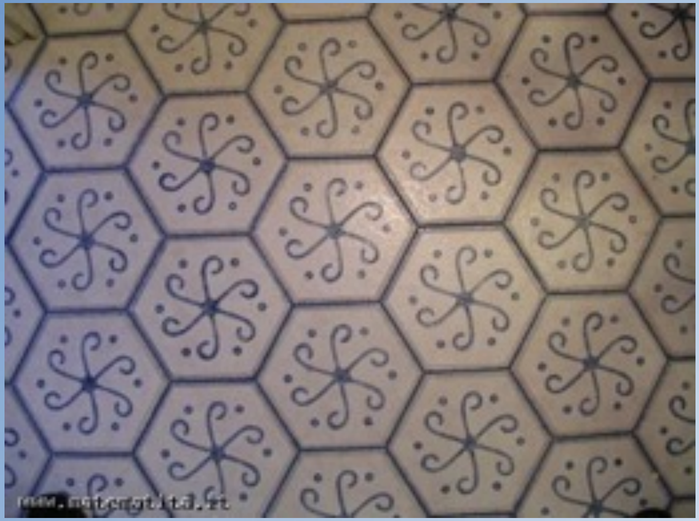
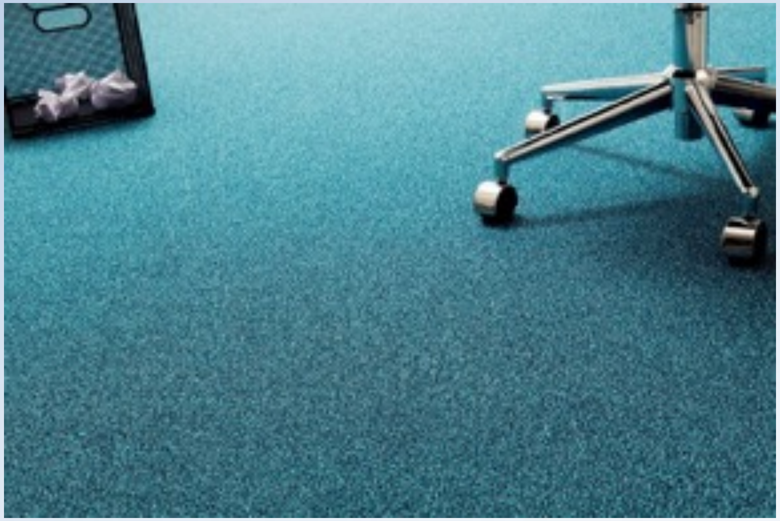
Tra piastrelle e moquette

Una carrellata di esempi sui numeri (prima dei reali)

I matematici risolvono problemi. Idee, protagonisti, proposte didattiche.
Siracusa, 30-09-2016, M. Dedò

Perché questo titolo?





Genova, 2015, convegno Pristem.
Si parlava di misura…
… di che cosa vuol dire misurare…
… del fatto che i pavimenti delle cucine (nei libri di scuola) non possono avere sempre un numero intero di piastrelle, nemmeno alla scuola primaria!…
… e una collega mi ha raccontato poi una storia deliziosa…

Che cosa faccio (qui)?

Una carrellata di esempi sui numeri, all'insegna della **verticalità**: ovvero, dove e come e quando agli insegnanti può servire tenere presente "che cosa succede dopo": le sottolineature che possono risultare preziose dopo e quelle che è meglio evitare.

Gli esempi:

- I numeri per misurare
- Numeri periodici
- La somma di frazioni e il mcm
- Il prodotto non è una somma ripetuta
- A proposito di potenze
- A proposito di numeri relativi
- Regolarità numeriche
- Quando c'è il successivo
- Come si scrive la divisione

quasi tutti gli esempi provengono da…

MathUp

Un primo esempio: i numeri per misurare

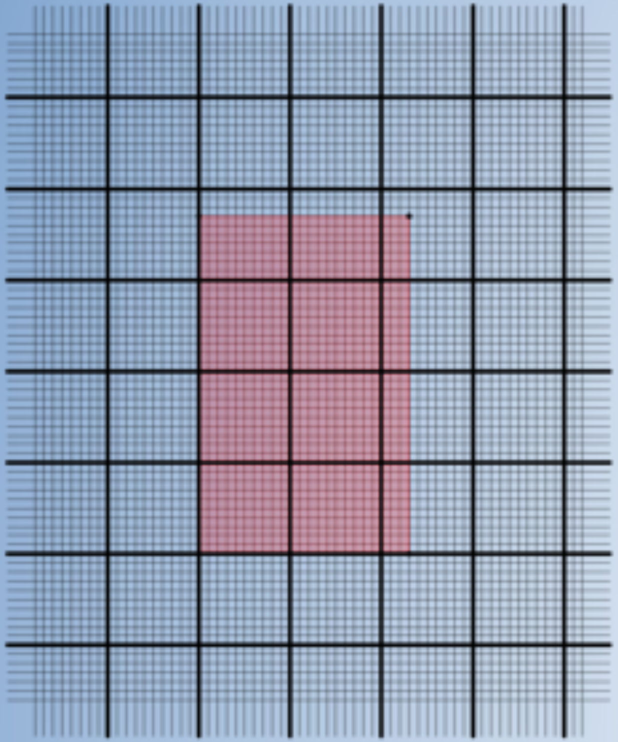
Quanti? *Quanto?*

Numeri per contare e numeri per misurare (piastrelle e moquette…).

