ha un limite. I numeri possono avere la virgola, ma dopo la virgola i numeri possono essere ripetuti. Dal latino razionale deriva la parola ratio.

marc afferma i numeri possono essere ragionevoli cioè che si possono capire subito ma la persona che la legge deve ragionare su ~~quello~~ che sta facendo. molti numeri rational posso avere un punto irrational. alla fine marc ci ha insegnato malte Case importante.

Risultati

7) Quello che ci vuole far capire Jean Marc Gérus è (secondo il mio punto di visto) che i numeri razionali sono i più semplici da captare mentre gli irrazionali pochi sanno che esistono oppure

l'uno non può stare senza l'altro perché sennò non esisterebbero i numeri reali

Risultati

Si possono rappresentare delle frazioni e su una retta orientata;

1) Un numero razionale è un numero decimale limitato, illimitato periodico. Mentre un numero irrazionale è illimitato non periodico.
È non può essere rappresentato con le frazioni ma ricorrendo ad un approssimazione si possono rappresentare su una retta orientata.

3) Perchè avendo a che fare con grandezze gigantesche, o infinite, facendo approssimazione che sembrano apparentemente piccole in realtà si sta facendo un errore molto più grande.