(4) $$b^2 = 2\,r^2 - 2\,r\,m$$

e

(5) $$c^2 = 2\,r^2 + 2\,r\,m\,.$$

Infine, da (4) e (5) risulta:

(6) $$b^2 + c^2 = (2\,r^2 - 2\,r\,m) + (2\,r^2 + 2\,r\,m) = 4\,r^2\,,$$

che è precisamente quanto volevamo dimostrare.

7. Calcolo grafico di somme, differenze, prodotti e quozienti di numeri reali. Metodo grafico per la risoluzione delle equazioni di primo grado

Fin dal cap. IV abbiamo osservato che i numeri reali costituiscono lo strumento matematico adatto ad esprimere le *misure* di tutte le grandezze; in particolare, abbiamo visto che ad ogni segmento AB si può associare, mediante un procedimento (teorico) di «approssimazioni successive», un numero reale d che rappresenta la *misura della lunghezza* di AB rispetto ad una fissata unità di misura u. Da notare che, siccome stiamo considerando le lunghezze in senso *non orientato*, il numero reale d risulta sempre *positivo*.

Viceversa, dato un numero reale positivo qualsiasi d, lo stesso procedimento delle «approssimazioni successive» consente di costruire (sempre teoricamente) un segmento AB tale che la misura della sua lunghezza sia proprio d; se ad es. $d = 2{,}7643\ldots$ si tratta di considerare una retta dotata di un sistema di coordinate, la cui unità di misura sia u; assumendo come estremo A del segmento che si intende costruire l'origine O delle ascisse, l'estremo B verrà a trovarsi tra le tacche contrassegnate dai numeri interi 2 e 3; successivamente si potrà restringere l'intervallo di variabilità entro cui dev'essere compreso B, considerando approssimazioni decimali via via piú precise di d; in altre parole, B sarà compreso tra le tacche contrassegnate da 2,7 e 2,8; tra le tacche contrassegnate da 2,76 e 2,77; tra le tacche contrassegnate da 2,764 e 2,765; ..... Poiché le ampiezze di questi intervalli diventano sempre piú piccole, è del tutto ragionevole supporre, a livello teorico, che *vi sia un solo punto comune a tutti gli intervalli considerati*: precisamente, *il punto* B.

Fig. 16

Come abbiamo già detto in varie occasioni analoghe, va da sé che *nella pratica* il procedimento descritto sopra si arresta ad un certo punto: quando l'imprecisione del disegno non consente piú di rappresentare distintamente gli estremi degli intervalli di variabilità di B aventi ampiezza troppo piccola.

Ritornando al nostro discorso di carattere teorico, possiamo sintetizzare le conclusioni a cui siamo pervenuti, come segue: *fissata un'unità di misura* u, *ogni segmento* AB *ha una lunghezza la cui misura è espressa da un numero reale positivo* d; *viceversa, ogni numero reale positivo* d *è la misura della lunghezza di un segmento* AB.

Di conseguenza, il problema di calcolare graficamente la somma (rispettivamente la differenza, il prodotto, il quoziente) di due numeri reali positivi a, b potrà essere affrontato e risolto anche con strumenti geometrici: si tratterà di costruire, mediante l'uso della riga e del compasso, un segmento la cui lunghezza abbia misura $a + b$, rispettivamente $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, partendo da due segmenti assegnati, le cui lunghezze hanno misure a e b.

Il caso della *somma* è immediato: basta riportare i due segmenti assegnati su di una stessa retta, facendo in modo che l'estremo «destro» del primo segmento coincida con l'estremo «sinistro» del secondo.

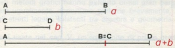

Fig. 17

Il caso della *differenza* è altrettanto immediato: basta riportare i due segmenti assegnati su di una stessa retta, facendo in modo che l'estremo «destro» del primo segmento coincida con l'estremo «destro» del secondo. (Volendo evitare di parlare di lunghezze *orientate*, si deve supporre inoltre $b < a$).

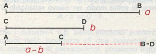

Fig. 18

Affrontiamo ora il caso del calcolo grafico del *prodotto*. Osserviamo intanto che il prodotto $a \cdot b$ si può interpretare geometricamente come la misura dell'area di un rettangolo R i cui lati abbiano per misure a e b. È abbastanza intuitivo che si dovrà sfruttare in qualche modo la conoscenza di quest'*area*, per costruire un *segmento* la cui lunghezza sia misurata dal medesimo numero $a \cdot b$. Ma come fare? La risposta non è poi troppo difficile: basterà riuscire a costruire un nuovo rettangolo R' che abbia la stessa area di R e altezza unitaria; *la base di questo nuovo rettangolo* R' *sarà il segmento cercato*. Infatti, detta x la misura della lunghezza della base di R', si ha evidentemente:

$$\textit{Misura area } \mathrm{R}' = x \cdot 1 .$$

D'altra parte:

$$\textit{Misura area } \mathrm{R}' = \textit{Misura area } \mathrm{R} = a \cdot b ,$$

da cui

$$x \cdot 1 = a \cdot b ,$$

che è come dire

$$x = a \cdot b ,$$

ossia la tesi.

