In principio erano le variazioni

$$\delta \int L = 0$$

Paolo Caressa

http://www.caressa.it

Matematica e dintorni:
storie di contaminazioni negli ultimi due secoli
Siena, 5 aprile 2019

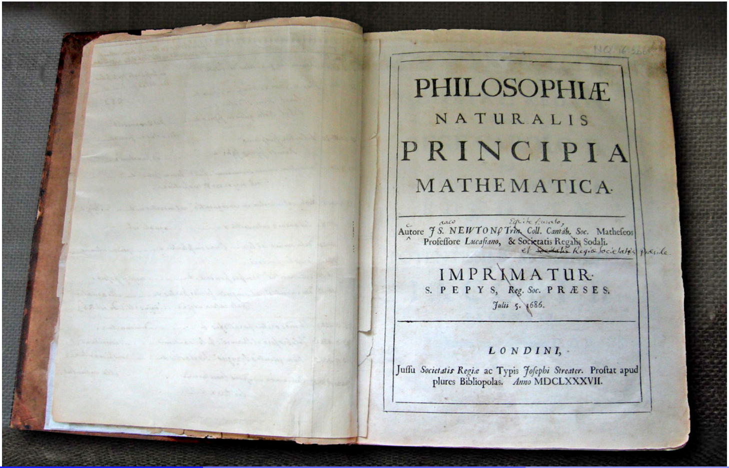
Prima parte: principî

Isaac Newton (1642-1727)

L'influenza di Newton sulla filosofia naturale del XVIII secolo è legata alla sua fondazione del calcolo differenziale e integrale e delle leggi della meccanica.

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687

Perché questo libro è così fondamentale e celebrato, tanto da far talvolta dire che il più importante della scienza assieme all'*Origine delle specie*?



Basta leggere il titolo!

Nei suoi *Principia*, Newton riconduce la *filosofia naturale* (=scienza fisica per l'epoca)

a un piccolo gruppo di *principî*, in quanto tali da assumere come postulati,

per mezzo dei quali formulare tutti i problemi di meccanica allora noti in termini *matematici*.

Quindi si realizza...

Basta leggere il titolo!

Nei suoi *Principia*, Newton riconduce la *filosofia naturale* (=scienza fisica per l'epoca)

a un piccolo gruppo di *principî*, in quanto tali da assumere come postulati,

per mezzo dei quali formulare tutti i problemi di meccanica allora noti in termini *matematici*.

Quindi si realizza...

Basta leggere il titolo!

Nei suoi *Principia*, Newton riconduce la *filosofia naturale* (=scienza fisica per l'epoca)

a un piccolo gruppo di *principî*, in quanto tali da assumere come postulati,

per mezzo dei quali formulare tutti i problemi di meccanica allora noti in termini *matematici*.

Quindi si realizza...

Basta leggere il titolo!

Nei suoi *Principia*, Newton riconduce la *filosofia naturale* (=scienza fisica per l'epoca)

a un piccolo gruppo di *principî*, in quanto tali da assumere come postulati,

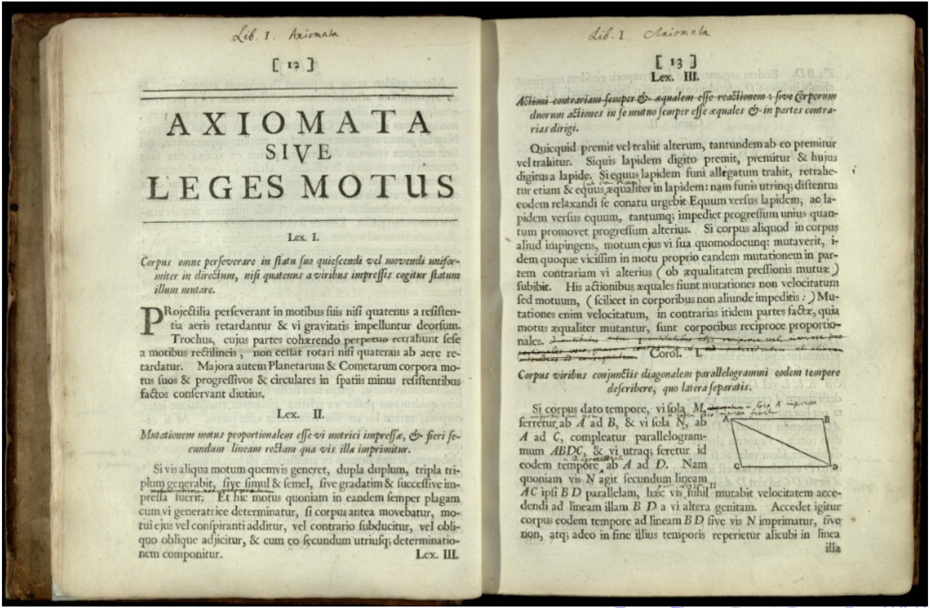
per mezzo dei quali formulare tutti i problemi di meccanica allora noti in termini *matematici*.

Quindi si realizza...

Il sogno di Galileo

Leggere (e nel caso di Newton trascrivere!) il gran libro della Natura, fin dalle sue prime pagine.

I tre principî di Newton



Oggi la diremmo in questo modo: I

Principio di inerzia

Se una particella di massa m, individuata dalle sue tre coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ nello spazio, è soggetta a forze esterne di risultante nulla allora la particella si muove di moto rettilineo uniforme, o sta ferma (fatto che dipende dal sistema di riferimento in cui la osserviamo)

In altri termini, se la risultante delle forze $\mathbf{F}$ impresse sul sistema è nulla allora la velocità del sistema è costante, quindi l'accelerazione è nulla.

Oggi la diremmo in questo modo: II

Legge fondamentale della dinamica

La risultante $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ delle forze impresse su una particella di massa m, individuata dalle sue tre coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ nello spazio, dipende solo dal tempo, dalla posizione e dalla velocità della particella, *non dalla sua accelerazione* che si calcola invece tramite le equazioni:

$$m\ddot{x}_1 = F_1 \qquad m\ddot{x}_2 = F_2 \qquad m\ddot{x}_3 = F_3$$

Le tre equazioni precedenti corrispondono a una singola equazione vettoriale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

Oggi la diremmo in questo modo: III

Principio di azione e reazione

Se due corpi A e B sono in una posizione di equilibrio e uno di essi esercita una forza $\mathbf{F}_A$ sull'altro allora l'altro esercita necessariamente una forza contraria $\mathbf{F}_B$ sul primo, in modo che

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0$$

Il principio di azione e reazione serve a Newton per dimostrare la *conservazione del momento* che infatti, mercé la seconda legge, è

$$\frac{d}{dt}(m_A \dot{\mathbf{x}}_A + m_B \dot{\mathbf{x}}_B) = 0$$

I principî in azione

Naturalmente i principî consentono di descrivere un problema, di impostarlo: risolverlo è un'altra faccenda.

Oscillatore armonico

Consideriamo il sistema unidimensionale

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Quali sono le posizioni del punto $x = x(t)$ al variare del tempo t da un istante iniziale in poi che soddisfano questa equazione?

Si tratta di equazioni differenziali, e si deve usare il calcolo differenziale e integrale per tentare di risolverle!!!

I principî in azione

Naturalmente i principî consentono di descrivere un problema, di impostarlo: risolverlo è un'altra faccenda.

Oscillatore armonico

Consideriamo il sistema unidimensionale

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Quali sono le posizioni del punto $x = x(t)$ al variare del tempo t da un istante iniziale in poi che soddisfano questa equazione?

Si tratta di equazioni differenziali, e si deve usare il calcolo differenziale e integrale per tentare di risolverle!!!

Non un grande comunicatore...

Per comunicare questo fatto a Leibniz, Newton gli inviò il seguente messaggio:

$$6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx$$

che è una codifica crittografica (ma in realtà una compressione simile agli algoritmi di zipping dei file) per la frase

> *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa.*

A volte le equazioni si risolvono subito...

Possiamo determinare una $x = x(t)$ tale che $\ddot{x} = -\omega^2 x$ notando una proprietà delle funzioni seno e coseno: $\cos'(t) = -\operatorname{sen}(t)$ e $\operatorname{sen}'(t) = \cos(t)$ da cui $\cos''(t) = -\cos(t)$.

Quindi a meno di una costante risolvono l'equazione precedente, la cui soluzione generale è

$$x(t) = a\cos(\omega t + b)$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ fissate dalle condizioni iniziali del moto.

A volte le equazioni si risolvono subito...

Possiamo determinare una $x = x(t)$ tale che $\ddot{x} = -\omega^2 x$ notando una proprietà delle funzioni seno e coseno: $\cos'(t) = -\operatorname{sen}(t)$ e $\operatorname{sen}'(t) = \cos(t)$ da cui $\cos''(t) = -\cos(t)$.

Quindi a meno di una costante risolvono l'equazione precedente, la cui soluzione generale è

$$x(t) = a\cos(\omega t + b)$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ fissate dalle condizioni iniziali del moto.

... a volte mai!