C'è una difficoltà (grossa) all'orizzonte (**R**…).
Non serve evitarla o nasconderla, serve preparare il terreno…

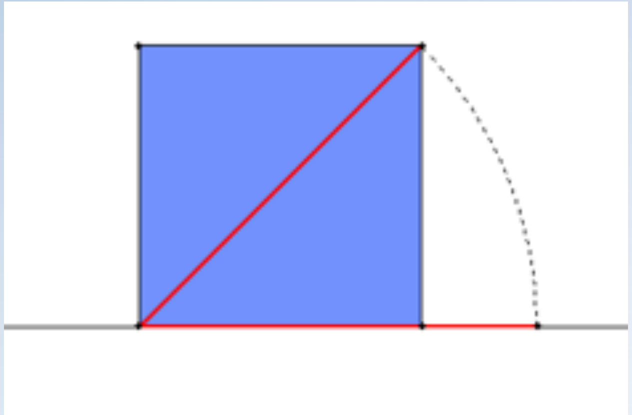
Attenzione a non creare stereotipi che possono causare problemi in una fase successiva dell'apprendimento.

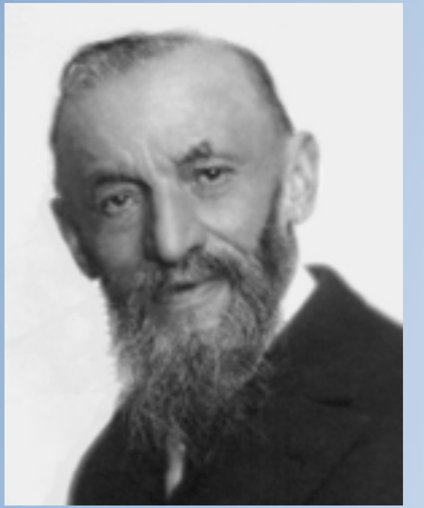
Se tutte le cucine fossero come nei libri di scuola, basterebbe contare e non ci sarebbe bisogno di misurare!



Da un libro, a latere di una figura analoga a questa:
i quadrati di lato 1 cm non sono contenuti un numero esatto di volte: basterà allora scegliere un'unità di misura più piccola…
Ci sta bene?

Anche con le mezze piastrelle, e anche con i millimetri, basterebbe contare e non ci sarebbe bisogno di misurare…
… **SE** fossero sempre mezze piastrelle o millimetri…
… ma sappiamo che non è così.





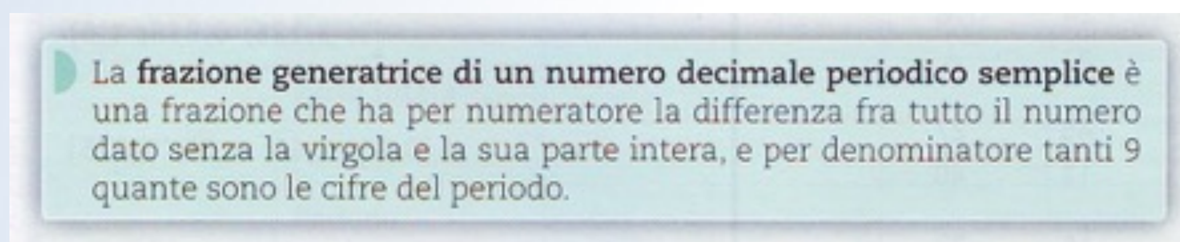
Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere. ***Non sta nell'affermare tutte le verità possibili…*** *della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che è maggiormente utile agli alunni… Se la dimostrazione è complicata,* ***possiamo tacere questa verità.***
Giuseppe Peano 1858-1932

Un altro esempio: i numeri periodici

È un capitolo di matematica dove spuntano elementi che possono essere curiosi e/o affascinanti: ci si affaccia all'infinito....

142857 x 2 = 285714
142857 x 3 = 428571
142857 x 4 = 571428
142857 x 5 = 714285
142857 x 6 = 857142
142857 x 7 = 999999
… e
0,9999999…. =1

Però non così… !!!


La **frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra tutto il numero dato senza la virgola e la sua parte intera, e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Capita di trovare un capitolo sui numeri periodici che è pieno di “regole” da “imparare”, e che invece neppure mai cita ai ragazzi il solo motivo per cui questi numeri sono periodici: il resto di una divisione è più piccolo del divisore.

Perché siamo sicuri che ci sono due abitanti di Milano con lo stesso numero di capelli?

Il motivo è lo stesso!

1,0 : 7

30 0,14285714….

20

60

40

50

10

30

…..**1/7 = 0,(142857)**

Un altro esempio: la somma di frazioni e il mcm

C'è l'approccio:
Si deve fare così!

Nell'addizione di frazioni distinguiamo **due casi**.

A. Addizione di frazioni aventi denominatori uguali

La somma di due o più frazioni aventi lo stesso denominatore è una frazione avente per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

B. Addizione di frazioni aventi denominatori diversi

Per addizionare due o più frazioni aventi denominatori diversi, dapprima si riducono le frazioni al minimo comune denominatore e poi si addizionano i rispettivi numeratori.

1. Scrivi in ordine crescente tutte le frazioni minori di 2 che hanno il denominatore eguale a 12, cioè scrivi $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$ ...., e riduci ogni frazione ai minimi termini. Sopra una striscia di carta millimetrata (o a quadretti) riporta le scale indicate in figura. Quanti centimetri è lunga la striscia?

2. Sapresti servirti di questo diagramma per fare i calcoli seguenti?

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{5}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$; $\frac{11}{12}-\frac{1}{4}$

c) $\frac{17}{3}+\frac{21}{4}$; $\frac{15}{4}+\frac{25}{6}$; $\frac{11}{6}+\frac{3}{12}$

(puoi scrivere $\frac{17}{3}=5+\frac{2}{3}$; $\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$; ecc.).

