

TEORIA DEI GIOCHI

Parte 1

Matematica nella realtà – Università Bocconi

Roberto Lucchetti - Politecnico di Milano

10 Dicembre 2010



Che significa teoria dei giochi?

Gioco:

Due o più individui partono da una situazione iniziale data e seguendo certe regole agiscono fino ad arrivare a una delle possibili situazioni finali. Sulle situazioni finali possibili ogni giocatore ha le sue preferenze

➤ Esempio:

Nella dama o negli scacchi lo scopo di ogni giocatore è quello di vincere

Che significa teoria dei giochi?

- Il gioco rappresenta un modello matematico efficace per descrivere *interazioni* tra più agenti:
 - Chi contratta
 - Chi organizza e chi partecipa a un'asta
 - Alunni e professore
 - Genitori e figli
 - Animali che competono per un territorio
 - Computers interagenti in un network

Primi fondamentali risultati

- La teoria dei giochi è una disciplina nuova:
 - Teorema di Zermelo sugli scacchi (1913)
 - Teorema del minimax di v. Neumann (esistenza equilibri in strategie miste per giochi a somma nulla) (1928)
 - *Theory of games and Economic behaviour*, v. Neumann Morgenstern, considerato il libro fondante della teoria (1944)
 - Modello non cooperativo di Nash (1951)
Vedi ad esempio
http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm

Applicazioni

- ❖ Economia
- ❖ Aste
- ❖ Suddivisione spese
- ❖ Calcolo del potere dei giocatori
- ❖ Medicina
- ❖ Biologia molecolare
- ❖ Psicologia
- ❖ Telecomunicazioni
- ❖ E tanto altro...

PREMESSA

Persone libere cooperano in progetti che sarebbe impossibile portare avanti da soli.

Tuttavia alcuni agenti potrebbero pensare che i loro interessi siano meglio tutelati approfittando dei benefici della collaborazione, senza poi mantenere gli impegni.

Un agente che teme la scorrettezza altrui sceglie un atteggiamento aggressivo, inducendo di conseguenza lo stesso comportamento negli altri.

Lasciati a loro stessi, c'è il rischio concreto che agenti razionali non beneficino MAI della possibilità di cooperazione e provochino quindi uno stato continuo di guerra tutti contro tutti.

In questo quadro, tutta la vita umana sarà
“...solitary, poor, nasty, brutish and short...”

(Hobbes, Leviathan)



IPOSTESI DELLA TEORIA

Gli agenti sono:

- egoisti
- razionali

Egoismo: si tiene conto della presenza degli altri agenti solo per cercare il meglio per sé.

Razionalità: complicato!

Ipotesi di partenza

- Gli agenti sanno esprimere preferenze *coerenti* sugli esiti possibili del gioco.
- **Coerente:** vale la proprietà transitiva
- **Valutano** allo stesso modo situazioni *identiche*
- **Hanno** capacità *infinita* di analisi

Paradosso di Allais (sulla coerenza)

■ Due possibili lotterie:

1)	A		B	
0.33	2500	1	2400	(82%)
0.66	2400			

2)	A		B	
0.33	2500	(83%)	0.34	2400
0.67	0		0.66	0

$$825 = (0.33)2500 > (0.34)2400 = 816$$

Introducendo funzioni di utilità

Nella prima $0.33u(2500) < 0.34u(2400)$

Nella seconda $0.33u(2500) > 0.34u(2400)$!

Capacita' infinita di analisi

■ Beauty contest

Tra i lettori di un giornale vengono premiati quelli che indovinano, tra una serie di foto di partecipanti a un concorso di bellezza, quella più votata:

It is not a case of choosing those [faces] that, to the best of one's judgment, are really the prettiest, nor even those that average opinion genuinely thinks the prettiest. We have reached the third degree where we devote our intelligences to anticipating what average opinion expects the average opinion to be. And there are some, I believe, who practice the fourth, fifth and higher degrees.

(Keynes, General Theory of Employment Interest and Money, 1936)

■ Analogo **matematico**:

Chiedere a un gruppo di persone di scrivere un numero intero compreso tra 1 e 100, ricevono un premio coloro che più si avvicinano **alla metà** della media di tutti i numeri proposti.

PRIMA IPOTESI DI RAZIONALITA'

Un giocatore non compie una mossa A, se ne ha a disposizione una B che lo fa stare meglio,

qualunque sia il comportamento degli altri.

100	100	0	150
150	0	101	101

Nonostante la grande semplicità,

questa regola ha conseguenze sorprendenti:

- Può essere più conveniente giocare un gioco G dagli esiti più sfavorevoli di un gioco G' per entrambi
- Può essere meno conveniente per entrambi i giocatori aumentare le loro possibilità di scelta.