Problema dei tre corpi (es: **T**erra, **S**ole e **L**una) soggetti alle reciproche attrazioni gravitazionali. Ci sono tre equazioni vettoriali = nove equazioni scalari.

$$\ddot{\mathbf{T}} = -Gm_S \frac{\mathbf{T} - \mathbf{S}}{|\mathbf{T} - \mathbf{S}|^3} - Gm_L \frac{\mathbf{T} - \mathbf{L}}{|\mathbf{T} - \mathbf{L}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{S}} = -Gm_T \frac{\mathbf{S} - \mathbf{T}}{|\mathbf{S} - \mathbf{T}|^3} - Gm_L \frac{\mathbf{S} - \mathbf{L}}{|\mathbf{S} - \mathbf{L}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{L}} = -Gm_T \frac{\mathbf{L} - \mathbf{T}}{|\mathbf{L} - \mathbf{T}|^3} - Gm_S \frac{\mathbf{L} - \mathbf{S}}{|\mathbf{L} - \mathbf{S}|^3}$$

Questo problema sarà parzialmente risolto nel '700 da Eulero e Lagrange: ulteriori passi avanti saranno fatti soltanto nel XX secolo (da Poincaré in poi).

... a volte mai!

Problema dei tre corpi (es: **T**erra, **S**ole e **L**una) soggetti alle reciproche attrazioni gravitazionali. Ci sono tre equazioni vettoriali = nove equazioni scalari.

$$\ddot{\mathbf{T}} = -Gm_S \frac{\mathbf{T}-\mathbf{S}}{|\mathbf{T}-\mathbf{S}|^3} - Gm_L \frac{\mathbf{T}-\mathbf{L}}{|\mathbf{T}-\mathbf{L}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{S}} = -Gm_T \frac{\mathbf{S}-\mathbf{T}}{|\mathbf{S}-\mathbf{T}|^3} - Gm_L \frac{\mathbf{S}-\mathbf{L}}{|\mathbf{S}-\mathbf{L}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{L}} = -Gm_T \frac{\mathbf{L}-\mathbf{T}}{|\mathbf{L}-\mathbf{T}|^3} - Gm_S \frac{\mathbf{L}-\mathbf{S}}{|\mathbf{L}-\mathbf{S}|^3}$$

Questo problema sarà parzialmente risolto nel '700 da Eulero e Lagrange: ulteriori passi avanti saranno fatti soltanto nel XX secolo (da Poincaré in poi).

Fra il dire e il fare...

Infatti Henri Poincaré (1854-1912) ha affermato che non è possibile dare una soluzione espressa in forma chiusa per questo sistema di equazioni differenziali, ma solo sviluppi in serie di potenze o approssimati in vario modo.

Se poi dobbiamo imporre dei vincoli alle traiettorie, per esempio che il moto avvenga su un piano, una superficie, etc., questi vincoli vanno combinati con le equazioni differenziali risultanti.

La descrizione newtoniana in questi casi è molto complessa anche soltanto da scrivere, figuriamoci poi risolvere le equazioni!!!

Fra il dire e il fare...

Infatti Henri Poincaré (1854-1912) ha affermato che non è possibile dare una soluzione espressa in forma chiusa per questo sistema di equazioni differenziali, ma solo sviluppi in serie di potenze o approssimati in vario modo.

Se poi dobbiamo imporre dei vincoli alle traiettorie, per esempio che il moto avvenga su un piano, una superficie, etc., questi vincoli vanno combinati con le equazioni differenziali risultanti.

La descrizione newtoniana in questi casi è molto complessa anche soltanto da scrivere, figuriamoci poi risolvere le equazioni!!!

Fra il dire e il fare...

Infatti Henri Poincaré (1854-1912) ha affermato che non è possibile dare una soluzione espressa in forma chiusa per questo sistema di equazioni differenziali, ma solo sviluppi in serie di potenze o approssimati in vario modo.

Se poi dobbiamo imporre dei vincoli alle traiettorie, per esempio che il moto avvenga su un piano, una superficie, etc., questi vincoli vanno combinati con le equazioni differenziali risultanti.

La descrizione newtoniana in questi casi è molto complessa anche soltanto da scrivere, figuriamoci poi risolvere le equazioni!!!

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Anche l'eterno rivale di Newton si occupò dei fondamenti della meccanica, e nel 1696 indicò come fondamentali, invece delle quantità vettoriali newtoniane, due quantità scalari.

In cerca di altri principî

Leibniz attribuì importanza a due quantità proprie di un sistema meccanico:

- le *forze vive* (che oggi chiamiamo energia cinetica)
- il *lavoro impresso* (che oggi chiamiamo energia potenziale)

Ma la teoria di Newton trionfò e il punto di vista di Leibniz fu perseguito solo dai suoi epigoni continentali.

Vedremo che queste idee sono state i semi dell'approccio settecentesco alla meccanica analitica.

In cerca di altri principî

Leibniz attribuì importanza a due quantità proprie di un sistema meccanico:

- le *forze vive* (che oggi chiamiamo energia cinetica)
- il *lavoro impresso* (che oggi chiamiamo energia potenziale)

Ma la teoria di Newton trionfò e il punto di vista di Leibniz fu perseguito solo dai suoi epigoni continentali.

Vedremo che queste idee sono state i semi dell'approccio settecentesco alla meccanica analitica.

In cerca di altri principî

Leibniz attribuì importanza a due quantità proprie di un sistema meccanico:

- le *forze vive* (che oggi chiamiamo energia cinetica)
- il *lavoro impresso* (che oggi chiamiamo energia potenziale)

Ma la teoria di Newton trionfò e il punto di vista di Leibniz fu perseguito solo dai suoi epigoni continentali.

Vedremo che queste idee sono state i semi dell'approccio settecentesco alla meccanica analitica.

In cerca di altri principî

Leibniz attribuì importanza a due quantità proprie di un sistema meccanico:

- le *forze vive* (che oggi chiamiamo energia cinetica)
- il *lavoro impresso* (che oggi chiamiamo energia potenziale)

Ma la teoria di Newton trionfò e il punto di vista di Leibniz fu perseguito solo dai suoi epigoni continentali.

Vedremo che queste idee sono state i semi dell'approccio settecentesco alla meccanica analitica.

In cerca di altri principî

Leibniz attribuì importanza a due quantità proprie di un sistema meccanico:

- le *forze vive* (che oggi chiamiamo energia cinetica)
- il *lavoro impresso* (che oggi chiamiamo energia potenziale)

Ma la teoria di Newton trionfò e il punto di vista di Leibniz fu perseguito solo dai suoi epigoni continentali.

Vedremo che queste idee sono state i semi dell'approccio settecentesco alla meccanica analitica.

Una questione su cui fare luce

Newton sperava di spiegare anche la propagazione della luce, nell'ipotesi corpuscolare, contrapposta a quella ondulatoria di Christiaan Huygens (1629-1695).

Un'ombra su Newton...

La teoria corpuscolare di Newton ebbe pochi epigoni anche perché le evidenze sperimentali, con gli strumenti dell'epoca, tendevano ad avvalorare l'idea della natura ondulatoria della luce, che infatti dominerà il '700 e l'800.

La questione se la luce fosse fatta di particelle o di onde sarà "chiarita" definitivamente soltanto nel '900, con l'avvento della meccanica quantistica e la sua dialettica della dualità onda-particella. Ma, come ha detto Richard Feynman (1918-1988), formulatore della QED, *I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics*...

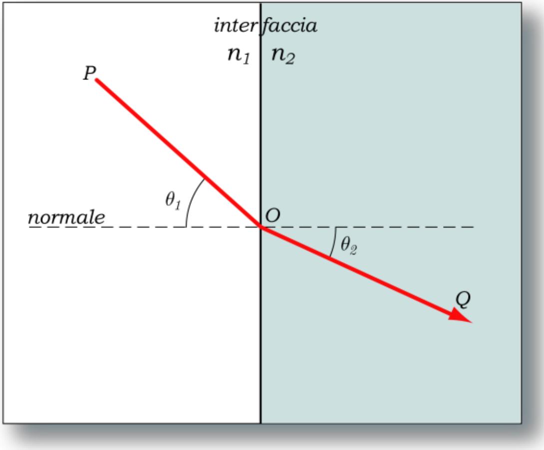
Un'ombra su Newton...

La teoria corpuscolare di Newton ebbe pochi epigoni anche perché le evidenze sperimentali, con gli strumenti dell'epoca, tendevano ad avvalorare l'idea della natura ondulatoria della luce, che infatti dominerà il '700 e l'800.

La questione se la luce fosse fatta di particelle o di onde sarà "chiarita" definitivamente soltanto nel '900, con l'avvento della meccanica quantistica e la sua dialettica della dualità onda-particella. Ma, come ha detto Richard Feynman (1918-1988), formulatore della QED, *I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics*...

La luce ha sempre fretta...

Ma su una cosa erano tutti d'accordo: *la luce si propaga in linea retta*, almeno fino a che non viene riflessa o rifratta.

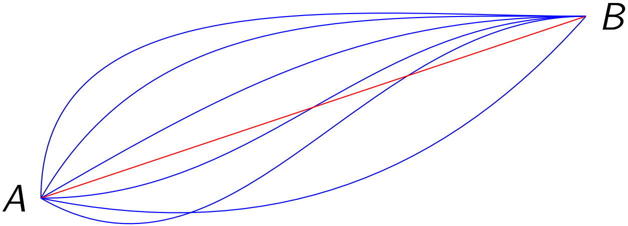


Il principio di Fermat

Pierre de Fermat (1606-1665), aveva in effetti affermato che la luce *sceglie sempre il percorso che minimizza il tempo per andare da un punto a un altro!* (vero solo localmente, es. specchi concavi).