E c'è l'approccio: *Provaci tu!*
è molto diverso…

Come è molto diverso dire che ***si deve*** *fare il minimo comun denominatore* o che ***si può*** *fare il minimo comun denominatore*.

Usare il minimo comune denominatore è una possibilità; non è l'unica; non è detto che sia la più **conveniente**; non è detto che sia la più **opportuna**.

Un'altra possibilità molto **naturale** è quella di usare il **prodotto** dei denominatori:

$$1/6 + 3/8 \quad = \quad 8/48 + 18/48 \quad = \quad 26/48 \quad = \quad 13/24$$

È più conveniente il prodotto o il mcm?
Dipende!

È più opportuno il prodotto o il mcm?
Attenzione a cosa succede dopo…!

$a/b + c/d = (ad + bc)/bd.$

Verticalità e cammino verso l'algebra: quando i ragazzi dovranno sommare due frazioni algebriche, useranno il prodotto. E noi vorremmo che fossero in grado di leggerlo come una **generalizzazione di ciò che già sanno**, e non che appaia loro come *qualcosa che non c'entra nulla*…

Bene segnalare che (a volte) semplifica la vita usare il mcm invece del prodotto; dannoso invece il prevederlo in maniera meccanica e univoca sempre e ovunque.

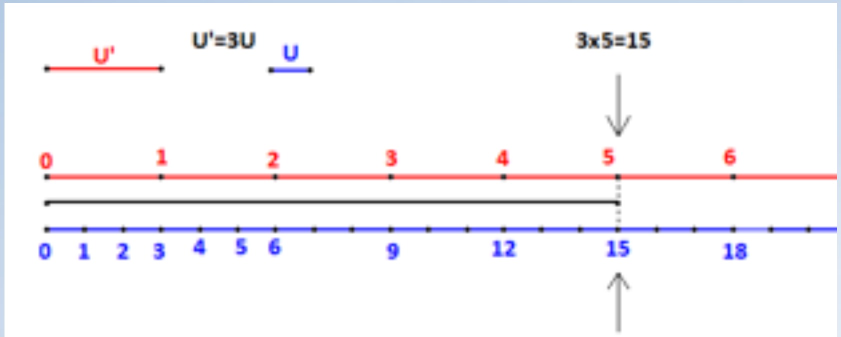
Un altro esempio:
il prodotto non è una somma ripetuta

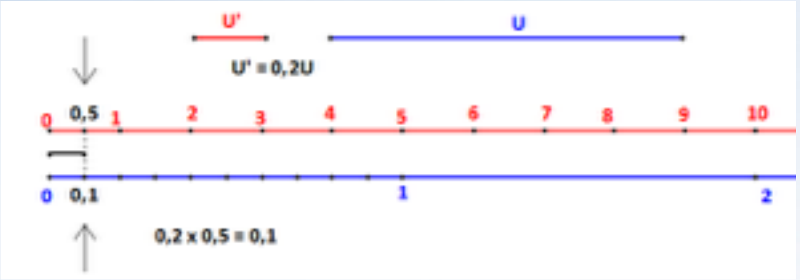
La moltiplicazione è un'operazione a sé stante, che non è riconducibile alla somma (anche se capita che coincida con la somma ripetuta quando uno dei due fattori è un numero naturale).

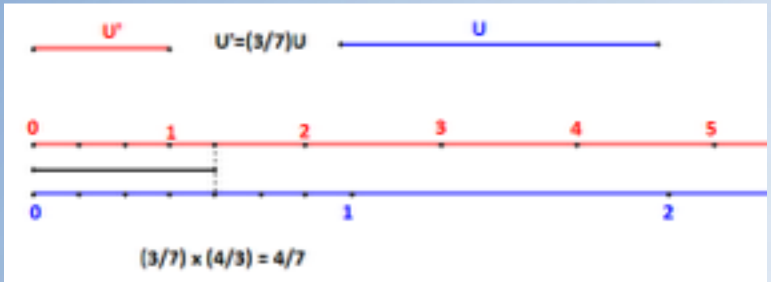
Coltivare (esclusivamente) il modello della somma ripetuta crea uno stereotipo che può diventare pericoloso perché ne genera altri (il prodotto è maggiore dei fattori…) e perché manda in crisi davanti a moltiplicazioni come 0,2 x 0,5 oppure 3/7 x 4/3, oppure $\sqrt{2} \times \pi$.

Il cambiamento di scala è un buon modello per il prodotto perché "funziona" sempre, non solo con i numeri naturali.

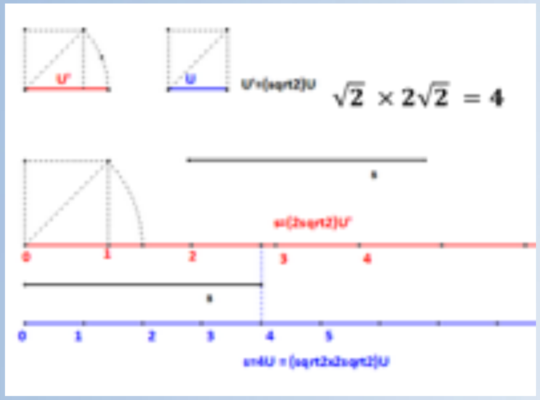
Lo schema di un cambiamento di scala si applica identico a numeri naturali, decimali, frazionari,... reali.