10
10

0
11

8
8

-1
0

11
0

1
1

0
-1

-2
-2

0
0

100
-1

100
-1

10
10

0
11

-1
100

10
10

0
11

11
0

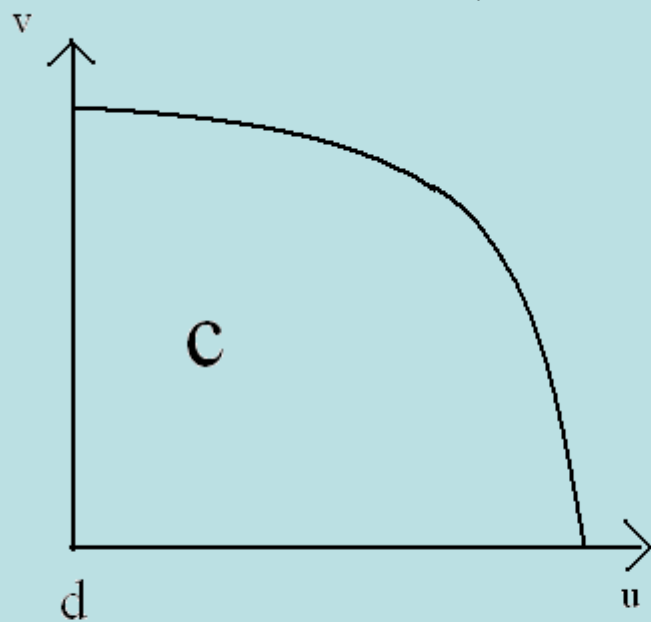
1
1

-1
100

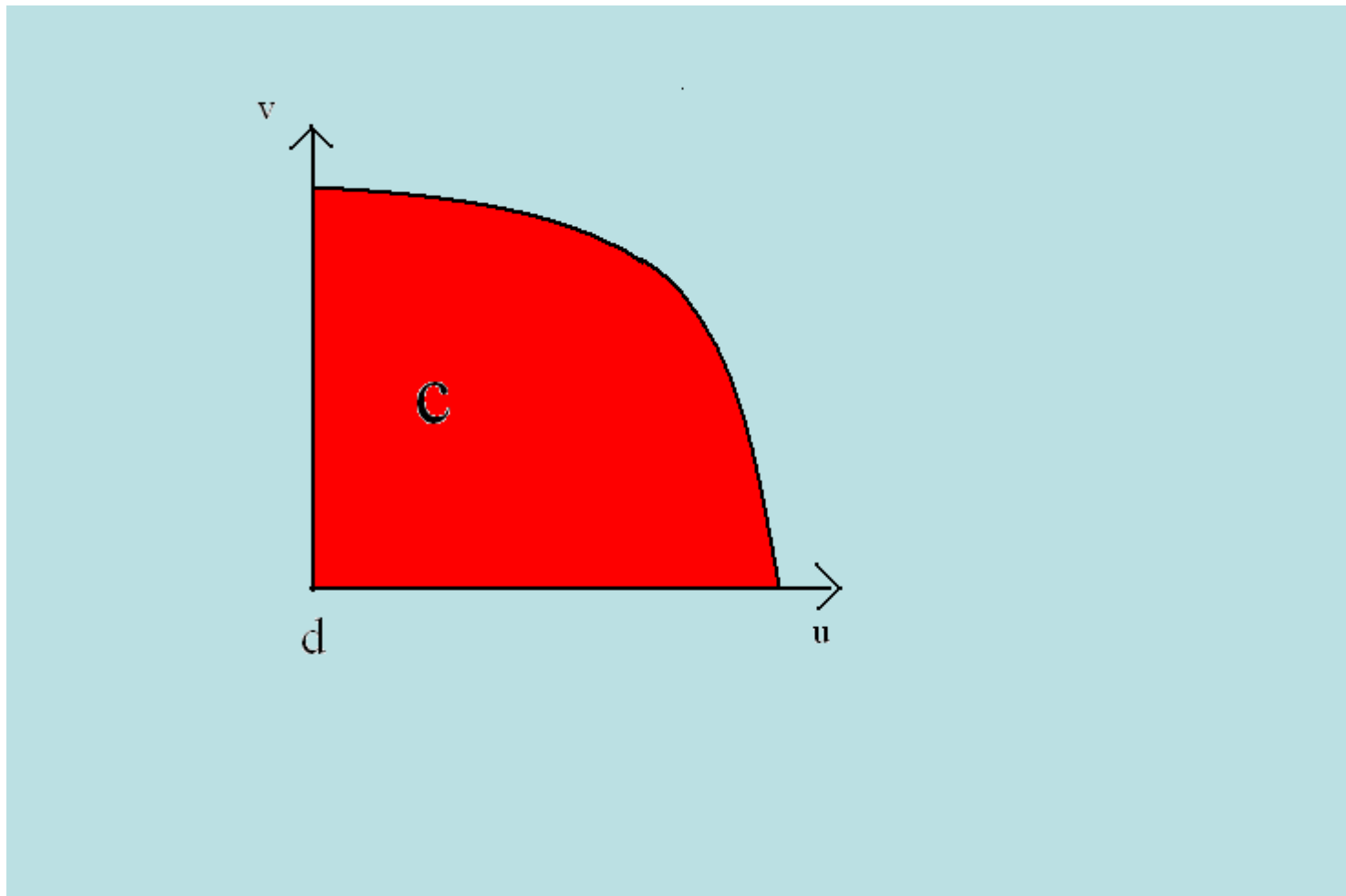
11
0

1
1

Contrattazione



Contrattazione



Contrattazione

$\mathcal{C} = \{(C, d) : \text{esiste } x \in C : x \succ \succ d\}$

Soluzione:

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^2$ tale che $F[(C, d)] \in C$

Proprietà:

- Simmetria
- Efficienza
- Indipendenza dalle alternative irrilevanti
- Indipendenza trasformazioni ammissibili.