Formulazione matematica

La traiettoria nello che un raggio di luce compie da A se "sparato" verso B descrive una *curva*, cioè una funzione $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, dove $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ in modo che $\gamma(0) = A$ e $\gamma(1) = B$.



Formulazione matematica

La lunghezza della curva si calcola con un integrale:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

Se in ogni punto la velocità della luce è la stessa, v, il tempo in cui la luce percorre la traiettoria γ è

$$T = \frac{L(\gamma)}{v}$$

Dunque $T = T(\gamma)$ è la funzione che vogliamo minimizzare: il suo argomento non è un numero, ma una curva!!!

Un nuovo tipo di principio

Il principio di Fermat non è della stessa natura di quelli di Newton: questi ultimi si formulano utilizzando i concetti di spostamento, velocità e accelerazione (cioè il calcolo differenziale) in cui la variabile da cui dipendono le funzioni è il tempo, un numero.

Invece il principio di Fermat consiste in un problema di ottimizzazione in cui la variabile da cui dipendono le funzioni (come l'integrale mostrato in precedenza) è una traiettoria, cioè una curva!!!

Come possiamo risolvere un tale problema di minimo?

Un nuovo tipo di principio

Il principio di Fermat non è della stessa natura di quelli di Newton: questi ultimi si formulano utilizzando i concetti di spostamento, velocità e accelerazione (cioè il calcolo differenziale) in cui la variabile da cui dipendono le funzioni è il tempo, un numero.

Invece il principio di Fermat consiste in un problema di ottimizzazione in cui la variabile da cui dipendono le funzioni (come l'integrale mostrato in precedenza) è una traiettoria, cioè una curva!!!

Come possiamo risolvere un tale problema di minimo?

Un nuovo tipo di principio

Il principio di Fermat non è della stessa natura di quelli di Newton: questi ultimi si formulano utilizzando i concetti di spostamento, velocità e accelerazione (cioè il calcolo differenziale) in cui la variabile da cui dipendono le funzioni è il tempo, un numero.

Invece il principio di Fermat consiste in un problema di ottimizzazione in cui la variabile da cui dipendono le funzioni (come l'integrale mostrato in precedenza) è una traiettoria, cioè una curva!!!

Come possiamo risolvere un tale problema di minimo?

Ma Newton è sempre Newton!

Va però detto che Newton stesso ha formulato e risolto un problema di minimo simile a quello di Fermat, nel II libro dei suoi *Principia* dedicato al moto dei corpi nei fluidi (*mezzi poco densi formati da particelle equidistanti*).

In particolare Newton determina la forma di un solido di rotazione ($\Rightarrow$ chiglia) che si muova in un tale mezzo in modo che la resistenza opposta al mezzo sia minima.

Essendo Newton, egli formula il problema in modo preciso, ne mostra la soluzione, ma *non* indica come ha derivato il metodo di soluzione, rendendolo sostanzialmente incomprensibile ai contemporanei...

Ma Newton è sempre Newton!

Va però detto che Newton stesso ha formulato e risolto un problema di minimo simile a quello di Fermat, nel II libro dei suoi *Principia* dedicato al moto dei corpi nei fluidi (*mezzi poco densi formati da particelle equidistanti*).

In particolare Newton determina la forma di un solido di rotazione ($\Rightarrow$ chiglia) che si muova in un tale mezzo in modo che la resistenza opposta al mezzo sia minima.

Essendo Newton, egli formula il problema in modo preciso, ne mostra la soluzione, ma *non* indica come ha derivato il metodo di soluzione, rendendolo sostanzialmente incomprensibile ai contemporanei...

Ma Newton è sempre Newton!

Va però detto che Newton stesso ha formulato e risolto un problema di minimo simile a quello di Fermat, nel II libro dei suoi *Principia* dedicato al moto dei corpi nei fluidi (*mezzi poco densi formati da particelle equidistanti*).

In particolare Newton determina la forma di un solido di rotazione ($\Rightarrow$ chiglia) che si muova in un tale mezzo in modo che la resistenza opposta al mezzo sia minima.

Essendo Newton, egli formula il problema in modo preciso, ne mostra la soluzione, ma *non* indica come ha derivato il metodo di soluzione, rendendolo sostanzialmente incomprensibile ai contemporanei...

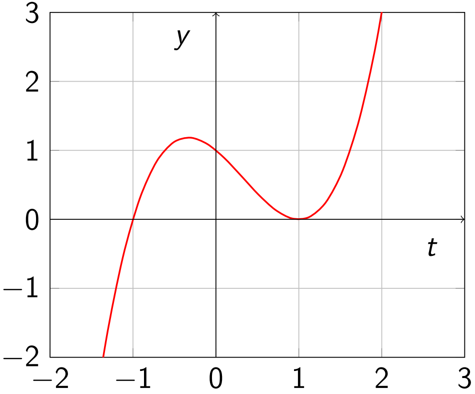
Un nuovo tipo di calcolo differenziale

I matematici del '700, a partire da Johann Bernoulli (1667-1748), riscoprirono il metodo di Newton applicandolo a problemi di massimo e minimo.

Seconda parte: variazioni

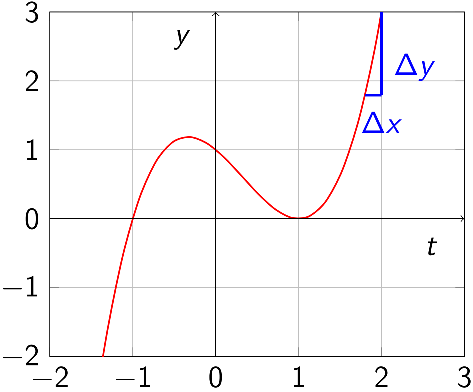
Come si determina un minimo?

Consideriamo una funzione $y = f(t)$ della quale vogliamo trovare il minimo, per esempio $y = t^3 - t^2 - t + 1$.



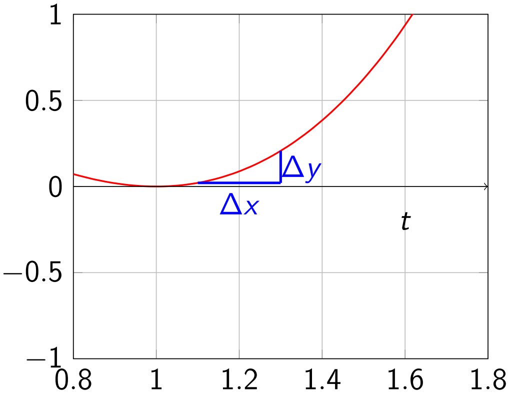
Δt piccolo ma Δy grande

Se $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$ è la variazione del valore di y corrispondente a una variazione di t non è affatto detto che se Δt è piccolo lo sia anche Δy:



Δt piccolo e Δy ancor più piccolo

Ma quando questo accade, come ha osservato Fermat (ancora lui!), vuol dire che x è prossimo a un punto di massimo o di minimo!!!



Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Fermat ne deduce che i massimi e i minimi vanno cercati laddove Δy è piccola se lo è Δt. Come farlo?

Fermat scrive $f(t+\Delta t)$ come polinomio in Δt: nel nostro caso $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$

$$
\begin{aligned}
& f(t+\Delta t) = \\
& = (t+\Delta t)^3 - (t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t) + 1 = \\
& = t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^2 - 2t\Delta t + \\
& \qquad - \Delta t^2 - t - \Delta t + 1 = \\
& = \underbrace{(t^3 - t^2 - t + 1)}_{\text{questa è } f(t)!!!} + (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + \\
& \qquad + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3
\end{aligned}
$$

Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Fermat ne deduce che i massimi e i minimi vanno cercati laddove Δy è piccola se lo è Δt. Come farlo?

Fermat scrive $f(t + \Delta t)$ come polinomio in Δt: nel nostro caso $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$

$$
\begin{aligned}
&f(t+\Delta t) = \\
&= (t+\Delta t)^3 - (t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t) + 1 = \\
&= t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^2 - 2t\Delta t + \\
&\qquad - \Delta t^2 - t - \Delta t + 1 = \\
&= \underbrace{(t^3 - t^2 - t + 1)}_{\text{questa è } f(t)!!!} + (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + \\
&\qquad + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3
\end{aligned}
$$

Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Fermat ne deduce che i massimi e i minimi vanno cercati laddove Δy è piccola se lo è Δt. Come farlo?

Fermat scrive $f(t+\Delta t)$ come polinomio in Δt: nel nostro caso $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$

$$
\begin{aligned}
& f(t+\Delta t) = \\
& = (t+\Delta t)^3 - (t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t) + 1 = \\
& = t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^2 - 2t\Delta t + \\
& \qquad - \Delta t^2 - t - \Delta t + 1 = \\
& = \underbrace{(t^3 - t^2 - t + 1)}_{\text{questa è } f(t)!!!} + (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + \\
& \qquad + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3
\end{aligned}
$$

Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Fermat ne deduce che i massimi e i minimi vanno cercati laddove Δy è piccola se lo è Δt. Come farlo?