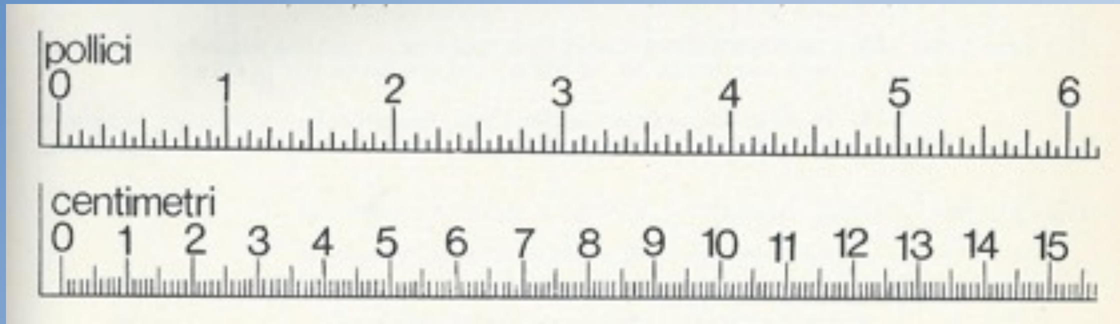




... e non c’entra con la somma ripetuta (neanche nel caso dei naturali)...

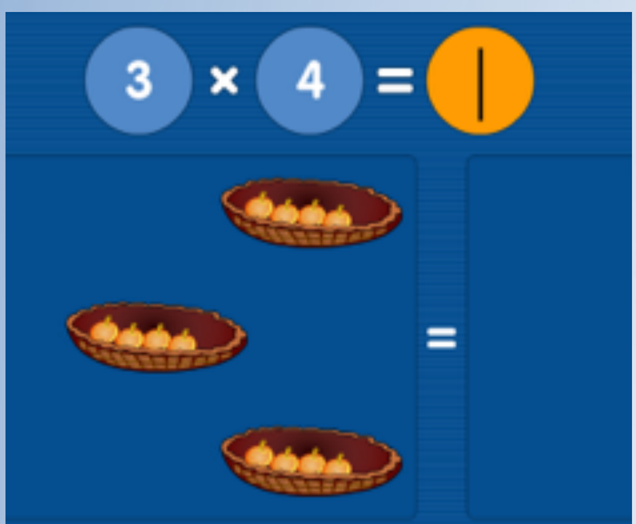


... e non è neanche così strano se si pensa a quello che siamo abituati a fare quando cambiamo unità di misura...



Convertire pollici in centimetri significa moltiplicare per 2,54.

Convertire lire in euro equivale a una moltiplicazione per 1936,27.



Anche questa situazione, da scuola primaria, che siamo abituati a interpretare come somma ripetuta, può essere interpretata come un cambio di scala: non si conta più in “cestini”, ma direttamente in ”mele”.

Un altro esempio: a proposito di potenze

Il capitolo “potenze” compare quando è troppo presto per indagare il tema dal punto di vista della funzione e/o dal punto di vista della struttura.

Tuttavia può essere utile:

- disporre della “abbreviazione stenografica”;
- usare la notazione scientifica per un numero molto grande o molto piccolo (il legame con le scienze…!);
- anticipare informalmente (con qualche problema) le idee che verranno esplorate in momenti successivi;
- aprire uno squarcio sui numeri (davvero) grandi…

Per tutto ciò, è sufficiente dire che 3^5 è un modo abbreviato di scrivere 3x3x3x3x3.

E basta!

Se si fa imparare a memoria che

Il prodotto di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti

è forte il rischio di innescare procedure automatiche e poi confondere base con esponente, somma con prodotto, …

D21.

L'espressione $a^{43} + a^{44}$ è uguale a

A	$a^{44 \cdot 43}$
B	$a^{43} \cdot (a+1)$
C	a^{87}
D	$2a^{87}$

Un quesito Invalsi destinato alla seconda classe del biennio e che ha avuto pochissime risposte corrette.

Ancora peggio per analoghi quesiti con "10" al posto di "a", tipo:

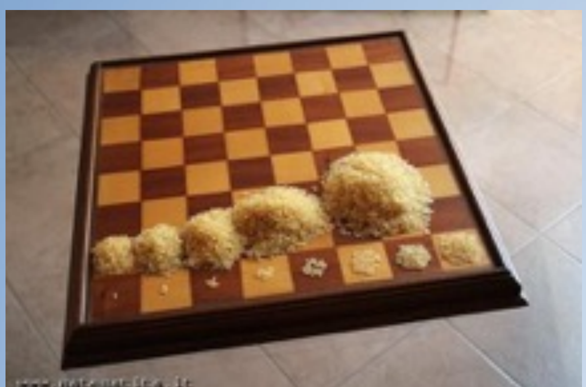
Quante cifre ha il numero $10^{37} + 10^{38}$?

invece… problemi…

Problemi che facciano scoprire certe regolarità.

Qual è l'ultima cifra di 2^{20}?

E di 2016^{2016}? … è ancora più facile…!

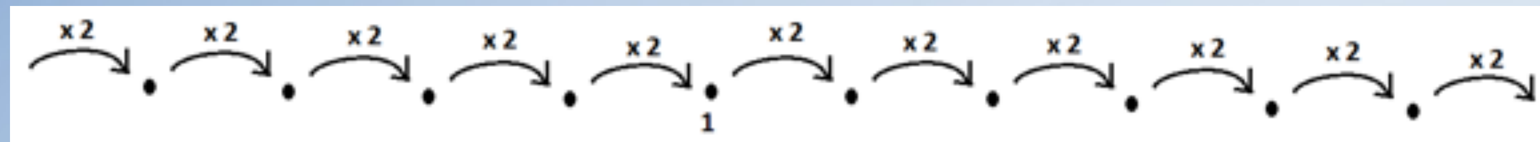


Problemi che diano un'idea, anche intuitiva, di *quanto in fretta* crescono le potenze.