Tutto si riduce dunque a costruire geometricamente un rettangolo R' avente la stessa area di R e avente come altezza il segmento u fissato come unità di misura. Ora questa costruzione è stata già descritta in precedenza, come conseguenza del teorema dello gnomone (osservazione finale del n. 2). Per chiarezza, riproduciamo ancora una volta la figura relativa a questa costruzione (fig. 19).

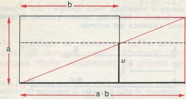

Fig. 19

Infine il calcolo grafico del *quoziente* $\frac{a}{b}$ è sostanzialmente analogo a quello del prodotto (ed è naturale che sia così, visto che le due operazioni sono l'una l'inversa dell'altra). Precisamente, a partire dal rettangolo S di base a ed altezza unitaria u, si costruisce, al solito modo, un nuovo rettangolo S' che ha la stessa

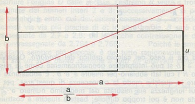

Fig. 20

area di S e altezza b (vedi fig. 20). *La base del rettangolo S' è il segmento cercato.* Infatti, detta x la misura della lunghezza della base di S', si ha evidentemente:

$$\textit{Misura area } S' = x \cdot b \, .$$

D'altra parte:

$$\textit{Misura area } S' = \textit{Misura area } S = a \cdot 1 = a \, ,$$

da cui

$$x \cdot b = a \, ,$$

che è come dire

$$x = \frac{a}{b},$$

ossia la tesi.

Osservazione. Le costruzioni esposte in questo paragrafo hanno rappresentato uno «strumento di calcolo» di importanza fondamentale durante tutto il periodo che va dall'antichità classica fino alla scoperta del calcolo algebrico ed all'introduzione della scrittura decimale dei numeri reali.

In particolare, tali costruzioni hanno consentito ai matematici greci di risolvere graficamente le *equazioni di primo grado.*

Anche se questi metodi grafici hanno perduto ormai gran parte del loro interesse pratico, ci pare ugualmente opportuno parlarne brevemente, per far vedere ancora una volta gli stretti legami esistenti tra algebra e geometria.

Con le notazioni usate nel cap. V, un'equazione di primo grado, in forma ridotta, si scrive:

$$A\,x + B = 0\,.$$

Possiamo riscriverla nella forma equivalente:

$$A\,x = C$$

dove abbiamo posto, per semplicità di notazioni, $C = -B$.

Tenuto conto dell'identità $C = C \cdot 1$, possiamo scrivere ulteriormente:

(1) $$A \cdot x = C \cdot 1\,.$$

Supponiamo che i numeri A e C siano entrambi *positivi*; allora possiamo interpretarli come misure delle lunghezze di due opportuni segmenti rispetto ad una fissata unità di misura u ; di conseguenza, possiamo leggere l'uguaglianza (1) come segue: *dato un rettangolo che ha per base un segmento di misura* C *e per altezza un segmento di misura unitaria, determinare la misura della lunghezza della base di un nuovo rettangolo che abbia la stessa area del precedente e la cui altezza sia data da un segmento di misura* A .

Poiché abbiamo già risolto questo stesso problema per mezzo della costruzione grafica di fig. 20, non riteniamo necessario dilungarci oltre sull'argomento.

8. Calcolo grafico della radice quadrata

Il problema che ci proponiamo di risolvere ora è quello di calcolare graficamente la *radice quadrata* di un numero reale positivo a , e cioè di costruire, a partire da un segmento di misura a , mediante l'uso dei soliti strumenti geometrici (riga e compasso), un segmento di misura $\sqrt{a}$.

Esporremo due metodi diversi per la costruzione grafica di $\sqrt{a}$; il primo metodo si basa sul teorema di Pitagora ed è assai semplice, ma può essere utilizzato solo quando a è un numero *naturale*; il secondo metodo sfrutta uno dei teoremi di Euclide ed è pertanto un po' meno immediato, ma sussiste piú in generale, quando a è un numero *reale* positivo qualsiasi.