Fermat scrive $f(t + \Delta t)$ come polinomio in Δt: nel nostro caso $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$

$$
\begin{aligned}
&f(t+\Delta t) = \\
&= (t+\Delta t)^3 - (t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t) + 1 = \\
&= t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^2 - 2t\Delta t + \\
&\qquad - \Delta t^2 - t - \Delta t + 1 = \\
&= \underbrace{(t^3 - t^2 - t + 1)}_{\text{questa è } f(t)\text{!!!}} + (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + \\
&\qquad + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3
\end{aligned}
$$

Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Quindi

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(t+\Delta t) - f(t) = \\ &= (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3\end{aligned}$$

In particolare, se $\Delta t < 1$ e il coefficiente di Δt è nullo, Δy è dell'ordine di Δt^2 e quindi molto più piccolo di Δt.

Per questo Fermat cerca i massimi e minimi dove si annulla il coefficiente di Δt, nel nostro caso $3t^2 - 2t - 1 = 0$ e quindi $t = (2 \pm \sqrt{16})/6$, dunque $t = 1$, $t = -1/3$.

Cioè Fermat annulla la derivata prima del polinomio!!!

Il metodo di Fermat per massimi e minimi

Quindi

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(t+\Delta t) - f(t) = \\ &= (3t^2 - 2t - 1)\Delta t + (3t-1)\Delta t^2 + \Delta t^3\end{aligned}$$

In particolare, se $\Delta t < 1$ e il coefficiente di Δt è nullo, Δy è dell'ordine di Δt^2 e quindi molto più piccolo di Δt.

Per questo Fermat cerca i massimi e minimi dove si annulla il coefficiente di Δt, nel nostro caso $3t^2 - 2t - 1 = 0$ e quindi $t = (2 \pm \sqrt{16})/6$, dunque $t = 1$, $t = -1/3$.

Cioè Fermat annulla la derivata prima del polinomio!!!

Valori stazionari delle funzioni

In termini moderni, in un punto di massimo o minimo una funzione $y = f(t)$ è *stazionaria*:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Cioè la funzione non è né crescente (derivata > 0) né decrescente (derivata < 0).

Questo va bene per le funzioni $y = f(t)$ che associano a un numero un altro numero: ma nel caso del principio di Fermat, vogliamo vogliamo minimizzare una funzione $y = T(\gamma)$ che associa a una *curva* γ un numero, e una curva è un oggetto determinato da una infinità di punti.

Valori stazionari delle funzioni

In termini moderni, in un punto di massimo o minimo una funzione $y = f(t)$ è *stazionaria*:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Cioè la funzione non è né crescente (derivata > 0) né decrescente (derivata < 0).

Questo va bene per le funzioni $y = f(t)$ che associano a un numero un altro numero: ma nel caso del principio di Fermat, vogliamo vogliamo minimizzare una funzione $y = T(\gamma)$ che associa a una *curva* γ un numero, e una curva è un oggetto determinato da una infinità di punti.

Problemi settecenteschi

Come si fa a minimizzare un integrale?

Johann Bernoulli (e vari altri indipendentemente) ci riuscì nel 1696 risolvendo il *problema della brachistocrona*, spiegato in tutti i libri di storia della matematica (compreso il mio) e quindi sul quale non mi soffermerò qui.

La matematica del XVIII secolo si è tipicamente confrontata con questi problemi, e i grandi matematici settecenteschi, i Bernoulli, Eulero, Lagrange, Legendre, etc., li hanno risolti in modo brillante.

Problemi settecenteschi

Come si fa a minimizzare un integrale?

Johann Bernoulli (e vari altri indipendentemente) ci riuscì nel 1696 risolvendo il *problema della brachistocrona*, spiegato in tutti i libri di storia della matematica (compreso il mio) e quindi sul quale non mi soffermerò qui.

La matematica del XVIII secolo si è tipicamente confrontata con questi problemi, e i grandi matematici settecenteschi, i Bernoulli, Eulero, Lagrange, Legendre, etc., li hanno risolti in modo brillante.

Problemi settecenteschi

Come si fa a minimizzare un integrale?

Johann Bernoulli (e vari altri indipendentemente) ci riuscì nel 1696 risolvendo il *problema della brachistocrona*, spiegato in tutti i libri di storia della matematica (compreso il mio) e quindi sul quale non mi soffermerò qui.

La matematica del XVIII secolo si è tipicamente confrontata con questi problemi, e i grandi matematici settecenteschi, i Bernoulli, Eulero, Lagrange, Legendre, etc., li hanno risolti in modo brillante.

Leonardo Eulero (1707-1783)

Eulero ha dato nel 1744 il metodo generale per capire dove un integrale è stazionario.

Il problema variazionale

Sia $F = F(t, y, y')$ una funzione che dipende da una variabile indipendente t e da due variabili dipendenti da t, e consideriamo il funzionale $J = J(\gamma)$ a valori reali e definito sullo spazio delle curve $y = \gamma(t)$ come

$$J(\gamma) = \int_0^1 F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Quand'è che il valore di J è minimo (o massimo)? Per esempio il principio di Fermat pone un tale problema per $J = L(\gamma)/v$.

L'idea di Eulero è di scrivere una condizione di stazionarietà per J.

Il problema variazionale

Sia $F = F(t, y, y')$ una funzione che dipende da una variabile indipendente t e da due variabili dipendenti da t, e consideriamo il funzionale $J = J(\gamma)$ a valori reali e definito sullo spazio delle curve $y = \gamma(t)$ come

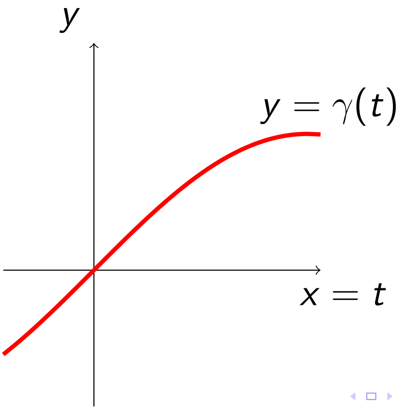
$$J(\gamma) = \int_0^1 F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Quand'è che il valore di J è minimo (o massimo)? Per esempio il principio di Fermat pone un tale problema per $J = L(\gamma)/v$.

L'idea di Eulero è di scrivere una condizione di stazionarietà per J.

Il metodo di Eulero

Utilizziamo il principio di Fermat come esempio: supporremo che γ non sia una curva qualsiasi ma sia il grafico di una funzione $y = \gamma(t)$, cioè, rispetto alle notazioni predecenti, $x(t) = t$, $y(t) = \gamma(t)$, $z(t) = 0$:



Un esempio semplice

Se $x(t) = t$, $y(t) = \gamma(t)$, $z(t) = 0$ il funzionale relativo al principio di Fermat si scrive come

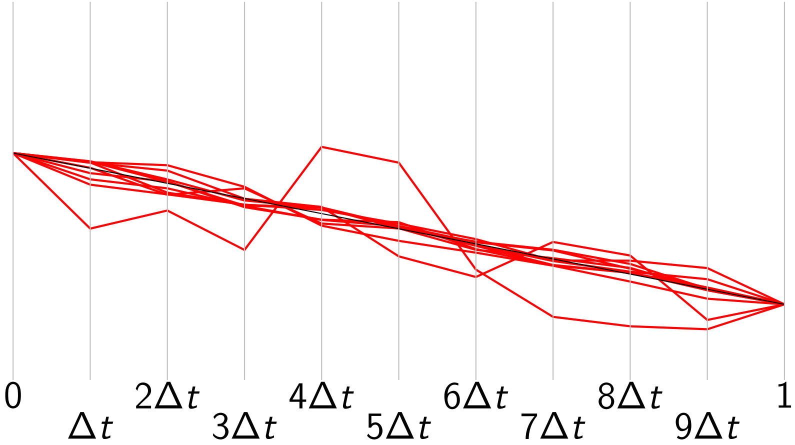
$$J(\gamma) = \frac{1}{v} \int_0^1 \sqrt{1 + \gamma'(t)^2}\, dt$$

Dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in N parti uguali, di lunghezze $\Delta t = 1/N$, "marcandolo" nei seguenti punti:

$$0 < \Delta t < 2\Delta t < \cdots < (N-2)\Delta t < (N-1)\Delta t < 1$$

Limitiamoci poi a curve $y = \gamma(t)$ i cui grafici siano le spezzate che passano per questi punti.

Linee spezzate



Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Considerando le curve come linee spezzate Eulero riduce il problema di dimensione infinita (di variabile γ) a uno di dimensione finita, in quanto gli unici valori su cui valutare le spezzate γ sono gli $N+1$ punti fra 0 e 1 di passo $\Delta t = 1/N$.

Quindi l'integrale si approssima a una somma

$$J(\gamma) = \frac{1}{v}\int_0^1 \|\gamma(t)\|\, dt \approx \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{1+\gamma'(k\Delta t)^2}\,\Delta t$$

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Ora poniamo $\gamma_k = \gamma(k\Delta t)$ per $k = 0, 1, 2, ..., N$ e approssimiamo γ'_k con $(\gamma_{k+1} - \gamma_k)/\Delta t$, quindi

$$J(\gamma) \approx \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$
$$= \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1} - \gamma_k)^2}$$

Quindi pensiamo a J come a una funzione di $N - 1$ variabili γ_1, ..., γ_{N-1} (si ricordi che gli estremi del problema, $\gamma(0) = \gamma(0)$ e $\gamma(1) = \gamma_N$ sono fissi!!!).