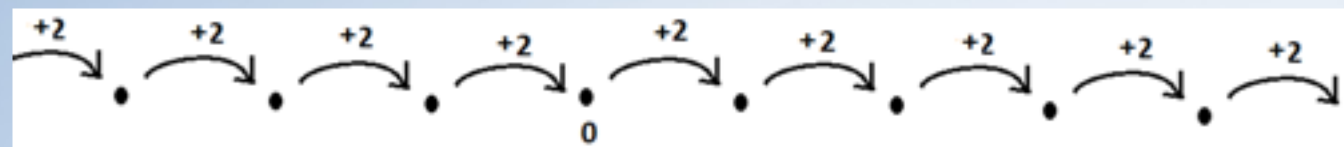
https://www.youtube.com/watch?v=KnQZ3Mg6upg

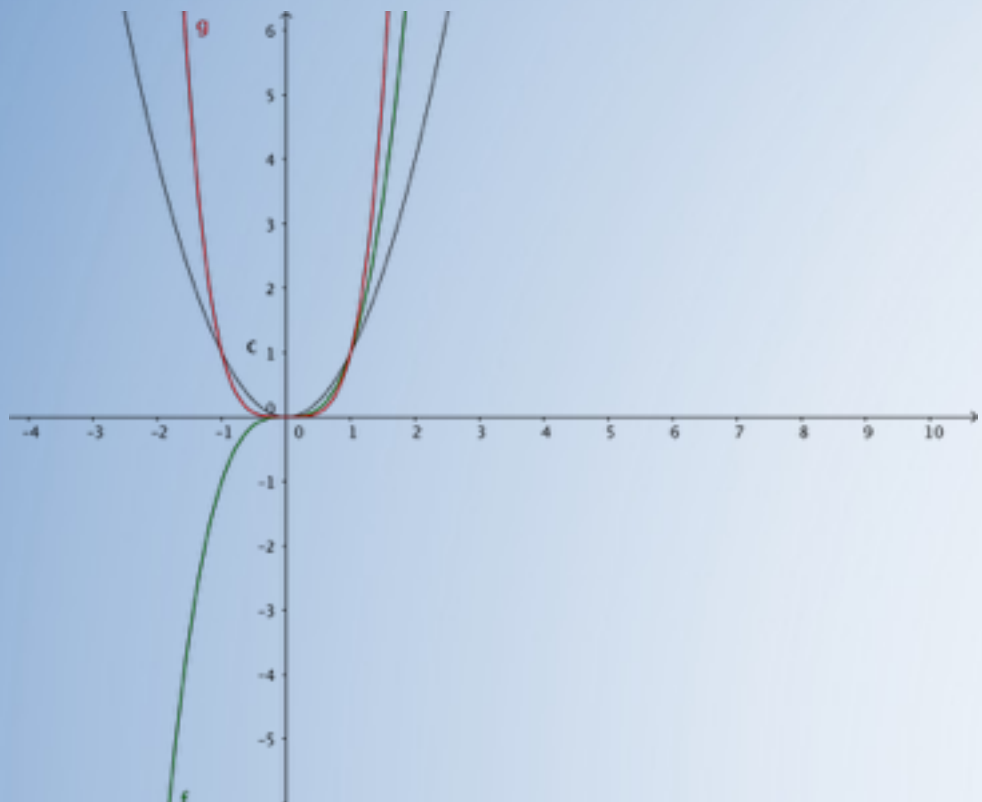
Controllare la ragionevolezza delle informazioni: trovo su un quotidiano che il peso del sole è di **1,989 x 1030 kg**; sarebbe bello se fossero i ragazzi ad accorgersi del refuso **10^{30} -> 1030**.
E se si lanciasse una ”caccia all'errore”?

Più avanti si potrà esplorare il tema dal punto di vista algebrico…



il parallelismo fra struttura additiva e struttura moltiplicativa…

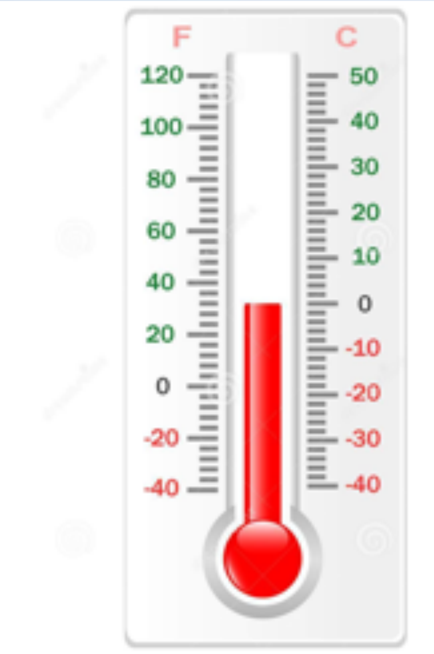




… e/o dal punto di vista analitico (la funzione potenza…)

Un altro esempio: a proposito di numeri relativi

I libri (di testo per la scuola media) contengono spesso incongruenze e difficoltà inutili che provengono dalla pretesa della narrazione **consequenziale**; che invece non ha molto senso nei primi anni di scuola.



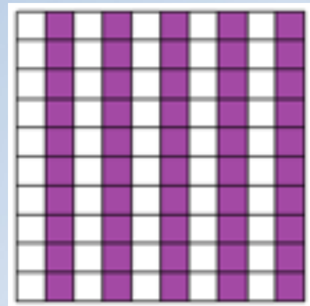
I ragazzi incontrano i numeri “col meno davanti” anche fuori da scuola (nelle temperature, in ascensore,…).

E invece se si introduce il piano cartesiano prima di aver visto i numeri relativi, ci possono essere rette che diventano semirette… a volte sì e a volte no… con tutta una serie di complicazioni inutili e artificiose (quando non di falsità).