Contrattazione

■ Teorema di Nash

Esiste unica funzione F che soddisfa le proprietà precedenti:

Il punto di C che viene scelto è quello dove il **prodotto** delle **utilità** dei giocatori è **massimo**.



- **Simmetria:**

Giocatori con opportunità simmetriche devono avere stessa utilità

- **Efficienza:**

Non può essere soluzione una distribuzione di utilità tale che ce ne sia un'altra che assegna maggiore utilità a entrambi

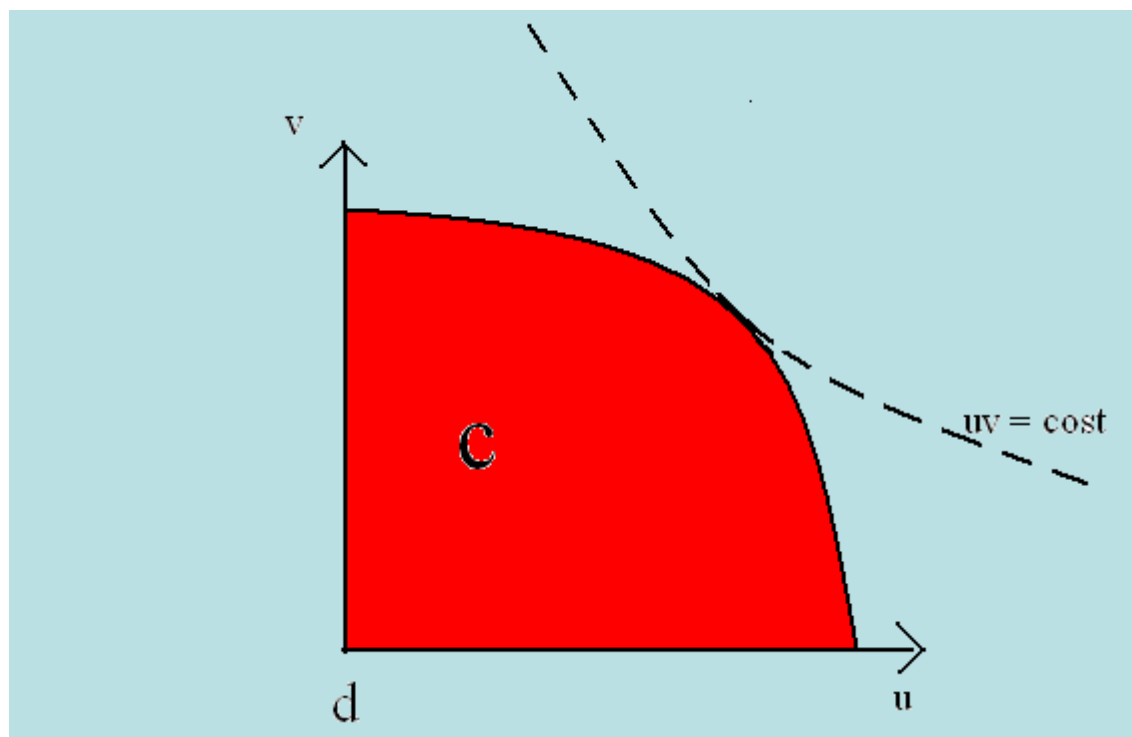
- **Indipendenza dalle alternative irrilevanti:**

Se un problema contiene più distribuzioni possibili di un altro ma la soluzione del primo è una distribuzione possibile anche nel secondo, e se i punti di disaccordo sono gli stessi nei due casi, allora la soluzione del problema con meno alternative coincide con quella del problema con più alternative

- **Indipendenza trasformazioni ammissibili:**

La soluzione non dipende dall'origine degli assi e dalle unità di misura usate per rappresentare il problema di contrattazione nel piano.

Contrattazione



Il matrimonio (un problema di *matching*)

$$a \succ_1 b \succ_1 c$$

$$b \succ_2 c \succ_2 a$$

$$c \succ_3 a \succ_3 b$$

$$((a, 2), (b, 1), (c, 3))$$

Non va bene perche' 2 e c...

ALGORITMO DI MATCHING

$$3 \succ_a 2 \succ_a 1$$

$$3 \succ_b 1 \succ_b 2$$

$$1 \succ_c 2 \succ_c 3$$

1

2

3

c

a, b

c, b

a

b

c

a