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Ora poniamo $\gamma_k = \gamma(k\Delta t)$ per $k = 0, 1, 2, ..., N$ e approssimiamo γ'_k con $(\gamma_{k+1} - \gamma_k)/\Delta t$, quindi

$$J(\gamma) \approx \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$
$$= \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1} - \gamma_k)^2}$$

Quindi pensiamo a J come a una funzione di $N - 1$ variabili γ_1, ..., γ_{N-1} (si ricordi che gli estremi del problema, $\gamma(0) = \gamma(0)$ e $\gamma(1) = \gamma_N$ sono fissi!!!).

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quindi il problema si riduce alla stazionarietà della funzione $J = J(\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1})$, che vuol dire annullarne le derivate parziali rispetto a tutte le variabili. Nel nostro caso

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_k} = \frac{1}{v}\left(\frac{-2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)}{2\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2}} + \frac{2(\gamma_k-\gamma_{k-1})}{2\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (\gamma_{k+1}-\gamma_k)\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2} = (\gamma_k-\gamma_{k-1})\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2}$$

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quindi il problema si riduce alla stazionarietà della funzione $J = J(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1})$, che vuol dire annullarne le derivate parziali rispetto a tutte le variabili. Nel nostro caso

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_k} = \frac{1}{v}\left(\frac{-2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)}{2\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2}} + \frac{2(\gamma_k-\gamma_{k-1})}{2\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (\gamma_{k+1}-\gamma_k)\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2} = (\gamma_k-\gamma_{k-1})\sqrt{\Delta t^2 + (\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2}$$

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quadrando i termini:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\Delta t^2+(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2)=\\
&\quad=(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2(\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow (\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2=\\
&\quad=(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\\
&\Longrightarrow \gamma_{k+1}^2+\gamma_k^2-2\gamma_{k+1}\gamma_k=\gamma_k^2+\gamma_{k-1}^2-2\gamma_k\gamma_{k-1}\\
&\Longrightarrow \gamma_{k+1}^2-\gamma_{k-1}^2=2\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1})\\
&\Longrightarrow \boxed{\gamma_{k+1}=2\gamma_k-\gamma_{k-1}}
\end{aligned}
$$

per ogni $k=1,2,\ldots,N-1$.

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quadrando i termini:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\Delta t^2+(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2)=\\
&\quad=(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2(\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2)\\
\Longrightarrow\ &(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2=\\
&\quad=(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2+\gamma_k^2-2\gamma_{k+1}\gamma_k=\gamma_k^2+\gamma_{k-1}^2-2\gamma_k\gamma_{k-1}\\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2-\gamma_{k-1}^2=2\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1})\\
\Longrightarrow\ &\boxed{\gamma_{k+1}=2\gamma_k-\gamma_{k-1}}
\end{aligned}
$$

per ogni $k=1,2,\ldots,N-1$.

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quadrando i termini:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\Delta t^2+(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2) = \\
&\qquad = (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2(\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2) \\
\Longrightarrow\ &(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2 = \\
&\qquad = (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2 \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2+\gamma_k^2-2\gamma_{k+1}\gamma_k = \gamma_k^2+\gamma_{k-1}^2-2\gamma_k\gamma_{k-1} \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2-\gamma_{k-1}^2 = 2\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1}) \\
\Longrightarrow\ &\boxed{\gamma_{k+1} = 2\gamma_k-\gamma_{k-1}}
\end{aligned}
$$

per ogni $k = 1, 2, ..., N-1$.

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quadrando i termini:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\Delta t^2+(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2) = \\
&\quad = (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2(\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2) \\
\Longrightarrow\ &(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2 = \\
&\quad = (\gamma_k-\gamma_{k-1})^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2 \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2+\gamma_k^2-2\gamma_{k+1}\gamma_k=\gamma_k^2+\gamma_{k-1}^2-2\gamma_k\gamma_{k-1} \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2-\gamma_{k-1}^2=2\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1}) \\
\Longrightarrow\ &\boxed{\gamma_{k+1}=2\gamma_k-\gamma_{k-1}}
\end{aligned}
$$

per ogni $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Quadrando i termini:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\Delta t^2+(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2)= \\
&\qquad =(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2(\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2) \\
\Longrightarrow\ &(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2= \\
&\qquad =(\gamma_k-\gamma_{k-1})^2\Delta t^2+(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2(\gamma_{k+1}-\gamma_k)^2 \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2+\gamma_k^2-2\gamma_{k+1}\gamma_k=\gamma_k^2+\gamma_{k-1}^2-2\gamma_k\gamma_{k-1} \\
\Longrightarrow\ &\gamma_{k+1}^2-\gamma_{k-1}^2=2\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1}) \\
\Longrightarrow\ &\boxed{\gamma_{k+1}=2\gamma_k-\gamma_{k-1}}
\end{aligned}
$$

per ogni $k=1,2,\dots,N-1$.

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Siamo quindi giunti al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \gamma_2 = 2\gamma_1 - \gamma_0 \\ \gamma_3 = 2\gamma_2 - \gamma_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_0 \\ \gamma_4 = 2\gamma_3 - \gamma_2 = 4\gamma_1 - 3\gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_k = k\gamma_1 - (k-1)\gamma_0 \\ \vdots \end{cases}$$

In particolare $\gamma_k = \gamma_0 + k(\gamma_1 - \gamma_0)$ e quindi tutti i punti $(k\Delta t, \gamma_k)$ stanno sulla retta che passa per i punti $(0, \gamma_0)$ e $(\Delta t, \gamma_1)$. *Dunque γ è la retta $y = \gamma_0 + t(\gamma_1 - \gamma_0)/\Delta t$!!!*

Esempio: il metodo di Eulero nel caso di Fermat

Siamo quindi giunti al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \gamma_2 = 2\gamma_1 - \gamma_0 \\ \gamma_3 = 2\gamma_2 - \gamma_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_0 \\ \gamma_4 = 2\gamma_3 - \gamma_2 = 4\gamma_1 - 3\gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_k = k\gamma_1 - (k-1)\gamma_0 \\ \vdots \end{cases}$$

In particolare $\gamma_k = \gamma_0 + k(\gamma_1 - \gamma_0)$ e quindi tutti i punti $(k\Delta t, \gamma_k)$ stanno sulla retta che passa per i punti $(0, \gamma_0)$ e $(\Delta t, \gamma_1)$. *Dunque* γ *è la retta* $y = \gamma_0 + t(\gamma_1 - \gamma_0)/\Delta t$*!!!*

Le equazioni di Eulero

Nel caso generale Eulero ricava, con dei passaggi al limite, le equazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

come equivalenti alla stazionarietà dell'integrale

$$J(\gamma) = \int_0^1 F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

associato a una funzione $F = F(t, y, \dot{y})$.

Questo consente di cercare le curve che minimizzano J risolvendo le equazioni di Eulero (che sono equazioni differenziali).

Le equazioni di Eulero

Nel caso generale Eulero ricava, con dei passaggi al limite, le equazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

come equivalenti alla stazionarietà dell'integrale

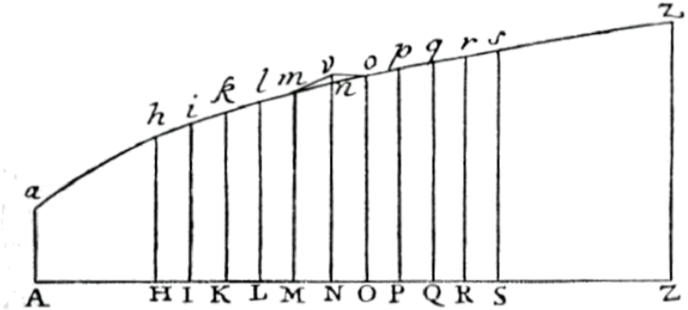
$$J(\gamma) = \int_0^1 F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

associato a una funzione $F = F(t, y, \dot{y})$.

Questo consente di cercare le curve che minimizzano J risolvendo le equazioni di Eulero (che sono equazioni differenziali).

Un metodo numerico ante litteram

Il metodo di Eulero è un antesignano dei *metodi numerici*, che funzionano a meraviglia se programmati sui computer. Ma non è teoricamente maneggevole e richiede molti conti: Eulero stesso lo lamenta nella sua memoria del 1744.



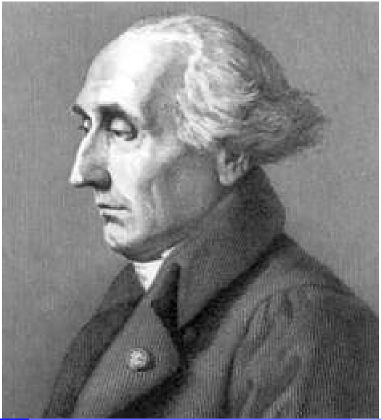
Il genio e la matricola

Nel 1755 Eulero rispose a un diciannovenne che gli aveta inviato, in una breve lettera, un metodo analitico per i problemi di minimo:

Letta la tua ultima lettera, nella quale mi sembra che tu abbia portato la teoria dei massimi e dei minimi quasi al suo più alto grado di perfezione, non posso ammirare abbastanza l'esimia sagacia del tuo ingegno. Giacché infatti, non solo nel mio trattato su questo argomento avevo desiderato un metodo puramente analitico, con il quale le regole ivi presentate possono essere ricavate, ma anche in seguito avevo impiegato non poco studio per perfezionare questo metodo, mi hai arrecato senz'altro una grandissima gioia, dato che mi ha voluto benevolmente comunicare le tue profondissime e solidissime riflessioni su queste cose, ragione per cui mi sento verso di te massimamente obbligato.