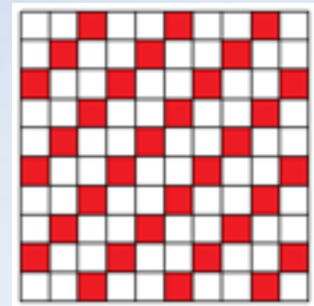
Un altro esempio:
regolarità numeriche per dar significato ai concetti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

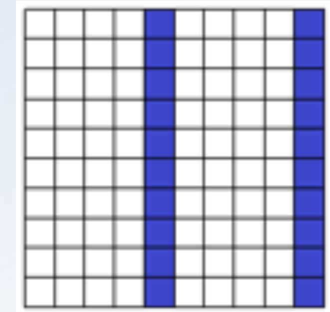
10x10



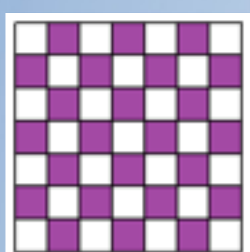
pari

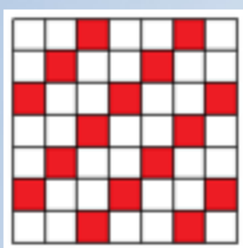


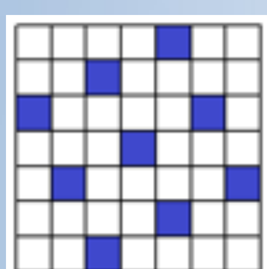
multipli di 3



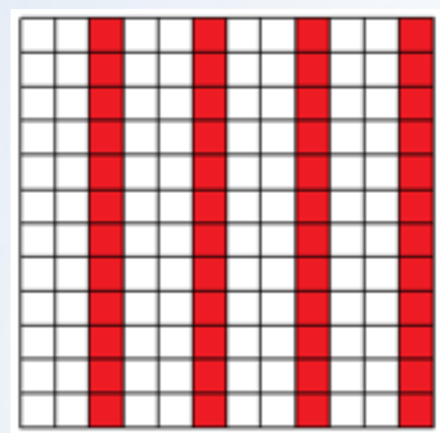
multipli di 5

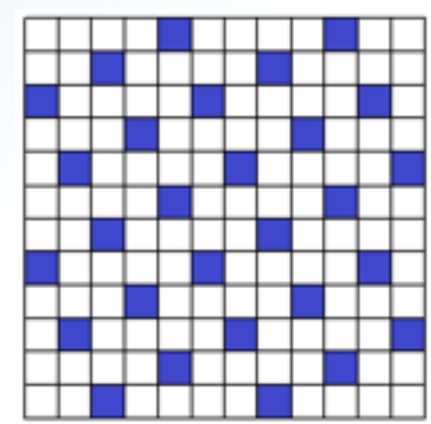






7x7

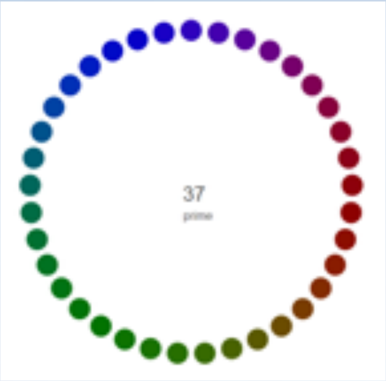


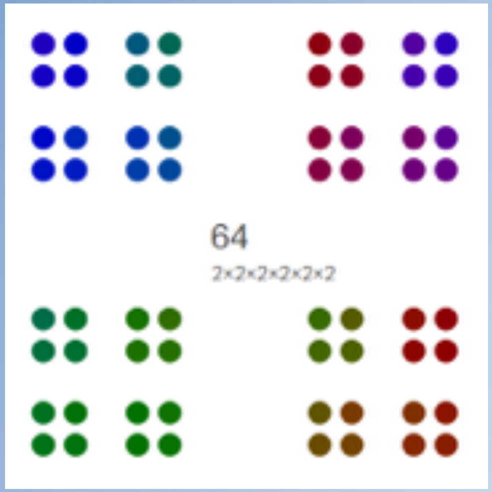


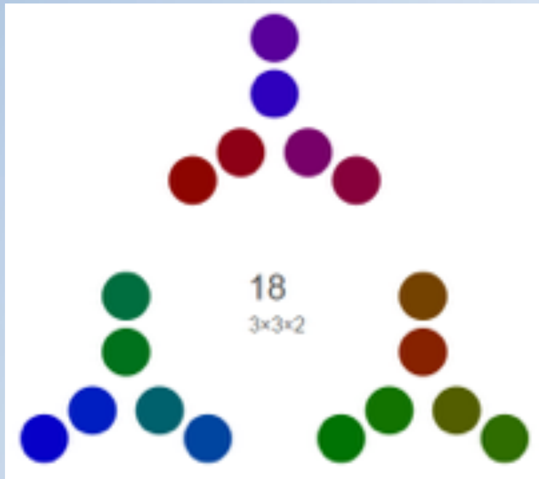
12x12

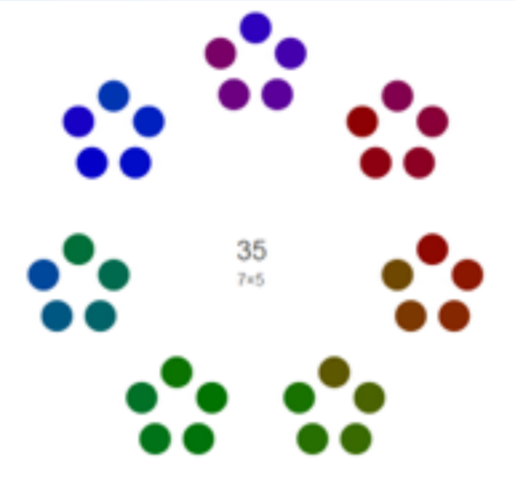
Una bellissima animazione (una danza…) che mette in risalto la fattorizzazione:

