PNI problema 1

a) Dalle equazioni delle circonferenze disegnate in figura si ricava l'espressione analitica della funzione g:
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & per -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & per 2 < x < 4 \\ \sqrt{-x^2+9x-20} & per 4 \le x \le 5 \end{cases}$$
La funzione g non è derivabile in $x = -2$ (derivata destra), $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$ (derivata sinistra) nel senso che in tali punti la derivata è infinita come si vede in figura (e come si può facilmente verificare con i calcoli).

b) Una condizione sufficiente perché f presenti un estremante relativo è che nei punti in questione risulti $f' = 0$ e $f'' \neq 0$ (ovvero $g = 0$ e $g' \neq 0$). Allora, nell'intervallo aperto in questione la funzione f presenta un massimo in $x = 2$ e un minimo in $x = 4$.

c) $f(4) = \int_{-2}^{4} g(t)dt = \int_{-2}^{2} g(t)dt + \int_{2}^{4} g(t)dt$ dove il valore dei due integrali si calcola grazie a elementari formule della geometria (area di semicerchi), tenendo presente che la seconda "area"è negativa. In conclusione risulta $f(4) = \frac{3\pi}{2}$.

$f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)dt = \int_{-2}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{1} g(t)dt$ dove il primo integrale si calcola sempre ricorrendo all'area di un quarto di circonferenza mentre per il secondo si può ricorrere al metodo di sostituzione ponendo $t = 2\sin u$. In conclusione, risulta $f(1) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Risultando $f' = g$, i punti che annullano la derivata seconda di f sono quelli che annullano la derivata prima di g: $x = 0$, $x = 3$, $x = \frac{9}{2}$. Dal significato geometrico dell'integrale e dall'osservazione che la seconda circonferenze (quella "negativa"di centro (3,0)) è più piccola di quella di centro (0,0), si deduce che la funzione f risulta sempre non negativa. Per disegnare un grafico qualitativo di f, osserviamo (ad esempio in relazione al primo intervallo di estremi $x = -2$ e $x = 0$) che le condizioni $g \geq 0$ e $g' \geq 0$ si traducono in $f' \geq 0$ e $f'' \geq 0$: la funzione f risulta crescente e convessa. Analogamente si ragiona per i successivi intervalli.