Lagrange

Fu Giuseppe Ludovico de Lagrangia (1736-1813), aka Joseph Louis Lagrange, che, dopo vari contatti con Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766), a 19 anni scrisse ad Eulero per comunicare la sua nuova teoria.



Il calcolo delle variazioni

L'idea di Lagrange è di determinare un formalismo differenziale per il calcolo dei funzionali analogo a quello di Leibniz per il calcolo delle funzioni.

In questo modo la formulazione geometrica di Eulero viene descritta in modo algebrico o, come si diceva allora, puramente analitico: l'approccio che Lagrange avrà nel corso di tutte le sue ricerche di analisi, meccanica, etc.

Eulero abbandonò il suo metodo per abbracciare quello del giovane sconosciuto, battezzandolo *calcolo delle variazioni*.

Il calcolo delle variazioni

L'idea di Lagrange è di determinare un formalismo differenziale per il calcolo dei funzionali analogo a quello di Leibniz per il calcolo delle funzioni.

In questo modo la formulazione geometrica di Eulero viene descritta in modo algebrico o, come si diceva allora, puramente analitico: l'approccio che Lagrange avrà nel corso di tutte le sue ricerche di analisi, meccanica, etc.

Eulero abbandonò il suo metodo per abbracciare quello del giovane sconosciuto, battezzandolo *calcolo delle variazioni*.

Il calcolo delle variazioni

L'idea di Lagrange è di determinare un formalismo differenziale per il calcolo dei funzionali analogo a quello di Leibniz per il calcolo delle funzioni.

In questo modo la formulazione geometrica di Eulero viene descritta in modo algebrico o, come si diceva allora, puramente analitico: l'approccio che Lagrange avrà nel corso di tutte le sue ricerche di analisi, meccanica, etc.

Eulero abbandonò il suo metodo per abbracciare quello del giovane sconosciuto, battezzandolo *calcolo delle variazioni*.

Il calcolo di Lagrange

Lagrange introduce un nuovo tipo di "differenziale", la *variazione*, denotata con δZ, di una quantità Z dipendente almeno da t.

Lagrange nota le seguenti proprietà di δ:

1. $\delta t = 0$ (variabile indipendente)
2. $\delta Z' = (\delta Z)'$
3. $\delta \int Z = \int \delta Z$

Se $Z = Z(t, y, y', y'', \ldots)$ e se $J(\gamma) = \int Z(t, \gamma(t), \gamma'(t), \ldots)\, dt$ allora per scrivere l'equazione $\delta \int Z = \int \delta Z = 0$ procede come segue.

Il calcolo di Lagrange

Lagrange introduce un nuovo tipo di "differenziale", la *variazione*, denotata con δZ, di una quantità Z dipendente almeno da t.

Lagrange nota le seguenti proprietà di δ:

1. $\delta t = 0$ (variabile indipendente)
2. $\delta Z' = (\delta Z)'$
3. $\delta \int Z = \int \delta Z$

Se $Z = Z(t, y, y', y'', \ldots)$ e se $J(\gamma) = \int Z(t, \gamma(t), \gamma'(t), \ldots)\, dt$ allora per scrivere l'equazione $\delta \int Z = \int \delta Z = 0$ procede come segue.

Il calcolo di Lagrange

Lagrange introduce un nuovo tipo di "differenziale", la *variazione*, denotata con δZ, di una quantità Z dipendente almeno da t.

Lagrange nota le seguenti proprietà di δ:

1. $\delta t = 0$ (variabile indipendente)
2. $\delta Z' = (\delta Z)'$
3. $\delta \int Z = \int \delta Z$

Se $Z = Z(t, y, y', y'', \dots)$ e se $J(\gamma) = \int Z(t, \gamma(t), \gamma'(t), \dots)\, dt$ allora per scrivere l'equazione $\delta \int Z = \int \delta Z = 0$ procede come segue.

Il calcolo di Lagrange

Prima sviluppa δZ in serie

$$\delta Z = N\delta y + P\delta y' + Q\delta y'' + R\delta y''' + \cdots$$

trovando che

$$\delta \int Z = \int \delta Z = \int N\delta y + \int P\delta y' + \int Q\delta y'' + \cdots$$

e poi integrando per parti (regola: $\int fg' = fg - \int f'g$):

$$\delta \int Z = \int N\delta y + P\delta y - \int P'\delta y + $$
$$+ Q\delta y' - Q'\delta y + \int Q''\delta y + \cdots$$

Il calcolo di Lagrange

Prima sviluppa δZ in serie

$$\delta Z = N\delta y + P\delta y' + Q\delta y'' + R\delta y''' + \cdots$$

trovando che

$$\delta \int Z = \int \delta Z = \int N\delta y + \int P\delta y' + \int Q\delta y'' + \cdots$$

e poi integrando per parti (regola: $\int fg' = fg - \int f'g$):

$$\delta \int Z = \int N\delta y + P\delta y - \int P'\delta y + \\ + Q\delta y' - Q'\delta y + \int Q''\delta y + \cdots$$

Il calcolo di Lagrange

I termini non integrati si annullano in quanto le curve hanno estremi fissi, per cui:

$$\delta \int Z = \int (N - P' + Q'' - \cdots)\, \delta y + \cdots$$

Quindi, data l'arbitrarietà della variazione, affinché $\delta \int Z = 0$ deve essere:

$$N - P' + Q'' - \cdots = 0$$

Ma $\delta Z = N\delta y + P\delta y' + Q\delta y'' + \cdots$, quindi

$$N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial Z}{\partial y'}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y''}, \qquad \cdots$$

Il calcolo di Lagrange

I termini non integrati si annullano in quanto le curve hanno estremi fissi, per cui:

$$\delta \int Z = \int (N - P' + Q'' - \cdots)\,\delta y + \cdots$$

Quindi, data l'arbitrarietà della variazione, affinché $\delta \int Z = 0$ deve essere:

$$N - P' + Q'' - \cdots = 0$$

Ma $\delta Z = N\delta y + P\delta y' + Q\delta y'' + \cdots$, quindi

$$N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial Z}{\partial y'}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y''}, \qquad \cdots$$

Il calcolo di Lagrange

I termini non integrati si annullano in quanto le curve hanno estremi fissi, per cui:

$$\delta \int Z = \int (N - P' + Q'' - \cdots)\, \delta y + \cdots$$

Quindi, data l'arbitrarietà della variazione, affinché $\delta \int Z = 0$ deve essere:

$$N - P' + Q'' - \cdots = 0$$

Ma $\delta Z = N\delta y + P\delta y' + Q\delta y'' + \cdots$, quindi

$$N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial Z}{\partial y'}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y''}, \qquad \cdots$$

Il calcolo di Lagrange

Dunque le condizioni equivalenti a $\delta \int Z = 0$ sono

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial Z}{\partial y''}\right)'' - \cdots = 0$$

cioè le equazioni di Eulero–Lagrange.

Pur essendo stato Lagrange il più rigoroso matematico della sua epoca, questo elegante ragionamento simbolico va precisato, secondo gli standard moderni, ma l'idea è tuttavia quella giusta.

Il calcolo di Lagrange

Dunque le condizioni equivalenti a $\delta \int Z = 0$ sono

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial Z}{\partial y''}\right)'' - \cdots = 0$$

cioè le equazioni di Eulero–Lagrange.

Pur essendo stato Lagrange il più rigoroso matematico della sua epoca, questo elegante ragionamento simbolico va precisato, secondo gli standard moderni, ma l'idea è tuttavia quella giusta.

Come lo diremmo oggi...

Oggi nel calcolo delle variazioni non si usa più la notazione lagrangiana ma quella dell'analisi funzionale del XX secolo. Tuttavia possiamo interpretare facilmente il significato di δZ come segue.

Consideriamo una curva $\gamma(t)$ che minimizza un funzionale $J(\gamma)$; questo vuol dire che un'altra curva $\bar{\gamma}$ "vicina" a γ è tale che $J(\bar{\gamma}) > J(\gamma)$.

Scriviamo

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + \varepsilon\eta(t)$$

dove $\varepsilon > 0$ e η è un'altra curva.

Come lo diremmo oggi...

Oggi nel calcolo delle variazioni non si usa più la notazione lagrangiana ma quella dell'analisi funzionale del XX secolo. Tuttavia possiamo interpretare facilmente il significato di δZ come segue.

Consideriamo una curva $\gamma(t)$ che minimizza un funzionale $J(\gamma)$; questo vuol dire che un'altra curva $\bar{\gamma}$ "vicina" a γ è tale che $J(\bar{\gamma}) > J(\gamma)$.

Scriviamo

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + \varepsilon\eta(t)$$

dove $\varepsilon > 0$ e η è un'altra curva.

Come lo diremmo oggi...

Oggi nel calcolo delle variazioni non si usa più la notazione lagrangiana ma quella dell'analisi funzionale del XX secolo. Tuttavia possiamo interpretare facilmente il significato di δZ come segue.