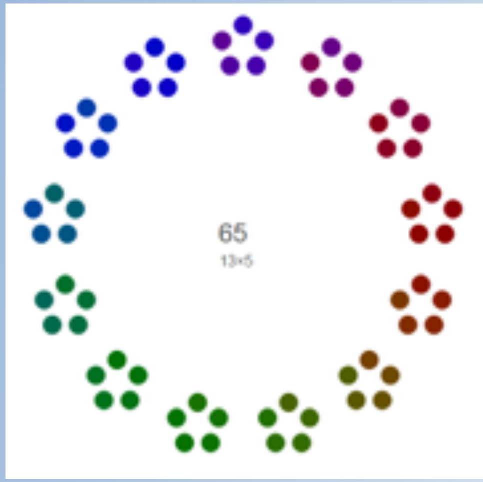
http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

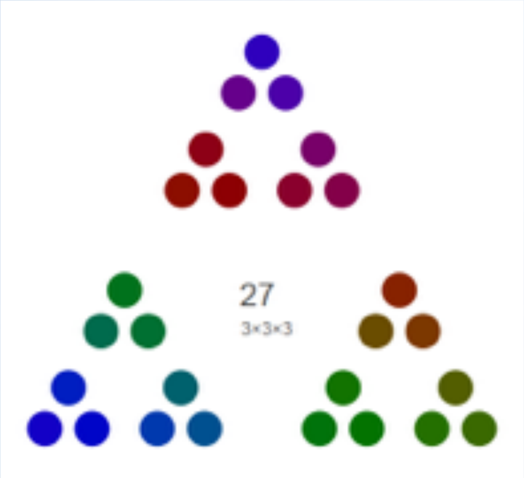


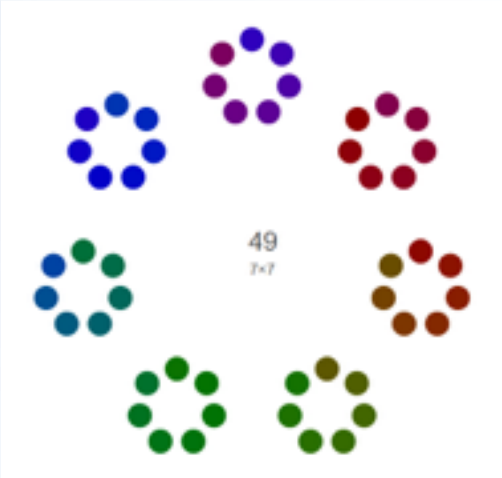






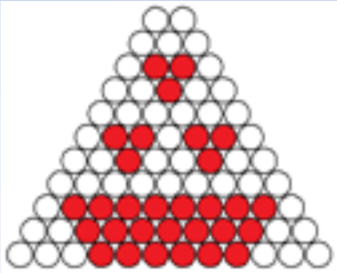


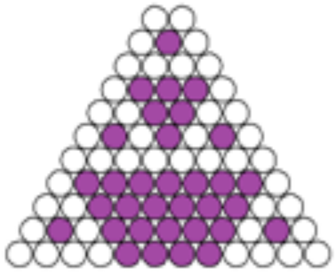


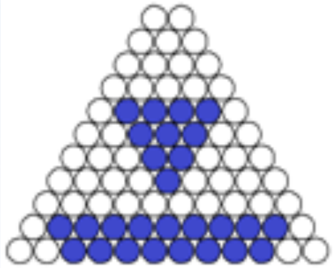


A che scopo?

- osservare;
- indagare, congetturare (che cosa c'è sotto?);
- fare qualche tentativo per giustificare le proprie ipotesi







Sono coinvolte affermazioni del tipo:

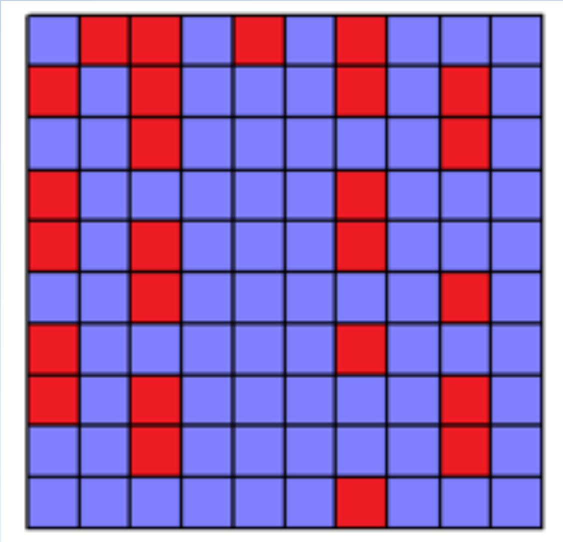
pari + pari = pari

pari + dispari = dispari

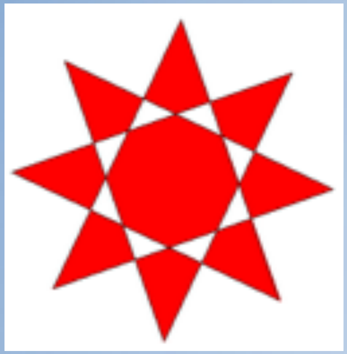
dispari + dispari = pari

Anche arrivare a una scrittura del tipo 2 x *n* per rappresentare un qualunque numero pari e capire che per rappresentarne un altro, non necessariamente uguale al primo, ma anche non necessariamente diverso, occorrerà usare un 2 x *k* costituisce una bella premessa informale verso l'algebra…

… il contrasto coi numeri primi…

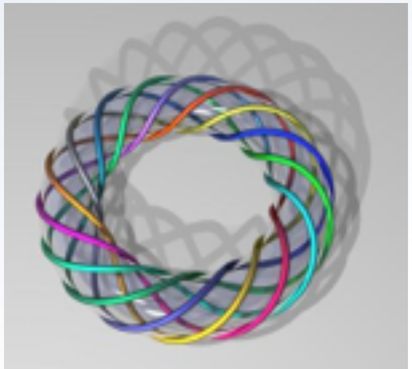


C’è una bella differenza rispetto agli schemi regolari dei multipli di…!