Consideriamo una curva $\gamma(t)$ che minimizza un funzionale $J(\gamma)$; questo vuol dire che un'altra curva $\bar{\gamma}$ "vicina" a γ è tale che $J(\bar{\gamma}) > J(\gamma)$.

Scriviamo

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + \varepsilon\eta(t)$$

dove $\varepsilon > 0$ e η è un'altra curva.

Variare una curva

Chiaramente, se $\varepsilon \to 0$ allora $\bar{\gamma}(t)$ tende a $\gamma(t)$ punto per punto: allora la *variazione* di γ è

$$\delta\gamma = \bar{\gamma} - \gamma = \varepsilon\eta$$

Differenza fra dy e δy

Sia $y = y(t)$ una funzione.

Il differenziale dy è una variazione indotta dal differenziale di dt che "vive" sulla retta tangente al grafico $y = y(t)$.

La variazione δy riguarda direttamente y (infatti $\delta t = 0$) ed è ottenuta "perturbando" in modo infinitesimale la funzione y in modo arbitrario!!!

La variazione di una funzione

Se $F = F(t, y, y')$ allora possiamo scrivere la formula di Taylor al primo ordine in ε (non a caso chiamata *teorema di Lagrange*):

$$\delta F(t, y, y') = F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') - F(t, y, y')$$

$$= \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') + \cdots$$

$$= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{d\varepsilon}(y + \varepsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{d\varepsilon}(y' + \varepsilon\eta') \right) + \cdots$$

$$= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) + \cdots$$

dove i $\cdots$ indicano termini di ordine superiore in ε.

La variazione di una funzione

Se $F = F(t, y, y')$ allora possiamo scrivere la formula di Taylor al primo ordine in ε (non a caso chiamata *teorema di Lagrange*):

$$\begin{aligned}
\delta F(t, y, y') &= F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') - F(t, y, y') \\
&= \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') + \cdots \\
&= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{d\varepsilon}(y + \varepsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{d\varepsilon}(y' + \varepsilon\eta') \right) + \cdots \\
&= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) + \cdots
\end{aligned}$$

dove i $\cdots$ indicano termini di ordine superiore in ε.

La variazione di una funzione

Se $F = F(t, y, y')$ allora possiamo scrivere la formula di Taylor al primo ordine in ε (non a caso chiamata *teorema di Lagrange*):

$$
\begin{aligned}
\delta F(t, y, y') &= F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') - F(t, y, y') \\
&= \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} F(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') + \cdots \\
&= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{d\varepsilon}(y + \varepsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{d\varepsilon}(y' + \varepsilon\eta') \right) + \cdots \\
&= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) + \cdots
\end{aligned}
$$

dove i $\cdots$ indicano termini di ordine superiore in ε.

La variazione di un integrale

Pertanto possiamo formalizzare il ragionamento di Lagrange per calcolare $\delta \int_a^b F$:

$$\delta \int_a^b F(t, y, y')\, dt = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dt$$

Ora integriamo per parti

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'\, dt = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta\, dt$$

$$= - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta\, dt$$

(il primo termine si annulla in quanto $\eta(a) = \eta(b)$).

La variazione di un integrale

Pertanto possiamo formalizzare il ragionamento di Lagrange per calcolare $\delta \int_a^b F$:

$$\delta \int_a^b F(t, y, y')\, dt = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) \, dt$$

Ora integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\, dt &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\, dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\, dt \end{aligned}$$

(il primo termine si annulla in quanto $\eta(a) = \eta(b)$).

La variazione di un integrale

Sostituendo nell'espressione fin qui ricavata per $\delta \int F$:

$$\delta \int_a^b F(t, y, y')\, dt = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dt$$

Poiché η è arbitraria, l'annullarsi dell'integrale appena scritto equivale all'annullarsi della funzione integranda, e quindi alla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Queste sono le equazioni che Eulero aveva trovato *per via geometrica.*

La variazione di un integrale

Sostituendo nell'espressione fin qui ricavata per $\delta \int F$:

$$\delta \int_a^b F(t, y, y')\, dt = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta\, dt$$

Poiché η è arbitraria, l'annullarsi dell'integrale appena scritto equivale all'annullarsi della funzione integranda, e quindi alla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Queste sono le equazioni che Eulero aveva trovato *per via geometrica.*

La variazione di un integrale

Sostituendo nell'espressione fin qui ricavata per $\delta \int F$:

$$\delta \int_a^b F(t, y, y')\, dt = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta\, dt$$

Poiché η è arbitraria, l'annullarsi dell'integrale appena scritto equivale all'annullarsi della funzione integranda, e quindi alla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Queste sono le equazioni che Eulero aveva trovato *per via geometrica*.

Questo è solo l'inizio...

La formulazione settecentesca del calcolo delle variazioni stabilisce riguarda solo la stazionarietà dell'integrale $J(\gamma)$.

Soltanto nell'800 saranno determinate, da Carl Gustav Jacobi (1804-1851) e Karl Weierstrass (1815-1897), le condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi ma, a differenza di quanto supponevano gli epigoni di Lagrange, come Adrien-Marie Legendre (1752-1833), non si formulano in termini di una "variazione seconda".

Il calcolo delle variazioni sarà nel XIX e XX secolo applicato alle equazioni a derivate parziali e alla geometria differenziale (e alle loro innumerevoli applicazioni).

Questo è solo l'inizio...

La formulazione settecentesca del calcolo delle variazioni stabilisce riguarda solo la stazionarietà dell'integrale $J(\gamma)$.

Soltanto nell'800 saranno determinate, da Carl Gustav Jacobi (1804-1851) e Karl Weierstrass (1815-1897), le condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi ma, a differenza di quanto supponevano gli epigoni di Lagrange, come Adrien-Marie Legendre (1752-1833), non si formulano in termini di una "variazione seconda".

Il calcolo delle variazioni sarà nel XIX e XX secolo applicato alle equazioni a derivate parziali e alla geometria differenziale (e alle loro innumerevoli applicazioni).

Questo è solo l'inizio...

La formulazione settecentesca del calcolo delle variazioni stabilisce riguarda solo la stazionarietà dell'integrale $J(\gamma)$.

Soltanto nell'800 saranno determinate, da Carl Gustav Jacobi (1804-1851) e Karl Weierstrass (1815-1897), le condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi ma, a differenza di quanto supponevano gli epigoni di Lagrange, come Adrien-Marie Legendre (1752-1833), non si formulano in termini di una "variazione seconda".

Il calcolo delle variazioni sarà nel XIX e XX secolo applicato alle equazioni a derivate parziali e alla geometria differenziale (e alle loro innumerevoli applicazioni).

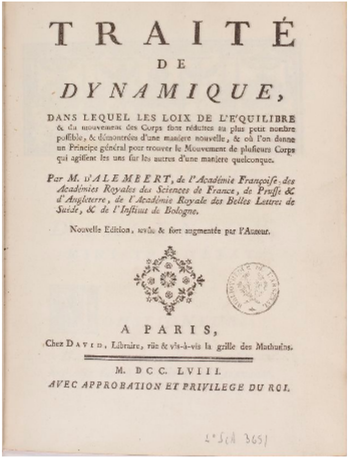
Terza parte: princip$\hat{\imath}$ variazionali

Jean Baptiste D'Alembert La Ronde (1717-1783)

Lagrange ha introdotto δy per risolvere problemi di analisi e geometria: tuttavia si interessava anche alla meccanica, in particolare tramite l'opera di Eulero e d'Alembert.

La dinamica di di D'Alembert

Nel suo influente trattato, d'Alembert tratta tutta la meccanica sulla base di un unico principio, introdotto da Bernoulli nel 1717: il *principio dei lavori virtuali*.


TRAITÉ

DE

DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'ÉQUILIBRE & du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.

Nouvelle Edition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.

A PARIS,

Chez DAVID, Libraire, rüe & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Il principio dei lavori virtuali

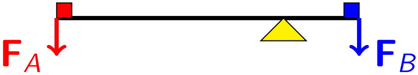
Johann Bernoulli aveva formulato questo principio per fondare la statica: consideriamo n punti $P_1, \dots, P_n$ soggetti a forze $\mathbf{F}_1$, ..., $\mathbf{F}_n$ in modo che il sistema sia in equilibrio: allora, se $\delta\mathbf{x}$ è uno spostamento virtuale del sistema, si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{F}_k, \delta\mathbf{x} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k, \delta\mathbf{x} \right\rangle = 0 \qquad \text{(prodotti scalari)}$$

Cioè le forze sono ortogonali a questi spostamenti virtuali (che sono reversibili e arbitrari purché compatibili con i vincoli cinematici).

Esempio: la leva

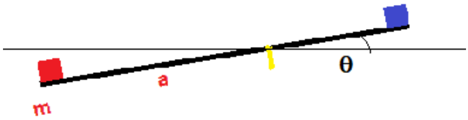
Se due pesi A e B sono applicati alle estremità di una leva di bracci a e b, quand'è che la leva è in equilibrio? Le forze sono vettori nel piano zx e, centrando l'origine nel fulcro della leva, sono $\mathbf{F}_A = (0, -gm_A)$, $\mathbf{F}_B = (0, -gm_B)$ applicate nei punti $(-a, 0)$ e $(b, 0)$ rispettivamente.



Esempio: la leva

Uno spostamento virtuale deve rispettare i vincoli del sistema, quindi deve lasciare fisso il fulcro e far ruotare attorno a esso i punti A e B: scriviamo un punto del piano come $\mathbf{x} = r(\cos\theta, \sin\theta)$, quindi

$$\delta\mathbf{x} = (-r\sin\theta, -r\cos\theta)\delta\theta$$



Esempio: la leva

I tre punti A, B e O (fulcro) del sistema sono quindi soggetti agli spostamenti

$$\begin{aligned} \delta B &= (-b\sin\theta, b\cos\theta)\delta\theta \\ \delta A &= (a\sin\theta, -a\cos\theta)\delta\theta \\ \delta O &= 0 \end{aligned}$$

(infatti $A = -(a/b)B$ quindi $\delta A = -(a/b)\delta B$).

Esempio: la leva

Il principio dei lavori virtuali si scrive quindi come

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{F}_A, \delta A\rangle + \langle \mathbf{F}_B, \delta B\rangle \\ &= -\frac{a}{b}\langle \mathbf{F}_A, \delta B\rangle + \langle \mathbf{F}_B, \delta B\rangle \\ &= -\frac{a}{b} g m_A b \cos\theta\delta\theta + g m_B b \cos\theta\delta\theta \\ &= (b m_B - a m_A) g \cos\theta\delta\theta \end{aligned}$$

Quindi o si ha $\theta = \pm\pi/2$ oppure $a m_A = b m_B$ che è infatti la legge di equilibrio di una leva già determinata da Archimede.

Il principio di d'Alembert

D'Alembert introduce una nuova quantità, la *forza di inerzia*, definita come $\mathbf{I} = -m\ddot{\mathbf{x}}$: allora il secondo principio di Newton si scrive

$$\mathbf{I} + \mathbf{F} = 0$$

Questa equazione afferma che se aggiungiamo l'inerzia alle forze impresse il corpo si trova in equilibrio: pertanto possiamo applicare il principio dei lavori virtuali e dedurre che

$$\sum_k \langle \mathbf{I}_k + \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{x} \rangle = 0$$

In questo modo *un principio della dinamica è ridotto a un principio della statica*.

Mécanique analytique, 1788

Si tratta dell'opus magnum di Lagrange.

AVERTISSEMENT.

On a déja pluſieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci eſt entiérement neuf. Je me ſuis propoſé de réduire la théorie de cette Science, & l'art de réſoudre les problêmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le ſimple développement donne toutes les équations néceſſaires pour la ſolution de chaque problême. J'eſpere que la maniere dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laiſſera rien à deſirer.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité; il réunira & préſentera ſous un même point de vue, les différens Principes trouvés juſqu'ici pour faciliter la ſolution des queſtions de Méchanique, en montrera la liaiſon & la dépendance mutuelle, & mettra à portée de juger de leur juſteſſe & de leur étendue.

Je le diviſe en deux Parties; la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, & la Dynamique ou la Théorie

du Mouvement; & chacune de ces Parties traitera ſéparément des Corps ſolides & des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expoſe ne demandent ni conſtructions, ni raiſonnemens géométriques ou méchaniques, mais ſeulement des opérations algébriques, aſſujetties à une marche réguliere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyſe, verront avec plaiſir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me ſauront gré d'en avoir étendu ainſi le domaine.

La meccanica lagrangiana

Lagrange immagina un sistema meccanico che dipenda da n parametri $q_1, \ldots, q_n$ e dalle loro derivate rispetto al tempo $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$: questi parametri non rappresentano necessariamente le coordinate spaziali dei corpi ma i parametri necessari a descrivere completamente il sistema a un dato istante.

La dinamica di un sistema meccanico (conservativo) è descritta completamente da una singola funzione scalare $L = T - U$, la *lagrangiana*, dove T è l'energia cinetica e U l'energia potenziale del sistema: nel caso di un sistema unidimensionale

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

La meccanica lagrangiana

Lagrange immagina un sistema meccanico che dipenda da n parametri $q_1, \ldots, q_n$ e dalle loro derivate rispetto al tempo $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$: questi parametri non rappresentano necessariamente le coordinate spaziali dei corpi ma i parametri necessari a descrivere completamente il sistema a un dato istante.

La dinamica di un sistema meccanico (conservativo) è descritta completamente da una singola funzione scalare $L = T - U$, la *lagrangiana*, dove T è l'energia cinetica e U l'energia potenziale del sistema: nel caso di un sistema unidimensionale

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

Il principio di Hamilton

In sostanza, Langrange formula il principio di d'Alembert come

$$\delta \int L = 0$$

e lo usa per dedurre le equazioni del moto di un sistema dinamico, le equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Nei termini in cui l'abbiamo data, questa formulazione è dovuta a Hamilton, che introdurrà un metodo fondamentale nella fisica del XX secolo, il formalismo hamiltoniano.

Il principio di Hamilton

In sostanza, Langrange formula il principio di d'Alembert come

$$\delta \int L = 0$$

e lo usa per dedurre le equazioni del moto di un sistema dinamico, le equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Nei termini in cui l'abbiamo data, questa formulazione è dovuta a Hamilton, che introdurrà un metodo fondamentale nella fisica del XX secolo, il formalismo hamiltoniano.

William Rowan Hamilton (1805-1865)

Esempio

Consideriamo un sistema unidimensionale con potenziale $U(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$: questo vuol dire che per $q = 0$ il potenziale ha un minimo, si annulla, mentre per gli altri valori, in modo simmetrico, cresce.

La lagrangiana è $L = T - U$ e quindi le equazioni di Eulero–Lagrange sono:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\omega^2 q^2\right) - \frac{d}{dt} m\dot{q} = -\omega^2 q - m\ddot{q}
\end{aligned}
$$

Ritroviamo quindi il moto armonico $m\ddot{q} = -\omega^2 q$.

Esempio

Consideriamo un sistema unidimensionale con potenziale $U(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$: questo vuol dire che per $q = 0$ il potenziale ha un minimo, si annulla, mentre per gli altri valori, in modo simmetrico, cresce.

La lagrangiana è $L = T - U$ e quindi le equazioni di Eulero–Lagrange sono:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\omega^2 q^2\right) - \frac{d}{dt} m\dot{q} = -\omega^2 q - m\ddot{q}\end{aligned}$$

Ritroviamo quindi il moto armonico $m\ddot{q} = -\omega^2 q$.

Il principio della minima azione

I principî di d'Alembert, la formulazione che ne dà Lagrange, e di Hamilton sono versioni del *principio della minima azione* che era anche stato formulato da Eulero e da Pierre Louis Maupertuis (1698-1759), che lo gravò anche di interpretazioni metafisiche.

Per formularlo possiamo definire l'*azione* in un sistema lagrangiano come

$$A = \int \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, dt$$

Il principio della minima azione è allora $\delta A = 0$.

Il principio della minima azione

I principî di d'Alembert, la formulazione che ne dà Lagrange, e di Hamilton sono versioni del *principio della minima azione* che era anche stato formulato da Eulero e da Pierre Louis Maupertuis (1698-1759), che lo gravò anche di interpretazioni metafisiche.
Per formularlo possiamo definire l'*azione* in un sistema lagrangiano come

$$A = \int \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, dt$$

Il principio della minima azione è allora $\delta A = 0$.

La riscoperta dei principî

Nell'800 la meccanica analitica di Lagrange e Hamilton fu considerata una riformulazione della teoria di Newton, elegante ma in fondo superflua. Ma nel XX secolo le cose cambiarono: la meccanica newtoniana fu messa in discussione da:

- Relatività generale, che David Hilbert (1862-1943) fonderà su un principio variazionale.
- Meccanica quantistica, che Erwin Schrödinger (1887-1961) formulerà utilizzando il formalismo hamiltoniano, mentre Feynman fonderà la QED su un approccio lagrangiano e su un principio della minima azione.

La riscoperta dei principî

Nell'800 la meccanica analitica di Lagrange e Hamilton fu considerata una riformulazione della teoria di Newton, elegante ma in fondo superflua. Ma nel XX secolo le cose cambiarono: la meccanica newtoniana fu messa in discussione da:

- Relatività generale, che David Hilbert (1862-1943) fonderà su un principio variazionale.
- Meccanica quantistica, che Erwin Schrödinger (1887-1961) formulerà utilizzando il formalismo hamiltoniano, mentre Feynman fonderà la QED su un approccio lagrangiano e su un principio della minima azione.

La riscoperta dei principî

Nell'800 la meccanica analitica di Lagrange e Hamilton fu considerata una riformulazione della teoria di Newton, elegante ma in fondo superflua. Ma nel XX secolo le cose cambiarono: la meccanica newtoniana fu messa in discussione da:

- Relatività generale, che David Hilbert (1862-1943) fonderà su un principio variazionale.
- Meccanica quantistica, che Erwin Schrödinger (1887-1961) formulerà utilizzando il formalismo hamiltoniano, mentre Feynman fonderà la QED su un approccio lagrangiano e su un principio della minima azione.

Per saperne di più...

P. Caressa, *Piccola storia della matematica, 2*

I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*

H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*

L. Landau, E, Lifšitz, *Meccanica*

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

B.L. Moiseiwitsch, *Variational Principles*

W. Yourgrau, S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*

`http://www.caressa.it`
`twitter: @www_caressa_it`