Dove si può “leggere” il MCD in un poligono regolare stellato?

Come si potrebbe dire subito che il MCD tra 57825 e 57835 è 5 se ci si dovesse basare solo su questo?



Il Massimo Comune Divisore tra due o più numeri si ricava moltiplicando solo i fattori primi che compaiono in tutte le scomposizioni, ciascun fattore preso una sola volta e con il minimo esponente con cui compare.

Un altro esempio: quando c’è il successivo

Come mai i distributori di numeri per le code al supermercato o negli uffici pubblici usano solo numeri naturali?
Perché non si potrebbe usare anche 3,2 o 5/7 ?

Una domanda apparentemente “innocua” che va a toccare una proprietà significativa che caratterizza i numeri naturali…

Un altro esempio: come si scrive la divisione

Scrivere una divisione (nell'ambito dei numeri **naturali**) è un problema. L'*output* sono (sempre!) **due** numeri; se proprio si volesse usare un 31:7 a sinistra del segno di uguaglianza, allora sarebbe necessario scrivere qualcosa del tipo:
31:7 = (4,3). Poco opportuno!

Invece come si può scrivere?
Per esteso:

31 diviso per 7 fa 4 con il resto di 3

oppure, in forma più compatta:

31 = 7 x 4 + 3

Però *non sembra* più un'operazione (e, in effetti, la divisione non lo è, nell'ambito dei numeri naturali…).

In ogni caso **NON** si può scrivere

31:7 = 4 con il resto di 3 **NO!**

e neppure

31:7 = 4resto3 **NO!**

oppure

31:7 = 4r3 **NO!**

che poi rischiano di portare a

31:7 = 4+3 **NOOO!**

o, ancora peggio, a

31:7 = 4,3 **NOOOOO!**

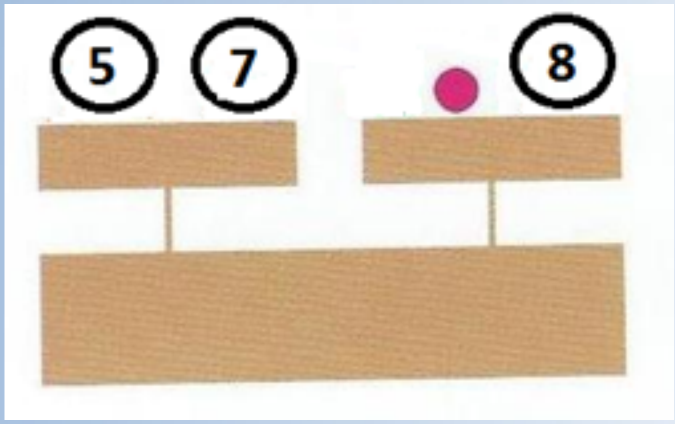
"=" vuol dire "**UGUALE**". Ciò che è scritto a sinistra **deve essere la stessa cosa** di ciò che è scritto a destra.
Mentre 31:7 non è la stessa cosa né di 7 (= 4+3), né di 4,3, né di 4r3 (che non si sa a che numero corrisponda).

Si tratta di una questione *delicata* e *pericolosa*:

- perché è facile che i ragazzi abbiano anche altre confusioni relative al simbolo = (oltre alla scrittura della divisione);
- perché si tratta di misconcezioni che rischiano di compromettere gli apprendimenti successivi (cfr. le equazioni).

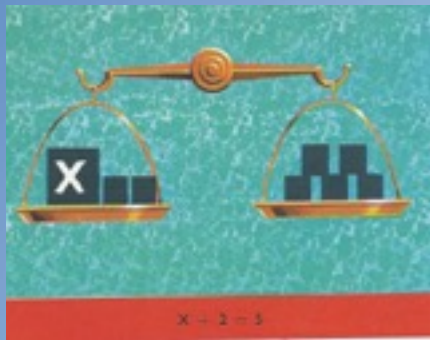
Esempio: nel tenere traccia dei conti che si fanno, a volte si fa un **uso scorretto** del simbolo “=“.
Per esempio, per fare 8+4+7, **non si può** scrivere

$$8+4=12+7=19$$



$$5+7 = [\ldots] + 8$$

Se un ragazzo si è abituato a usare scorrettamente il simbolo “=“, qui potrebbe rispondere 12 oppure 20.



Verticalità: il problema si ripercuote più avanti, con le equazioni. Capita che ragazzi del triennio del liceo imparino a risolvere le equazioni, ma non abbiano affatto chiaro il **significato** di ciò che stanno facendo. E allora:

… arrivando a $47=x$, potrebbero aver bisogno di altri tre passaggi ($-x+47=0$ -> $-x=-47$ -> $x=47$) prima di arrivare alla soluzione *(è una specie di burocrazia)…*

… oppure potrebbero dichiarare di non saper risolvere $y^2+y-6=0$ perché *io ho imparato quelle con la x!…*

… finché casualmente non ”fanno una scoperta”:

Prof, ma allora quando si scrive "= 0" vuol dire proprio che quello che c'è scritto dall'altra parte è uguale a 0 ??!!